内 容 简 介

本书系统地论述由常微分方程定义的动力系统的周期解及其分支理论,介绍研究有关周期解及其各种分支现象的一般理论与方法,包括 Hopf 分支、退化 Hopf 分支,自治、周期系统周期解的局部分支,非双曲孤立闭轨及闭轨族在自治、周期扰动下的非局部分支,平面系统的 Hopf 分支、Poincaré 分支及同异宿分支等.

本书自成系统,从介绍最基本的定性理论入手,在介绍基本的定性方法与分支理论的基础上逐步深入地研究不同程度的退化分支现象.本书可作为高等院校数学专业的研究生、教师及相关科学研究工作者的教学、科研参考书.

图书在版编目(CIP)数据

动力系统的周期解与分支理论/韩茂安著.—北京:科学出版社,2002

(现代数学基础丛书)

ISBN 7-03-009809-9

Ⅰ.动… Ⅱ.韩… Ⅲ.动力系统(数学)—周期解 Ⅳ.O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 073357 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年3月第 一 版 开本:850×1168 1/32

2002年3月第一次印刷 印张:15 1/4

印数:1—2 000 字数:396 000

定价: 31.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈北燕〉)

前　言

动力系统理论在 20 世纪 60 年代形成基本框架，到 80 年代才逐步完整起来，而动力系统分支理论的发展则稍缓慢，这是因为结构不稳定系统可以以多种形式出现分支现象，分支发生的层次也不尽相同，这导致分支理论的内容不断向纵向深入发展. 作者于 1983 年在南京大学数学系开始接触分支理论领域，最初是参加由叶彦谦教授主持的、Jack K. Hale 教授主讲的分支理论学习班，当时由于时间和能力所限，只是粗略地研读了 Hale 教授与周修义教授合著的分支理论专著“Methods of Bifurcation Theory”的中文油印本. 直到 1987 年获得博士学位后才较系统、深入地研读了该书的原版，此后逐步熟悉了分支理论的基本内容与方法，特别是从 1989 年开始主持国家自然科学基金项目以来，在分支理论这片沃土上不断耕耘，并在微分方程周期解的 Hopf 分支、Poincaré 分支、同异宿分支，调和解与亚调和解的共振分支，不变环面的分支等方面获得一系列的研究成果，在以上多方面，建立了判定周期解个数的一般方法，这些方面的部分成果，已在书《微分方程分支理论》(韩茂安、朱德明，煤炭工业出版社，1994) 与《Bifurcation Theory and Methods of Dynamical Systems》(Luo Dingjun, Wang Xian, Zhu Deming and Han Maoan, World Scientific, 1997) 中出现. 最近几年，在一些退化分支方面，有不少新成果面世. 这些研究工作一是在理论上更深一层，二是出于实际应用的需要，例如，在研究二次系统极限环的个数时就出现多级的退化分支(包括 Hopf 分支、Poincaré 分支及同异宿分支等)，而且有一些退化分支至今也未得到满意的解决. 当然，由于多项式系统的非线性项是有限的，其分支的退化级别也必定是有限的. 在 1997 年初本人就开始筹划写一部专门讨论周期解的各种分支方法的著作，在以后几年的写作过

程中内容的选取和次序的安排曾有多次变动.现在虽然定稿并出版,但在内容安排、理论的深度和广度方面仍恐有许多不足.作者试图使本书具有以下三个方面的特点:一、较系统地介绍自治系统与周期系统周期解的各种分支方法,尤其是介绍在其他书中看不到的各种退化分支现象;二、在论证上自成一体,读者通过阅读本书能够迅速了解和掌握分支理论的新发展,并使得有兴趣的学者尽快进入分支理论的若干研究前沿;三、本书在最基本的理论基础上展开讨论,并着重介绍作者本人的研究成果.实际上,本书约半数内容是系统地总结作者最近五六年的研究成果,许多结果是本书独有的.

本书共分五章,现将各章内容简介如下:

第一章:主要是收集微分方程与奇点和极限环有关的定性理论与方法,包括有关初值解的基本定理,用来研究周期解分支的一致压缩映射原理和隐函数定理,双曲奇点的稳定流形与中心流形定理,研究解的稳定性的 Liapunov 方法,平面系统的指标公式,平面奇点类型的判别方法,无穷远奇点分析方法,规范型的理论与应用等.以上方面的理论和方法在本章均有较系统的介绍,但对多数定理并没有给出证明,因为这些定理的证明在很多书中都能找到.然而在应用有关理论与方法及引入新的方法讨论一些有研究背景的非线性系统的定性性质方面,均给出了详细的论证(例如周期线性系统周期解的范数估计、Liénard 方程细焦点的稳定性判定、若干系统规范型的进一步标准化等),这一部分均取自本人已发表的论文或者首次在本书出现.

第二章:较系统地论述高维自治与周期系统非局部周期解的分支.首先,不加证明地介绍了双曲闭轨的稳定流形定理,然后,对所研究的系统引入曲线坐标变换,对所获得的 Poincaré 映射或分支方程利用 Rolle 中值定理等分析工具给出一个或多个周期解的存在条件,在应用压缩映射原理讨论周期解的存在性时我们给出了可以测定保证周期解存在的小参数变化范围的方法,弥补了以往结果的不足,例如,可以证明线性系统

$$\ddot{x} + x = \cos^2 t + \varepsilon x \sin^2 t$$

当$|\varepsilon| < \frac{1}{2}$时有惟一的 π 周期解，环面系统

$$\dot{x} = \varepsilon[-\sin x + \cos t]$$

当$0 < |\varepsilon| \leqslant \frac{1}{3}$时(在环面上)恰有两个闭轨，且均为 2π 周期的. 本章还研究了平面系统双曲闭轨的周期扰动，给出了次调和解的分支判据，以及寻求这些解随参数改变而变化的规律的方法，对高维可积自治系统的闭轨在自治或周期扰动下周期解的分支也进行了研究，获得了用于判定周期解存在与否的 Melnikov 函数，特别给出了利用同宿 Melnikov 函数决定次调和解的个数的方法.

第三章：主要研究一般的高维自治系统与周期系统的小振幅周期解，这些周期解在未扰动系统的给定解或奇点的小邻域内出现，称之为局部分支. 这一章介绍研究这种周期解分支的两种方法，一是广为人知的 Liapunov-Schmidt 方法，二是鲜为人知但却易于接受的初等方法，用这两种方法不但可以研究经典的 Hopf 分支问题，而且还可用于一些退化的 Hopf 分支(即奇点余维数大于 1)，同时第二种方法又可用于研究具非半单特征值的线性系统的单参数闭轨族在自治扰动下的分支现象，这两种方法在建立决定周期解个数的分支函数或分支方程时各具特色.

上述三章的内容主要是论述高维自治或周期系统的局部与非局部周期解的分支理论，这些理论当然也适用于平面系统. 然而，由于平面系统的特殊性，可对这类系统进行更深入的研究，获得更细致的成果，这就是在第四章与第五章所要做的工作.

第四章：引入了 Hopf 环性数、含闭轨族的开集的环性数及同宿轨、异宿轨的环性数的概念，并给出了用 Melnikov 函数及其他的附加条件来决定这几类环性数的一般方法. 本书所考虑的扰动系统一般都含有多个参数，这与单参数扰动有本质的不同，例如，对方程

$$\dot{x} = y - \varepsilon(a_1x + a_2x^3 - a_3^2x^5 + \varepsilon a_3x^7), \quad \dot{y} = -x$$

来说，当 $a=(a_1,a_2,a_3)=0$ 时，出现全局中心，而当 $a\neq 0$ 且作为常量时，必存在 $\varepsilon^*(a)>0$，使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon^*$ 时，原点的环性数为 2. 然而，把 a 当作参数，则当 $|\varepsilon|+|a|$ 充分小时，原点的环性数是 3. 同、异宿分支是第四章的难点，这一章给出决定同、异宿环稳定性的前三个量的计算公式. 讨论了这些奇闭轨在扰动下产生一个、二个或三个极限环的条件. 作为应用，讨论了出现于三维与四维系统余维二分支中两类含双参数的多项式系统极限环的全局惟一性问题.

第五章：继续研究平面系统的极限环. 首先介绍了旋转向量场理论，引入了新的成果，对一般的平面系统给出了极限环存在、不存在及惟一存在的判定条件，进一步研究了 Liénard 系统的 Hopf 分支、Poincaré 分支，以及给出了决定这类系统在整个平面上环性数的方法，例如，证明了五次系统

$$\dot{x} = y(Ny^2+1) - \varepsilon\left(x^5 + \sum_{i=1}^{4} a_ix^i\right), \quad \dot{y} = -x(1+bx^2)$$

（其中 $N\geqslant 0, b\geqslant 0$ 为常数，$\varepsilon\geqslant 0$ 充分小，a_i 为有界参数）的环性数为 2；n 次系统

$$\dot{x} = y - \varepsilon\sum_{i=1}^{n} a_ix^i, \quad \dot{y} = -(x+x^2)$$

的环性数为 $\left[\frac{2n-1}{3}\right]$，而当 $\varepsilon=1$，$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为任意参数时，量 $\left[\frac{2n-1}{3}\right]$ 也是上述 n 次系统在原点的 Hopf 环性数.

限于作者的知识水平，与弱化 Hilbert 第 16 问题有关的二次系统极限环的分支、平面上含三个或更多个点的异宿环的扰动分支，以及空间同异宿分支等都没能在书中介绍.

作者从 1982 年以来一直得到叶彦谦教授的不断指导和帮助，作者也得到罗定军教授经常的帮助，本人也从主要合作者朱德明

教授那里得到不少帮助;自从作者于 1996 年参加国家自然科学基金重点项目以来,曾多次得到张芷芬教授和李承治教授的指导和关心,并就各种分支问题的难点和解决方法进行过多次有益的讨论.作者于 1998～1999 年在美国 Georgia Institute of Technology 访问期间,在科研和生活上都得到过 Jack K. Hale 教授的许多帮助;本书的初稿曾在动力系统研讨班及相关课程的教学中试用过多次,我的同事顾圣士、章仰文、汪静、向光辉、陈贤峰及研究生孟争、吴玉海、陈华、林鹰等曾研读过该书的部分章节并提出了许多修改建议,作者借此书出版之际一并向以上各位师长、挚友、同事及研究生们表示衷心的感谢.谢谢我的研究生孟争、吴玉海、陈华、林鹰、王宗勇、金雷,他们在紧张的学习之余帮我打出了全部书稿.感谢上海交通大学校领导和应用数学系领导给我提供良好的工作环境.感谢国家自然科学基金委员会对作者研究工作的一贯支持.感谢国家科学技术学术著作出现基金对本书出版的支持.感谢科学出版社吕虹编辑对出版本书的辛勤工作.最后,感谢我的妻子林国凤和儿子韩通对我一贯的支持和帮助,他们最知我感恩的心.

作　者

于上海交通大学

目　　录

第一章　奇点及其局部性质 ………………………………………… 1

§1　线性系统 ………………………………………………………… 1

1.1　常系数线性系统 ……………………………………………… 1

1.2　周期线性系统 ………………………………………………… 5

§2　隐函数定理与解的分析性质 …………………………………… 12

2.1　解的分析性质 ………………………………………………… 12

2.2　隐函数的存在性与光滑性 …………………………………… 16

§3　等价性、稳定流形与中心流形 ………………………………… 18

3.1　等价性 ………………………………………………………… 18

3.2　稳定流形与中心流形 ………………………………………… 20

§4　稳定性与 Liapunov 函数 ……………………………………… 30

4.1　稳定性的基本概念与定理 …………………………………… 30

4.2　Liénard 方程奇点的稳定性 ………………………………… 35

§5　指标理论与平面高次奇点 ……………………………………… 41

5.1　指标概念与公式 ……………………………………………… 41

5.2　解析系统的高次奇点判定 …………………………………… 44

5.3　无穷远奇点 …………………………………………………… 46

§6　规范型理论与应用 ……………………………………………… 53

6.1　规范型基本理论 ……………………………………………… 53

6.2　应用:几类方程的规范型 …………………………………… 59

习　题 ………………………………………………………………… 68

第二章　Poincaré 映射与周期解 ………………………………… 72

§1　双曲闭轨与曲线坐标 …………………………………………… 72

1.1　闭轨的稳定流形定理 ………………………………………… 72

1.2　闭轨附近的曲线坐标 ………………………………………… 78

§2 周期轨道的自治扰动 …………………………………… 82
2.1 双曲闭轨的扰动 ………………………………………… 83
2.2 二维系统的闭轨分支 …………………………………… 84
2.3 三维系统的闭轨分支 …………………………………… 92
§3 周期系统的周期解 ………………………………………… 97
3.1 调和解与次调和解 ……………………………………… 97
3.2 压缩映像原理方法 ……………………………………… 103
3.3 隐函数定理方法 ………………………………………… 110
§4 平均方法与周期解的简单分支 …………………………… 121
4.1 平均方法 ………………………………………………… 121
4.2 二重鞍结点与双曲极限环的周期扰动 ………………… 128
§5 Poincaré 分支与 Melnikov 函数 ………………………… 138
5.1 基本假设与引理 ………………………………………… 138
5.2 次调和解与次调和 Melnikov 函数 …………………… 140
5.3 周期轨道的 Poincaré 分支 …………………………… 157
习 题 ………………………………………………………… 162
第三章 周期解的局部分支理论 …………………………… 166
§1 Liapunov-Schmidt 方法 ………………………………… 166
1.1 基本定理 ………………………………………………… 166
1.2 分支函数与周期解 ……………………………………… 169
§2 Hopf 分支与一类退化 Hopf 分支 ……………………… 176
2.1 Hopf 分支定理 ………………………………………… 176
2.2 一类退化 Hopf 分支 …………………………………… 183
§3 周期解的共振分支 ………………………………………… 187
3.1 分支函数的建立 ………………………………………… 187
3.2 四维系统的局部周期轨道 ……………………………… 191
§4 周期解分支的初等方法 …………………………………… 198
4.1 周期扰动系统 …………………………………………… 198
4.2 自治扰动系统 …………………………………………… 204
§5 非半单特征值情况下的分支 ……………………………… 209

5.1 分支方程与闭轨的惟一惟二性条件 …………………… 210
5.2 分支量的计算方法 ……………………………… 221
§6 非半单线性系统的扰动 ………………………………… 227
6.1 分支方程与闭轨的个数判定 ……………………… 228
6.2 六维系统更多个闭轨的分支 ……………………… 233
习 题 …………………………………………………… 243
第四章 平面系统的极限环 ………………………………… 247
§1 Hopf 分支与环性数 …………………………………… 247
1.1 后继函数与焦点量 ……………………………… 247
1.2 Hopf 环性数与极限环的分支 …………………… 253
§2 Poincaré 分支与环性数 ……………………………… 269
2.1 Poincaré 分支的一般理论 ……………………… 270
2.2 一类 Liénard 方程的环性数 …………………… 278
§3 同宿分支 ……………………………………………… 287
3.1 极限环的惟一性 ………………………………… 287
3.2 极限环的惟二性 ………………………………… 300
3.3 同宿环的稳定性与多个极限环的分支………………… 322
§4 双同宿分支 …………………………………………… 332
4.1 非退化条件下双同宿的分支 ……………………… 332
4.2 双同宿分支的进一步结果 ………………………… 336
4.3 一类三次系统的双同宿分支 ……………………… 343
§5 异宿环的分支 ………………………………………… 346
5.1 异宿环的稳定性 ………………………………… 346
5.2 异宿环的扰动分支 ……………………………… 350
§6 两类双参数扰动系统 ………………………………… 358
6.1 两类 Melnikov 函数单调性 ……………………… 359
6.2 一类具有两点异宿环的多项式系统 ……………… 360
6.3 一类具有三点异宿环的多项式系统 ……………… 365
习 题 …………………………………………………… 374
第五章 平面系统的极限环(续) ………………………… 378

§1 旋转向量场理论 …………………………………………… 378
1.1 旋转向量场的概念与不相交定理 ……………………… 378
1.2 旋转向量场族中的 Hopf 分支与奇闭轨分支 ………… 387
§2 极限环的存在性与惟一性 ……………………………… 391
2.1 极限环的不存在性 ……………………………………… 391
2.2 Poincaré-Bendixson 定理与极限环的存在性 ………… 394
2.3 Dulac 函数法与多个极限环 …………………………… 398
§3 Liénard 系统的 Hopf 分支 …………………………… 405
3.1 幂级数方法 ……………………………………………… 406
3.2 曲线积分方法 …………………………………………… 417
§4 Liénard 系统的 Poincaré 分支 ……………………… 424
4.1 包围一个奇点的极限环 ………………………………… 424
4.2 包围三个奇点的极限环 ………………………………… 437
4.3 应用举例 ………………………………………………… 445
§5 Liénard 系统的全局分支 ……………………………… 450
5.1 全局分支中极限环的个数 ……………………………… 450
5.2 几类多项式系统的环性数 ……………………………… 455
5.3 一类 n 次 Liénard 方程的环性数 …………………… 457
习 题 ……………………………………………………………… 460
参考文献 …………………………………………………………… 463

第一章　奇点及其局部性质

微分方程最基本的解是定常解，对自治系统而言，定常解对应着微分方程在相空间中的奇点．研究奇点的局部性质是微分方程定性理论最基本的任务．本章主要讨论自治系统的局部性质，并给出有关奇点定性分析的理论与方法．首先从线性系统开始．

§1　线性系统

1.1　常系数线性系统

常系数齐次线性系统的一般形式是

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n, \tag{1.1}$$

其中 A 是 n 阶矩阵，其元素为实数．

定义 1.1　如果 A 的行列式 $\det A \neq 0$，则称 $x=0$ 为(1.1)的初等奇点；如果 A 没有具零实部的特征根，则称 $x=0$ 为(1.1)的双曲奇点；如果 A 的特征值均有负(正)实部，则称 $x=0$ 为(1.1)的汇(源)，如果 $x=0$ 为(1.1)的双曲奇点且不是汇和源，则称其为(1.1)的鞍点．

易见双曲奇点必是初等的，反之未必．又对 $n=2$ 的情况，如所周知，(1.1)的汇(源)是稳定(不稳定)的焦点或结点，而此时非双曲的初等奇点是中心奇点．

线性方程(1.1)的通解具有形式 $e^{At}x$，其中

$$e^{At} = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} A^i t^i.$$

每个解在 $R \times R^n$ 空间中表示一条曲线，该曲线在相空间 R^n 中的投影为(1.1)的轨线．

由矩阵理论，存在可逆矩阵 T，使得线性变换

$$T: y = Tx. \tag{1.2}$$

把(1.1)化为标准型

$$\dot{y} = By, \tag{1.3}$$

其中 $B = TAT^{-1}$ 为 A 的实 Jordan 标准型，因此它可写成下述块对角形：

$$B = \mathrm{diag}(B_+, B_-, B_0), \tag{1.4}$$

其中 $B_+(B_-, B_0)$ 的特征值具有正实部(负实部、零实部)，于是(1.3)的基本解矩阵 e^{Bt} 可写为

$$e^{Bt} = \mathrm{diag}(e^{B_+ t}, \quad e^{B_- t}, \quad e^{B_0 t}). \tag{1.5}$$

如果 $x = 0$ 为双曲奇点，则有

$$B = \mathrm{diag}(B_+, B_-), \quad e^{Bt} = \mathrm{diag}(e^{B_+ t}, e^{B_- t}),$$

且 $x = 0$ 为(1.1)的汇(源)当且仅当 $B = B_-(B = B_+)$. 由线性系统解的结构或由指数矩阵的定义知

$$\lim_{t \to +\infty} e^{B_- t} = 0, \quad \lim_{t \to -\infty} e^{B_+ t} = 0,$$

且趋于零的方式是指数式的. 若 B_- 本身是一个 Jordan 块，则可设

$$B_- = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{k \times k}, \quad \lambda < 0,$$

或

$$B_- = \begin{pmatrix} C & I & & \\ & \ddots & I & \\ & & \ddots & I \\ & & & C \end{pmatrix}_{2k\times 2k}, \quad C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a < 0,$$

此时有

$$e^{B_- t} = \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & 1 & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ & & & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

或

$$e^{B_- t} = \begin{pmatrix} D & Dt & \cdots & \frac{Dt^{k-1}}{(k-1)!} \\ & D & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & Dt \\ & & & D \end{pmatrix} e^{at},$$

$$D = e^{\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}.$$

同样,若 B_+ 或 B_0 本身是一个 Jordan 块,则 $e^{B_+ t}$ 与 $e^{B_0 t}$ 有与 $e^{B_- t}$ 类似的表达式.

对任意常向量 $y \in R^n$,与(1.4)的分块相应地可作分解 $y = (y_+, y_-, y_0)^T$,使 $By = (B_+ y_+, B_- y_-, B_0 y_0)^T$,其中上标"$T$"表示转置.令 E^u,E^s 与 E^c 表示 R^n 的线性子空间,且满足

$$TE^u = \{y \in R^n \mid y_- = y_0 = 0\},$$

$$TE^s = \{y \in R^n \mid y_+ = y_0 = 0\},$$

$$TE^c = \{y \in R^n \mid y_- = y_+ = 0\}.$$

由(1.5)易知集合 TE^u, TE^s 与 TE^c 是(1.3)的不变集,换句话说,这三个集合各由(1.3)的整条轨线组成.不变集 TE^u(TE^s)的特征是:对(1.3)的任一解 $e^{Bt}y$,当且仅当 $y \in TE^u$($y \in TE^s$)时有 $\lim\limits_{t \to -\infty} e^{Bt}y = 0$($\lim\limits_{t \to +\infty} e^{Bt}y = 0$).分别称 TE^u, TE^s 与 TE^c 为(1.3)的不稳定集、稳定集与中心集.注意到

$$e^{At} = T^{-1}e^{Bt}T,$$

可知不变集 TE^u, TE^s 与 TE^c 在变换(1.2)下的原像 E^u, E^s 与 E^c 即为原系统(1.1)的不稳定集、稳定集、中心集.

定义 1.2 如果存在同胚 $h: R^n \to R^n$,使

$$h(e^{At}x) = e^{Lt}h(x),$$

其中 L 为 n 阶实矩阵,则称 n 维线性系统(1.1)与下述 n 维线性系统

$$\dot{z} = Lz, \quad z \in R^n \tag{1.6}$$

为拓扑共轭的.

可证(见[3]).

定理 1.1 设原点为(1.1)与(1.6)的双曲奇点,则(1.1)与(1.6)为拓扑共轭的当且仅当矩阵 A 与 L 有相同个数的具正实部的特征根.

例 1.1 考虑三维线性系统

$$\dot{x} = ax - y, \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = -z, \tag{1.7}$$

易知其基本解矩阵为

$$\begin{pmatrix} e^{at}\cos t & -e^{at}\sin t & 0 \\ e^{at}\sin t & e^{at}\cos t & \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

设 $a>0$,则 E^u 为(x,y)坐标面,E^s 为 z 轴,(1.7)的相图如图 1.1 所示,图中箭头表示 t 增加时轨线上动点的运动方向.请读者画出当 $a<0$ 或 $a=0$ 时(1.7)的相图.

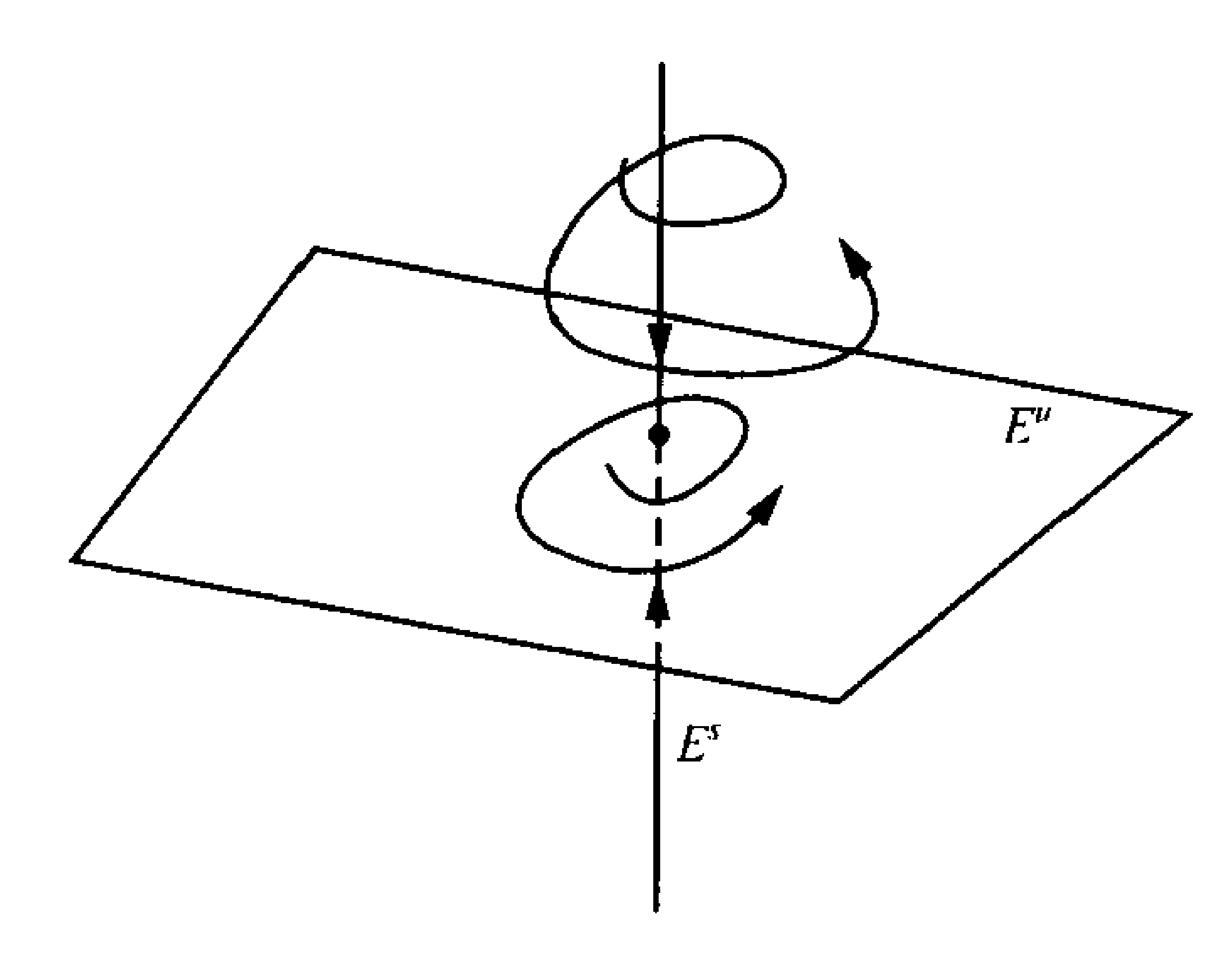


图 1.1 (1.7)的相图($a>0$)

1.2 周期线性系统

考虑非自治线性系统

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \tag{1.8}$$

其中 $A(t)$为 n 阶连续实矩阵,且存在 $T>0$ 使 $A(t+T)=A(t)$ 对一切 $t\in R$ 成立.称(1.8)为齐次周期线性系统.设 $X(t)$表示(1.8)的基本解矩阵,且满足 $X(0)=I_n$,此处 I_n 为 n 阶单位矩阵.利用解的存在惟一性知

$$X(t+T) = X(t)X(T).$$

引理 1.1 存在矩阵 B 与 S,且 S 为实的,使

$$X(T) = e^{BT}, \quad X^2(T) = e^{2ST}.$$

证明 不妨设 $X(T)$为 Jordan 标准型且只含一个 Jordan 块 C,即设

$$X(T) = C = \lambda I_n + R, R = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 λ 为复数,由 R 的形式知存在自然数 m,使对 $k>m$ 有 $R^k=0$. 令

$$BT=(\ln\lambda)I_n+Q,\quad Q=-\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j\lambda^j}(-R)^j,$$

则 $e^{BT}=\lambda e^Q=\lambda\sum_{k\geqslant 0}\frac{Q^k}{k!}$. 由于对 $x\in R$, $|x|<1$, 有

$$\ln(1+x)=\sum_{j\geqslant 1}(-1)^{j+1}\frac{x^j}{j}\equiv q(x),$$

因此

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{q^k(x)}{k!}=e^{q(x)}=1+x.$$

形式上利用上式,并注意到 $q\left(\frac{R}{\lambda}\right)=Q$ 且当 $k>m$ 时 $Q^k=0$, 可得

$$I_n+\frac{R}{\lambda}=\sum_{k\geqslant 0}\frac{Q^k}{k!}=\sum_{k=0}^{m}\frac{Q^k}{k!},$$

故有 $e^{BT}=\lambda\left(I_n+\frac{R}{\lambda}\right)=C=X(T)$.

由 $e^{BT}=X(T)$, 取共轭得 $e^{\bar{B}T}=X(T)$, 于是 $e^{BT}\cdot e^{\bar{B}T}=e^{(B+\bar{B})T}=X^2(T)$, 令 $S=\frac{1}{2}(B+\bar{B})$, 则 S 为实矩阵. 证毕.

引理 1.2(Floquet 定理) 存在非奇异的连续 T 周期矩阵 $P(t)$ 与 $2T$ 周期实矩阵 $R(t)$ 使

$$X(t)=P(t)e^{Bt},\quad X(t)=R(t)e^{St}.$$

此外,周期变换 $x=P(t)y$, $x=R(t)z$ 分别把(1.8)化为常系数系统 $\dot{y}=By$ 与 $\dot{z}=Sz$.

证明 令 $P(t)=X(t)e^{-Bt}$, $R(t)=X(t)e^{-St}$, 由引理 1.1 可知 P, R 满足所述性质. 证毕.

矩阵 B 的特征值 λ 称为(1.8)的特征指数,而矩阵 $X(T)=e^{BT}$ 的特征值 $\mu=e^{\lambda T}$ 称为(1.8)的特征乘数.如果(1.8)的特征指数均具有非零实部,则称 $x=0$ 为(1.8)的双曲零解.

引理 1.3 周期系统(1.8)有 T 周期解($2T$ 周期解)当且仅当(1.8)以 $\mu=1(\mu=-1)$ 为特征乘数.

证明 首先证明存在整数 k 使 $\lambda+\frac{2k\pi}{T}i$(其中 $i=\sqrt{-1}$)为(1.8)的特征指数当且仅当(1.8)有形如 $e^{\lambda t}p(t)$ 的解,其中 $p(t)\neq0$ 为 T 周期的向量函数.

事实上,若 $e^{\lambda t}p(t)$ 为(1.8)的解,则由引理 1.2 存在 $x_0\neq0$ 使 $e^{\lambda t}p(t)=P(t)e^{Bt}x_0$,将 t 换为 $t+T$ 并由周期性易知

$$P(t)e^{Bt}[e^{BT}-e^{\lambda T}I_n]x_0=0,$$

故有 $\det(e^{BT}-e^{\lambda T}I_n)=0$,因此利用 B 的 Jordan 型易知必存在 B 的特征值 λ',使 $e^{\lambda T}=e^{\lambda' T}$,从而存在整数 k,使 $\lambda+\frac{2k\pi}{T}i=\lambda'$ 为 B 的特征值.反之,设 $\lambda+\frac{2k\pi}{T}i$ 为 B 的特征值,仍利用 B 的 Jordan 型知存在 $x_0\neq0$ 使 $e^{Bt}x_0=e^{\left(\lambda+\frac{2k\pi}{T}i\right)t}x_0$,故解 $e^{\lambda t}\left(e^{\frac{2k\pi i}{T}t}P(t)x_0\right)$ 具有所需要的形式.

现在注意到 $\mu=1(\mu=-1)$ 为(1.8)的特征乘数当且仅当(1.8)以 $\lambda=\frac{2k\pi}{T}i\left(\lambda=\frac{(2k+1)\pi}{T}i\right)$ 为特征指数,其中 k 为某整数.于是由前面所证结论知后者成立当且仅当(1.8)有形如 $p(t)$ 的 T 周期解($e^{\pi it/T}p(t)$ 的 $2T$ 周期解).证毕.

引理 1.4 设 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 为(1.8)的特征乘数,则

$$\mu_1\mu_2\cdots\mu_n=\exp\int_0^T \mathrm{tr}A(t)\mathrm{d}t.$$

证明 由行列式的求导法则可证 $\det X(t)$ 满足一阶微分方程 $\dot{u}=[\mathrm{tr}A(t)]u$,因此有(Liouville 公式)

$$\det X(t) = \exp\int_0^t \mathrm{tr}A(s)\mathrm{d}s.$$

另一方面，$\mu_1\mu_2\cdots\mu_n = \det X(T)$. 由此即得. 证毕.

下面进一步考虑非齐次周期线性系统

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad x \in R^n, \tag{1.9}$$

其中 $A(t)$如前，$f(t)$为连续周期向量函数. 同前，设 $X(t)$为(1.8)的基本解矩阵且 $X(0) = I_n$，则由常数变易公式，(1.9)的通解有下列形式：

$$x(t,x_0) = X(t)x_0 + X(t)\int_0^t X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s. \tag{1.10}$$

令

$$P(x_0) = x(T,x_0) = X(T)\left[x_0 + \int_0^T X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s\right],$$

我们称由上式定义的映射 $P: R^n \to R^n$ 为(1.9)的 Poincaré 映射. 由于(1.9)为周期系统，由解的存在惟一性定理知 $x(t,x_0)$为(1.9)的 T 周期解当且仅当x_0 为 P 的不动点，即 $P(x_0) = x_0$，换句话说，如果 x_0 满足

$$(X^{-1}(T) - I_n)x_0 = \int_0^T X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s, \tag{1.11}$$

则 $x(t,x_0)$为(1.9)的 T 周期解，反之亦然. 方程(1.11)关于 x_0 为代数线性方程，而且当且仅当 $X^{-1}(T) - I_n$ 为非奇异时它有惟一解

$$x_0^* = (X^{-1}(T) - I_n)^{-1}\int_0^T X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s,$$

将上式代入(1.10)可得

$$x(t,x_0^*) = X(t)\Big[(X^{-1}(T) - I_n)^{-1}\int_0^T X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^t X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s\Big]\equiv (Kf)(t). \tag{1.12}$$

引入线性空间 P_T 如下：

$$P_T = \{f:R\to R^n \mid f \text{ 为连续的 } T \text{ 周期向量函数}\},$$

规定 P_T 中数乘为数与向量的乘法，加法为向量函数的加法，又定义范数 $|f|$ 如下：

$$|f| = \sup_{t\in R}\|f(t)\| \equiv \sup_{t\in R}\max_{1\leqslant j\leqslant n}|f_j(t)|,$$

可证 P_T 为 Banach 空间，于是由(1.12)知，如果 $X^{-1}(T)-I_n$ 为可逆矩阵，则 $K:P_T\to P_T$ 为 P_T 上的线性算子. 进一步可证，K 为有界的，即存在与 f 无关的常数 $M>0$，使

$$|Kf|\leqslant M|f|. \tag{1.13}$$

事实上，对(1.9)作 Floquet 变换 $x=P(t)y$ 可得

$$\dot{y} = By + P^{-1}(t)f(t), \tag{1.14}$$

由(1.12)知，(1.14)的惟一 T 周期解可表示为

$$y^*(t) = e^{Bt}\Big[(e^{-BT}-I_n)^{-1}\int_0^T e^{-Bs}P^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^t e^{-Bs}P^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s\Big].$$

注意到 $e^{-BT}=X^{-1}(T)$，$e^{-Bs}P^{-1}(s)=X^{-1}(s)$，由上式知

$$y^*(t+T) = e^{BT}e^{Bt}\Big[(X^{-1}(T)-I_n)^{-1}\int_0^T X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^{t+T}X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s\Big]$$

$$= e^{BT}\Big[y^*(t)+e^{Bt}\int_t^{t+T}X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s\Big]$$

$$= e^{BT}\left[y^*(t) + e^{Bt}\int_0^T X^{-1}(s+t)f(s+t)\mathrm{d}s \right],$$

因为 $y^*(t+T)=y^*(t)$,故有

$$y^*(t) = (e^{-BT} - I_n)^{-1} \cdot e^{Bt}\int_0^T X^{-1}(s+t)f(s+t)\mathrm{d}s,$$

从而得到 Kf 的表达式:

$$(Kf)(t) = P(t)y^*(t) = X(t)(X^{-1}(T) - I_n)$$

$$\cdot \int_0^T X^{-1}(s+t)f(s+t)\mathrm{d}s.$$

现取矩阵范数$|\cdot|$与前面所取的向量范数相容,即对 n 阶矩阵$Q(q_{ij})$,令

$$|Q| = \max_j \sum_{i=1}^n |q_{ij}|,$$

那么,若令

$$M = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^T |X(t)(X^{-1}(T) - I_n)^{-1}X^{-1}(s+t)|\mathrm{d}s,$$

则式(1.13)必成立.

可用类似方法来讨论含参数的线性系统:

$$\dot{x} = \varepsilon[Ax + f(t)], \quad x \in R^n, \tag{1.15}$$

其中 $\varepsilon>0$ 为小参数,$f\in P_T$,A 为 n 阶常矩阵.我们断言,如果 A 可逆,则存在 $\varepsilon_0>0$ 及对 $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 有定义的连续函数 $M(\varepsilon)>0$,使对 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$(1.15)有惟一的 T 周期解 $K_\varepsilon f\in P_T$,且 $K_\varepsilon:P_T\to P_T$ 为线性有界算子,并满足

$$|K_\varepsilon f| \leqslant M(\varepsilon)|f|, \quad K_\varepsilon f = -\frac{1}{T}A^{-1}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t + O(\varepsilon). \tag{1.16}$$

此外,可取

$$M(\varepsilon)=\varepsilon\int_0^T|(e^{-\varepsilon AT}-I_n)^{-1}e^{-\varepsilon As}|\mathrm{d}s.$$

事实上,由(1.13)的推导法,(1.15)的 T 周期解 $K_\varepsilon f$ 惟一存在,且有表达式

$$K_\varepsilon f(t)=\varepsilon(e^{-\varepsilon AT}-I_n)^{-1}\int_0^T e^{-\varepsilon As}f(t+s)\mathrm{d}s. \qquad (1.17)$$

因此

$$|K_\varepsilon f|\leqslant\varepsilon\int_0^T|(e^{-\varepsilon AT}-I_n)^{-1}e^{-\varepsilon As}|\mathrm{d}s\cdot|f|\equiv M(\varepsilon)|f|.$$

由矩阵级数理论知

$$e^{-\varepsilon AT}-I_n=\sum_{k\geqslant1}\frac{(-\varepsilon AT)^k}{k!}=-\varepsilon AT\left[I_n+\sum_{k\geqslant1}\frac{(-\varepsilon AT)^k}{(k+1)!}\right].$$

令

$$L=\sum_{k\geqslant1}\frac{(-\varepsilon AT)^k}{(k+1)!},$$

则由上式知

$$\varepsilon(e^{-\varepsilon AT}-I_n)^{-1}=-\frac{1}{T}(I_n+L)^{-1}A^{-1}. \qquad (1.18)$$

由于当 $\varepsilon T|A|<1$ 时

$$|L|\leqslant\sum_{k\geqslant1}\frac{(\varepsilon|A|T)^k}{(k+1)!}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon T|A|}(e^{\varepsilon T|A|}-1-\varepsilon T|A|)<\varepsilon T|A|,$$

从而

$$\left|\sum_{j\geqslant0}(-1)^jL^j\right|\leqslant\sum_{j\geqslant0}|L|^j<\sum_{j\geqslant0}(\varepsilon T|A|)^j,$$

即

$$|(I_n+L)^{-1}|<\frac{1}{1-\varepsilon T|A|}.$$

因此由(1.18)知当 $\varepsilon T|A|<1$ 时有

$$|\varepsilon(e^{-\varepsilon A}-I_n)^{-1}|<\frac{|A^{-1}|}{T(1-\varepsilon T|A|)}.$$

又由于当 $\varepsilon T|A|<1$ 时

$$\int_0^T|e^{-\varepsilon As}|\mathrm{d}s\leqslant\int_0^T e^{\varepsilon|A|s}\mathrm{d}s=\frac{e^{\varepsilon T|A|}-1}{\varepsilon|A|}<T(1+\varepsilon T|A|),$$

于是由 $M(\varepsilon)$的取法知,当 $\varepsilon T|A|<1$ 时有

$$M(\varepsilon)<\frac{|A^{-1}|(1+\varepsilon T|A|)}{1-\varepsilon T|A|}.\tag{1.19}$$

注意到当 $\varepsilon=0$ 时 $L=0$,由(1.17)与(1.18)即得(1.16).

以后我们将利用(1.13)与(1.16)及压缩映像原理等讨论非线性周期系统的周期解的存在性.

最后指出,如果空间 P_T 中的范数 $|\cdot|$ 另取为 $|f|=\sup\limits_{t\in R}\left(\sum\limits_{i=1}^n f_i^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}$ 或 $|f|=\sup\limits_{t\in R}\sum\limits_{i=1}^n|f_i(t)|$,则相应的相容矩阵范数可取为 $|Q|=\left(\sum\limits_{i,j=1}^n q_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 或 $|Q|=\max\limits_j\sum\limits_{i=1}^n|q_{ij}|$.

§2 隐函数定理与解的分析性质

本节首先叙述微分方程初值解的存在惟一性及其关于初值与参数的光滑依赖性定理,然后叙述描述隐函数性质的压缩映射原理与隐函数定理等,这些定理是动力系统理论十分常用的工具.

2.1 解的分析性质

定义 2.1 设有映射 $f:U\to R^n$,其中 U 为 R^m 中的开集,m,$n\geqslant1$. 设 $x_0\in U$,$r\geqslant1$,r 为自然数,如果 f 的各分量在 x_0 的邻域内有直到 r 阶的各阶偏导数,且这些偏导数在点 x_0 处是连续的,

则称 f 在 x_0 处为 C^r 的，且称

$$Df(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \equiv \frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_m)} \equiv f_x(x_0)$$

为 f 在 x_0 处的导算子；如果 f 的各分量在 x_0 处为解析的(即在 x_0 附近可展成收敛的幂级数)，则称 f 在 x_0 处为解析的．若 f 在 U 中每一点为 C^r(或解析)的，则称 f 在 U 上为 C^r(或解析)的，记为 $f \in C^r(U, R^n)$(或 $f \in C^\omega(U, R^n)$)，有时简记为 $f \in C^r(U)$(或 $f \in C^\omega(U)$)．

现考虑 n 维微分方程

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{2.1}$$

其中 $f: R \times U \to R^n$ 为连续函数，$U \subset R^n$ 为开集．

定义 2.2 如果对任意一点$(t_0, x_0) \in R \times U$，存在 t_0 的邻域 I_0 与 x_0 的邻域 $U_0 \subset U$，及常数 $L = L(t_0, x_0) > 0$，使

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| \leqslant L \| x - y \|, \quad x, y \in U_0, \quad t \in I_0,$$

则称 f 在 $R \times U$ 上关于 $x \in U$ 满足局部 Lipschitz 条件．

利用微分中值定理(见本节定理 2.4)可证，若 f_x 在 $R \times U$ 上存在且连续，则 f 在 $R \times U$ 上关于 $x \in U$ 满足局部 Lipschitz 条件．

利用 Picard 逼近法可证(详见[17]或[117])．

定理 2.1(解的存在性与惟一性) 设 f 在 $R \times U$ 上关于 $x \in U$ 满足局部 Lipschitz 条件，则对任意点$(t_0, x_0) \in R \times U$，存在 $\alpha > 0$，使方程(2.1)有满足 $x(t_0) = x_0$ 的且定义在$(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$上的解 $x(t)$．此外，如果 $y(t)$ 也为(2.1)的满足 $y(t_0) = x_0$ 且定义在$(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$上的解，则在$(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$上有 $y(t) \equiv x(t)$．

由上述定理知解 $x(t)$ 至少在区间$(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$上有定义．进一步设 f 关于 x 在 U 内为 C^1 的，则利用 Gronwall 不等式可证若当 $t \to t_0 + \alpha$ 时 $x(t)$ 有界且不任意接近 U 的边界，则 $x(t)$ 必

趋于 U 中某有限点 x_0'，此时令 $t_0'=t_0+\alpha$，利用定理 2.1 可进一步讨论(2.1)的满足 $x(t_0')=x_0'$ 的解 $x_1(t)$，设其定义在$(t_0'-\alpha',t_0'+\alpha')$上，则有下述 $x(t)$的右向延拓

$$\tilde{x}(t)=\begin{cases}x(t), & t_0-\alpha<t<t_0+\alpha,\\ x_1(t), & t_0+\alpha\leqslant t<t_0'+\alpha'.\end{cases}$$

若当 $t\to t_0'+\alpha'$时$\tilde{x}(t)$趋于 U 中某点，又可讨论 $\tilde{x}(t)$的右向延拓.依此类推可获得 $x(t)$的最大右行延拓 $\bar{x}(t)$，使得 $\bar{x}(t)$在$[t_0,\beta)$上有定义，且当 $t\to\beta-0$ 时 $\bar{x}(t)$或无界或任意趋近 U 的边界.同样讨论可获得 $x(t)$的最大左行延拓.将最大左、右行延拓拼接起来所得的函数 $x^*(t)$称为 $x(t)$的最大延拓，其定义域为开区间(t_1,t_2)，且当 $t\to t_1+0$ 或 $t\to t_2-0$ 时 $x^*(t)$或无界或任意趋近 U 的边界.我们称(t_1,t_2)为 $x^*(t)$的饱和区间，于是有下述定理.

定理 2.2(解的延拓)　设 f 在$R\times U$ 上关于$x\in U$ 为C^1 的，则对任意点$(t_0,x_0)\in R\times U$，方程(2.1)有满足 $x(t_0)=x_0$ 的惟一解 $x(t)$，其定义域为一开区间 $I(t_0,x_0)$.若该区间有一有限端点，则当 t 趋于该两端点时$x(t)$无界或任意趋近 U 的边界.

再考虑含参量的微分方程

$$\dot{x}=f(t,y,\lambda),\tag{2.2}$$

其中 $f:R\times U\times D\to R^n$ 为连续函数，$U\subset R^n$ 为开集，$D\subset R^m$ 为开集，$m,n\geqslant1$.对任意点$(t_0,x_0,\lambda)\in R\times U\times D$，方程(2.2)满足 $x(t_0)=x_0$ 的解记为 $x(t,t_0,x_0,\lambda)$，其饱和区间记为 $I(t_0,x_0,\lambda)$，关于 $x(t,t_0,x_0,\lambda)$的分析性质，我们有下列定理(其证明可见[17]).

定理 2.3(解对初值与参数的光滑依赖性)　设 f 在$R\times U\times D$ 上为C^{r-1}的，$r\geqslant1$，且对每个 $t\in R$，$f(t,\cdot,\cdot):U\times R\to R^n$ 为C^r 的，则 $x(t,t_0,x_0,\lambda)$在区域

$$G = \{(t,t_0,x_0,\lambda) \mid (t_0,x_0,\lambda) \in R \times U \times D, t \in I(t_0,x_0,\lambda)\}$$

上为 C^r 的.如果 f 在 $R \times U \times D$ 上为解析的,则 $x(t,t_0,x_0,\lambda)$ 在 G 上也是解析的,如果 f 对 $(x,\lambda) \in U \times D$ 为 C^k 的,$k \geq r$(或解析的),则 $x(t,t_0,x_0,\lambda)$ 关于 $(x_0,\lambda) \in U \times D$ 为 C^k(或解析)的.

现设(2.1)中 f 不显含 t,则(2.1)成为自治系统

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.3}$$

其中 $f \in C^1(U)$,设(2.3)满足 $x(0) = x$ 的解为 $\varphi(t,x)$,$t \in I(x)$,称 φ 为(2.3)所确定的流,记 $\varphi^t(x) = \varphi(t,x)$.易证在其定义域上成立下列群性质:

$$\varphi^0 = id, \quad \varphi^{-t} = (\varphi^t)^{-1}, \quad \varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s.$$

对每点 $x \in U$,称 U 中的曲线

$$\gamma(x) = \{\varphi(t,x) \mid t \in I(x)\}$$

为(2.3)过点 x 的轨线.若 $\gamma(x) \equiv x$,则必有 $f(x) = 0$,此时 x 为(2.3)的奇点.如果 $\gamma(x) \not\equiv x$,且 $\gamma(x)$ 为 U 中的闭曲线,则称 $\gamma(x)$ 为(2.3)闭轨线或周期轨线,此时必存在 $T>0$ 使 $\varphi(t,x) = \varphi(t+T,x)$.如果 $\gamma(x)$ 既不是一点也不是一条闭曲线,则由解的存在惟一性定理易证 $\gamma(x)$ 必不自交.又由解的延拓定理知,若 $\gamma(x)$ 在 U 中有界,则相应的参数表示 $\varphi(t,x)$ 必对一切 $t \in R$ 有定义.

记

$$\gamma^+(x) = \{\varphi(t,x) \mid t \in I(x), t \geq 0\},$$

$$\gamma^-(x) = \{\varphi(t,x) \mid t \in I(x), t \leq 0\},$$

分别称 $\gamma^+(x)$,$\gamma^-(x)$ 为(2.3)过 x 的正半轨线、负半轨线.可证,若 x 不是(2.3)的奇点,则 $\gamma(x)$ 为(2.3)的周期轨线当且仅当 $\gamma^+(x) = \gamma^-(x) = \gamma(x)$.

2.2 隐函数的存在性与光滑性

为了今后的需要,下面列出非线性分析中的几个定理,它们的证明可见[140]、[13]或[65].

定理 2.4 (微分中值定理) 设 $f:U\to R^n$ 连续,$U\subset R^n$ 为开集,设 $x_0\in U$ 且

$$L=\{x\mid x=x_0+th,0\leqslant t\leqslant 1\}\subset U.$$

若 f 在 L 中每一点为 C^1 的,则

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\int_0^1 Df(x_0+th)h\,\mathrm{d}t,$$

其中右端对向量的定积分等于对其各个分量的定积分.

定义 2.3 设有映射 $T:\overline{U}\times D\to\overline{U}$,其中 $U\subset R^m$ 为开集,$\overline{U}$ 为 U 的闭包,$D\subset R^k$ 为有界集.如果存在 $\theta\in(0,1)$使对一切 $x,y\in\overline{U},\lambda\in D$ 有

$$\|T(x,\lambda)-T(y,\lambda)\|\leqslant\theta\|x-y\|,$$

则称 T 在 $\overline{U}$ 上关于 $\lambda\in D$ 为一致压缩映射.

定理 2.5 (一致压缩原理) 设有连续映射 $T:\overline{U}\times V\times D\to\overline{U}$,其中 $U\in R^m$ 为开集,$V\in R^n$ 为开集,$D\in R^k$ 为有界集.如果 T 在 $\overline{U}$ 上关于$(y,\lambda)\in V\times D$ 为一致压缩映射,且对每个 $\lambda\in D$,$T(\cdot,\cdot,\lambda)\in C^r(\overline{U}\times V)$(或$\in C^\omega(\overline{U}\times V)$),则存在惟一的连续映射 $g:V\times D\to\overline{U}$ 使 $T(g(y,\lambda),y,\lambda)=g(y,\lambda)$成立(即隐函数 $g(y,\lambda)$为 $T(\cdot,y,\lambda)$的不动点),且对每个 $\lambda\in D$,有 $g(\cdot,\lambda)\in C^r(V)$(或$\in C^\omega(V)$).

注 2.1 如果把定理 2.5 中的集合 $\overline{U}$ 换成某 Banach 空间的闭子集,则该定理仍成立.

如前,设 $U\in R^m$,$V\in R^n$ 为开集,又设 $F:U\times V\to R^k$ 为一 C^r 映射,$r\geqslant 1$,对点$(x_0,y_0)\in U\times V$,定义偏导数 $F_x(x_0,y_0)$(或 $F_y(x_0,y_0)$)为函数 $F(x,y_0)$(或 $F(x_0,y)$)在点 $x=x_0$(或 $y=$

y_0)的导数. 易见 $F_x(x_0,y_0)$与 $F_y(x_0,y_0)$分别为 $k\times m$ 阶与$k\times n$ 阶矩阵.

定理 2.6(隐函数定理)　设 C^r 映射 $F: U\times V\to R^m$ 满足 $F(x_0,y_0)=0$,且 $F_x(x_0,y_0)$为 m 阶可逆矩阵,则存在点(x_0,y_0)的邻域 $U_0\times V_0\subset U\times V$ 及惟一的 C^r 函数 $f: V_0\to U_0$ 满足 $f(y_0)=x_0$,使对$(x,y)\in U_0\times V_0$, $F(x,y)=0$ 当且仅当 $x=f(y)$. 如果 F 在$U\times V$ 上为解析的,则 f 在 V_0 上为解析的.

定理 2.7 (Malgrange 预备定理)　设 $U\subset R\times R^n$ 为一开集,$(0,0)\in U$,且存在函数 $f\in C^\infty(U,R)$,满足 $f(t,0)=t^k g(t)$, $g(0)\neq 0$,则存在 $\varepsilon>0$ 及 R^n 中原点的邻域 V 以及 V 上的C^∞ 函数 $a_0(x),\cdots,a_{k-1}(x)$与$(-\varepsilon,\varepsilon)\times V$ 上的 C^∞ 函数 $q(t,x)$,且 $q(0,0)\neq 0$,使

$$q(t,x)f(t,x)=t^k+\sum_{j=0}^{k-1}a_j(x)t^j,\quad t\in(-\varepsilon,\varepsilon),x\in V.$$

推论　在定理 2.7 的条件下函数 $f(t,x)$在$(t,x)\in(-\varepsilon,\varepsilon)\times V$ 中关于t 至多有k 个根,且每个根在 $x=0$ 连续.

证明　令

$$F(z,x)=z^k+\sum_{j=0}^{k-1}a_j(x)z^j,\quad x\in V,$$

则 F 关于复变量z 为多项式. 因为 $a_j(0)=0, j=0,\cdots,k-1$,于是 $F(z,0)=z^k$,且对每个 $\eta>0$ 存在 $\delta(\eta)>0$,使当$|x|<\delta$, $|z|=\eta$ 时有

$$|F(z,x)-F(z,0)|\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}|a_j(x)|\eta^j\leqslant\eta^k=|F(z,0)|,$$

于是利用复变函数论中的 Ruche 定理知,当$|x|<\delta$ 时方程$F(z,x)=0$ 与 $F(z,0)=0$ 在闭圆盘$|z|\leqslant\eta$ 中有相同个数的零点,从而 F 在$|z|\leqslant\eta$ 中恰有k 个根(包括重根)$z_j(x)$, $j=1,\cdots,k$,即有

$$\text{当}|x|<\delta\text{时}\quad |z_j(x)|\leqslant\eta,\quad j=1,\cdots,k.$$

由 η 的任意性可知 $z_j(x)$ 在 $x=0$ 连续. 由于 $f(t,x)$ 关于 t 的实根必是 F 关于 z 的根,即知结论成立.

§3 等价性、稳定流形与中心流形

在§1中,我们对自治的线性系统提出了稳定、不稳定集与中心集的概念,它们都是不变集,且奇点的定性性质由这三个集合来决定. 本节我们对非线性系统给出类似的理论. 首先讨论线性化问题.

3.1 等价性

考虑两个 n 维非线性系统

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \tag{3.1}$$

$$\dot{y} = g(y), \quad y \in R^n, \tag{3.2}$$

其中 $f,g:R^n \to R^n$ 为 C^r 映射, $r \geqslant 1$, 且 $f(0)=g(0)=0$.

定义 3.1 如果存在 C^k 同胚 $h:R^n \to R^n (k \geqslant 0)$ 满足 $h(0)=0$ 且 h 把(3.1)在原点邻域 U 中的轨线映为(3.2)在邻域 $V \equiv h(U)$ 中的轨线且保持轨线的定向,则称(3.1)与(3.2)在原点为局部 C^k 等价的. C^0 等价又称为拓扑等价.

设 φ^t 与 ψ^t 分别表示(3.1)与(3.2)的流,则(3.1)与(3.2)为局部 C^k 等价意味着对每个 $x \in U$ 及 $t \in R$ 存在 $\tau = \tau(t,x)$, 关于 t 为增加函数且

$$\text{当 } \varphi^t(x) \in U \text{ 时} \quad h(\varphi^t(x)) = \psi^\tau(h(x)). \tag{3.3}$$

如果存在 C^r 函数 $\mu = \mu(x)$, $\mu(0) > 0$ 使 $f(x) = \mu(x)g(x)$, 则对任意 $k \geqslant 1$, 方程(3.1)与(3.2)在原点必为 C^k 等价的,且此时可取 h 为恒等映射.

定义 3.2 如果存在 C^k 同胚 $h:R^n \to R^n (k \geqslant 0)$ 满足 $h(0)=0$, 及原点的邻域 U 使(3.3)对 $\tau \equiv t$ 成立,则称(3.1)与(3.2)为局部 C^k 共轭的. C^0 共轭又称为拓扑共轭.

若 $k \geqslant 1$,对(3.1)作 C^k 变换 $y=h(x)$,可把(3.1)化为

$$\dot{y} = Dh(h^{-1}(y))f(h^{-1}(y)).$$

易见(3.1)与上述方程为局部 C^k 共轭的.反之,若(3.1)与(3.2)在 h 下为局部 C^k 共轭的,且 $k \geqslant 1$,则必有关系:

$$g(y) = Dh(h^{-1}(y))f(h^{-1}(y)).$$

考虑(3.1)在原点的线性变分方程

$$\dot{x} = Df(0)x. \tag{3.4}$$

定义 3.3 方程(3.1)在原点的奇点称为双曲奇点(初等奇点),如果该奇点是(3.4)的双曲奇点(初等奇点).

关于(3.1)与(3.4)的局部共轭性,我们有下述 Hartman-Grobman 线性化定理,其证明见[68]、[114] 或[159].

定理 3.1 如果原点为(3.1)的双曲奇点,则(3.1)与(3.4)在原点为局部拓扑共轭的.

由定理 3.1 与定理 1.1 即知成立

定理 3.2 设原点为(3.1)与(3.2)的双曲奇点,则(3.1)与(3.2)在原点为局部拓扑共轭的当且仅当矩阵 $Df(0)$ 与 $Dg(0)$ 的具正实部特征值的个数是一样的.

如果原点是线性系统(3.4)的双曲奇点,且是(3.4)的汇、源、鞍点、焦点或结点,则由定理 3.1,我们可称原点是非线性系统(3.1)的汇、源、鞍点、焦点或结点.然而这些概念并不限于非线性系统的双曲奇点.同样,中心奇点的概念也不限于初等奇点.

例 3.1 考虑二维系统

$$\dot{x} = -x^3, \quad \dot{y} = ay, \quad a \neq 0. \tag{3.5}$$

易知其流如下:

$$\varphi^t(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+2tx^2}}, e^{at}y\right).$$

由此,分 $a<0$ 与 $a>0$ 可做出(3.5)在原点附近的相图如图 3.1 所示.因此当 $a<0(>0)$时原点为(3.5)的稳定结点(鞍点).显然原点不是(3.5)的初等奇点.

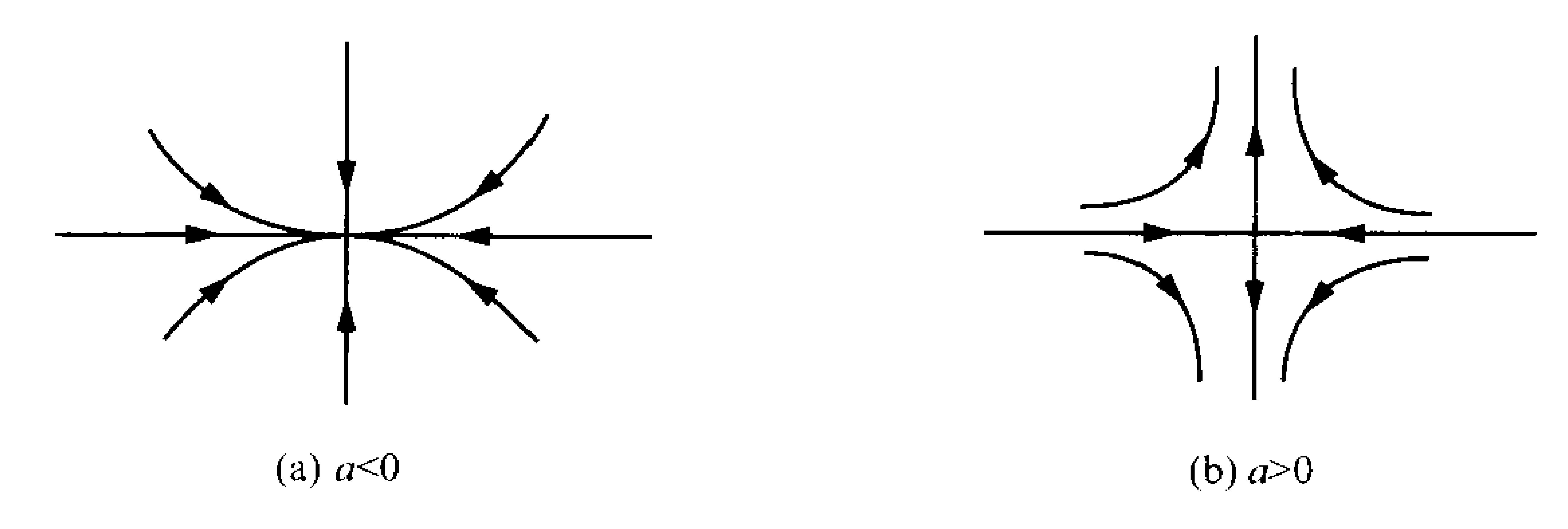


图 3.1

Hardtman-Grobma 定理是由 P. Hartman 与 D. M.Grobman 于 1959 年各自独立建立的.值得指出的是建立(3.1)与(3.4)为局部拓扑共轭的同胚一般不是 C^1 的,即使 f 为解析时也是如此,但当 $Df(0)$的特征值满足一些附加条件时 h 的光滑性可得以提高.例如,Hartman ([67]) 证明,若 f 为 C^2 的,且 $Df(0)$的特征值均具有负实部(或均具有正实部),则 h 为 C^1 的,又若(3.1)为二维系统且原点为其双曲奇点,则 h 为 C^1 的,韩茂安([33])通过考查由 Palis 与 deMelo([114])对 Hartman-Grobman 定理的证明,获得了下述公式:

$$h(x) = x + o(x), \quad |x| \ll 1. \tag{3.6}$$

利用此式可对原点的流形结构做进一步的分析.

3.2 稳定流形与中心流形

由线性化定理可知就拓扑结构而言双曲奇点的局部性质是简单的,然而当考虑到与奇点有关的非局部性质时非线性项的作用是至关重要的,而且许多场合需要知道非线性系统在奇点附近的分析性质.下述定理刻画了非线性系统在双曲奇点附近的轨线的分析性质,其证明可见[121]和[159]等.

定理 3.3(稳定流形定理) 设原点为 C^r 系统(3.1)的双曲奇

点,且 $Df(0)$恰有 $k(\geqslant 0)$个具负实部的特征值(包括重数在内),则存在 k 维局部C^r 稳定流形 W_0^s 与 $n-k$ 维局部C^r 不稳定流形 W_0^u,分别与相应的线性系统(3.4)的稳定集与不稳定集在原点相切,且满足下列性质:

$$\text{当 } t \geqslant 0 \text{ 时 } \varphi^t(W_0^s) \subset W_0^s, \quad \text{当 } x \in W_0^s \text{ 时 } \lim_{t \to +\infty} \varphi^t(x) = 0;$$

$$\text{当 } t \leqslant 0 \text{ 时 } \varphi^t(W_0^u) \subset W_0^u, \quad \text{当 } x \in W_0^u \text{ 时 } \lim_{t \to -\infty} \varphi^t(x) = 0. \tag{3.7}$$

其中 φ^t 表示(3.1)的流.

式(3.7)反映了集合 W_0^s 与 W_0^u 上轨线的稳定性质,特别地,W_0^s 由正半轨线组成,W_0^u 由负半轨线组成.此两集合为 C^r 流形的含义是指它们可分别表示为C^r 类函数的图像.

把 W_0^s 上的正半轨线向负向延伸可得(3.1)在原点的全局稳定流形 W^s,同理,把 W_0^u 上的负半轨线向正向延伸可得(3.1)在原点的全局不稳定流形 W^u,亦即

$$W^s = \bigcup_{t \leqslant 0} \varphi^t(W_0^s), \quad W^u = \bigcup_{t \geqslant 0} \varphi^t(W_0^u).$$

易知,W^s 与 W^u 为不变流形(由(3.1)的整条轨线组成),且仍满足(3.7).事实上,W^s 与 W^u 为满足(3.7)的最大集合.

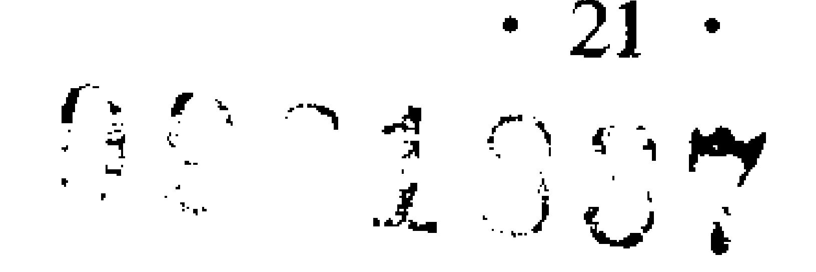
例 3.2 考虑平面系统

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = y + x^2, \tag{3.8}$$

易求得(3.8)的流为

$$\varphi^t(x,y) = \left(xe^{-t}, ye^t + \frac{1}{3}x^2(e^t - e^{-2t})\right).$$

由此知极限 $\lim_{t \to +\infty} \varphi^t(x,y) = 0$ 成立当且仅当点(x,y)满足 $y + \frac{1}{3}x^2 = 0$,于是



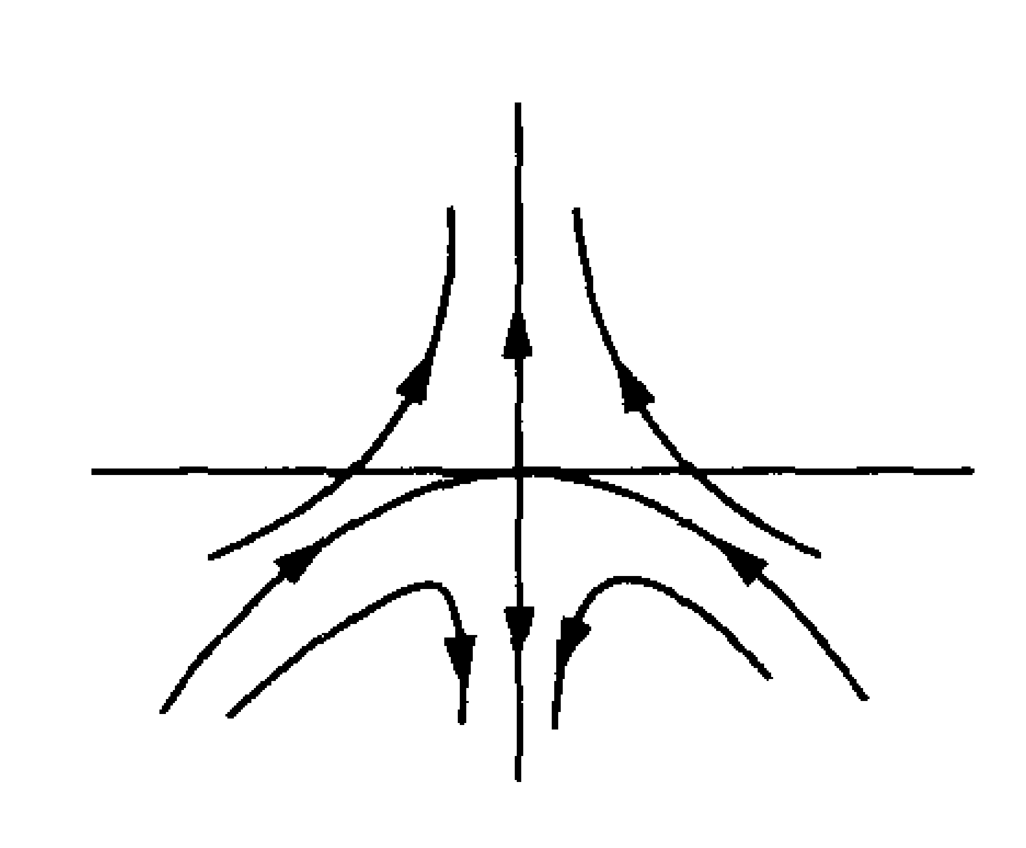


图 3.2 (3.8)的相图

$$W^s = \left\{(x,y) \in R^2 \mid y = -\frac{1}{3}x^2\right\}.$$

类似可得

$$W^u = \{(x,y) \in R^2 \mid x = 0\}.$$

方程(3.8)的相图如图 3.2 所示，其中 W^s 与 W^u 均由两条轨线(即鞍点分界线)和原点组成.

例 3.3 考虑平面系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - x^2, \tag{3.9}$$

令 $H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$，则(3.9)可写成下述形式：

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x,$$

具有这种形式的系统称为 Hamilton 系统，且称 H 为 Hamilton 函数，它是系统的首次积分. 由方程 $H(x,y) = c$（常数）给出的曲线称为系统的等位线. 下面我们分析(3.9)的相图.

设 $L(c)$为(3.9)的由 $H(x,y) = c$ 给出的等位线. 易见(3.9)只有两个奇点(0,0)(为鞍点)与(1,0)，由于 $H(1,0) = -\frac{1}{6}$，且

$$H(x,y) + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}y^2,$$

可见当 $0 < c + \frac{1}{6} \ll 1$ 时方程 $H(x,y) = c$ 在点(1,0)附近定义一条围绕该点的闭曲线 $L_1(c)$，即 $L_1(c) \subset L(c)$，且当 $c \to -\frac{1}{6}$ 时 $L_1(c) \to (1,0) \equiv L_1\left(-\frac{1}{6}\right)$，易知方程 $H(x,y) + \frac{1}{6} = 0$ 定义了一条与直线 $x = -\frac{1}{2}$ 在点 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 相切且位于该直线左侧的三次

曲线 $L_2\left(-\frac{1}{6}\right)$，当 $0<c+\frac{1}{6}\ll 1$ 时方程 $H(x,y)=c$ 定义了一条位于 $L_2\left(-\frac{1}{6}\right)$ 右侧的曲线 $L_2(c)$，当 c 增加时 $L_2(c)$ 右移，而 $L_1(c)$ 扩大. 注意到 $x=0$ 为方程 $H(x,0)=0$ 的二重根，于是当 c 增加到零时 $L_1(c)$ 与 $L_2(c)$ 在 $(0,0)$ 有公共点，且 $L_1(0)$ 可表示为

$$L_1(0): y^2 = x^2\left(1-\frac{2}{3}x\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2},$$

而 $L_2(0)=L_{20}^+ \cup L_{20}^-$，其中

$$L_{20}^{\pm}: y = \pm x\sqrt{1-\frac{2}{3}x}, \quad x \leqslant 0.$$

于是对 $-\frac{1}{6}\leqslant c\leqslant 0$ 有 $L(c)=L_1(c)\cup L_2(c)$. 对 $c>0$，关于 x 轴对称的曲线 $L(c)$ 与 x 轴只有一个交点. 令 $L=L_1(0)-\{(0,0)\}$，则 L 为(3.9)的一条轨线，且正、负两向均趋于鞍点 $(0,0)$，这样的轨道称为(3.9)的同宿轨道. 易见原点的稳定与不稳定流形分别为 $W^s=L_{20}^- \cup L$，$W^u=L_{20}^+ \cup L$，且由以上分析可得(3.9)的相图如图 3.3 所示.

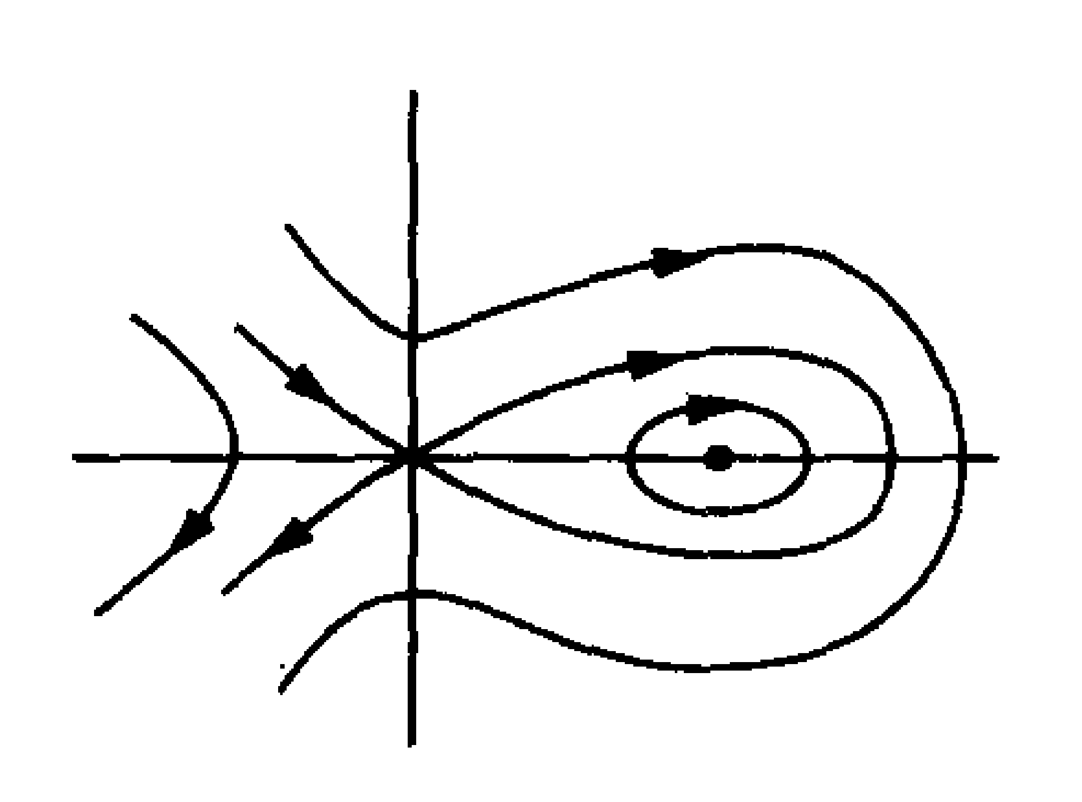


图 3.3 (3.9)的相图

由例 3.2 中方程(3.8)的流的表达式知位于稳定流形 W^s（不稳定流形 W^u）中的所有轨线都正向（负向）指数式地趋于原点. 这一性质对一般系统的双曲奇点也成立. 事实上，利用定理 3.1、式(3.6)及线性流的性质易证：

推论 设定理 3.3 的条件成立，又设 $Df(0)$ 的任一具有负实部的特征值 λ 满足 $\mathrm{Re}\lambda<-\alpha<0$，任一具有正实部的特征值 μ 满足 $\mathrm{Re}\mu>\beta>0$，其中 α 与 β 为两正常数，则存在 $N>0$ 使

$$|\varphi^t(x)| \leqslant Ne^{-\alpha t}, t \geqslant 0, x \in W_0^s,$$

$$|\varphi^t(x)| \leqslant Ne^{\beta t}, t \leqslant 0, x \in W_0^u.$$

如果原点不是(3.1)的双曲奇点,则除了稳定流形与不稳定流形外,(3.1)还有所谓的中心流形,即有下述定理.

定理 3.4(中心流形定理)　设 n 阶矩阵 $Df(0)$ 分别有 k, l 个特征值具有正、负实部(包括重数在内),则在原点邻域内存在 C^r 流形 W_0^s(k 维)、W_0^u(l 维)与 W_0^c($n-k-l$ 维),分别与相应的线性系统(3.4)的稳定集、不稳定集与中心集在原点相切,且具有下列性质:

(1) 式(3.7)对 W_0^s 与 W_0^u 成立;

(2) (局部不变性)对任一点 $x \in W_0^c$,存在 $t_0 > 0$,使当 $|t| < t_0$ 时 $\varphi^t(x) \in W_0^c$.

上述定理中的集合 W_0^s, W_0^u 与 W_0^c 分别称为(3.1)在原点的局部稳定流形、局部不稳定流形与局部中心流形.

中心流形定理是稳定流形定理的直接推广,但其证明却复杂得多. Vanderbauwhede 与 Van Gils ([125])通过发展压缩映射原理获得了定理 3.4 的完整的证明,而由[15]、[43]知,也可用熟知的压缩映射原理来证明这一定理,但技巧性的估计较复杂,Abraham 与 Robbin 及 Kelley A 等也建立了中心流形定理,但只证明了中心流形的 C^{r-1} 光滑性.

不失一般性下设 $Df(0)$ 具有下述形式:

$$Df(0) = \mathrm{diag}(A, B),$$

其中 A 为 $k+l$ 阶矩阵,其特征值均具有非零实部,而 B 为 $n-k-l$ 阶矩阵,其特征值均具有零实部. 又设 $x=(y,z)$, $f(x) = Df(0)x + (g(x), h(x))$, $y, g \in R^{k+l}$,则(3.1)的局部中心流形 W_0^c 可表示为

$$W_0^c = \{(y,z) \mid y = H(z), |z| < \varepsilon_0\},$$

其中 $\varepsilon_0>0$,$H(z)$为某 C^r 类函数,中心流形 W_0^c 上流的性质由下列 $n-k-l$ 维微分方程决定:

$$\dot{z} = Bz + h(H(z), z), \tag{3.10}$$

称(3.10)为(3.1)的约简方程.

因为 W_0^c 具有局部不变性,即以 W_0^c 中任一点$(H(z), z)$为初值的解 $x(t)=(y(t), z(t))$当$|t|$充分小时满足 $y(t)=H(z(t))$,对此式两边关于 t 求导后令 $t=0$ 可得

$$AH(z) + g(H(z), z) - DH(z)[Bz + h(H(z), z)] \equiv 0. \tag{3.11}$$

利用上式可对 H 做近似计算,即可用待定系数法求出 $H(z)$ 关于 z 的展开式的低次项.事实上,我们有下述定理:

定理 3.5(中心流形的估算) 设 $r\geqslant 2$,又设存在 $m>1$ 及函数 $y=\Phi(z)=O(|z|^2)$,对$|z|\ll 1$ 满足

$$A\Phi(z)+ g(\Phi(z), z) - D\Phi(z)[Bz + h(\Phi(z), z)] = O(|z|^m),$$

则

$$H(z) = \Phi(z) + O(|z|^m), \quad |z|\ll 1.$$

这一定理曾由 Carr([9])给出,但 Carr 要求矩阵 A 的特征值均具有负实部,M. Medved([110])放弃了这一条件并证明了上述定理.

注 3.1 尽管局部中心流形 W_0^c 满足(3.11),但 W_0^c 未必惟一存在,甚至(3.1)可能有无穷多个局部中心流形,虽然如此,却可以证明,如果(3.1)为 C^∞ 系统且

$$W_{0i}^c = \{(y, z) | y = H_i(z)\}, \quad i = 1,2$$

为满足(3.11)的(3.1)的两个局部 C^r 中心流形,则对任意自然数 $m\geqslant 1$ 总有

$$|H_1(z) - H_2(z)| = O(|z|^m), \quad |z| \ll 1.$$

此外,C^∞ 系统甚至解析系统也未必有 C^∞ 的局部中心流形.

注 3.2 考虑(3.1)的扰动系统

$$\dot{x} = f(x) + F(x,\varepsilon), \tag{3.12}$$

其中 ε 为向量参数,F 为 C^r 函数,且 $F(x,0)=0$. 将(3.12)与方程(等式)

$$\dot{\varepsilon} = 0 \tag{3.13}$$

联立,并用定理 3.4 可得联立方程的局部 C^r 中心流形 $\widetilde{W}_0^c$. 由(3.13)的形式知此流形与"ε = 常数"的交为(3.12)的局部不变流形,此交在 ε 所在空间的投影,记为 W_ε^c,称为(3.12)的含参数的局部中心流形. 如果

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(f+F,0)}{\partial(x,\varepsilon)}\Big|_{x=\varepsilon=0} = \operatorname{diag}(A,\overline{B}), \\ &Df(0) = \operatorname{diag}(A,B), \end{aligned} \tag{3.14}$$

则由前面的讨论,$\widetilde{W}_0^c$ 与 W_ε^c 可分别表示为

$$\widetilde{W}_0^c = \{(y,z,\varepsilon) \mid y = H(z,\varepsilon), |z| \leqslant \varepsilon_0, |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0\},$$

$$W_\varepsilon^c = \{(y,z) \mid y = H(z,\varepsilon), |z| \leqslant \varepsilon_0, |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0\}.$$

若记 $f+F=Df(0)x+(Q,R)$,则与(3.11)类似,$H(z,\varepsilon)$满足

$$AH + Q(H,z) - H_z(Bz + R(H,z,\varepsilon)) = 0. \tag{3.15}$$

注 3.3 进一步可证(见[13]),(3.12)在原点局部拓扑等价于下述方程:

$$\dot{y} = Ay, \quad \dot{z} = Bz + R(H(z,\varepsilon),z,\varepsilon).$$

如前,称含参数的方程

$$\dot{z} = Bz + R(H(z,\varepsilon),z,\varepsilon) \tag{3.16}$$

为(3.12)的约简方程，而且 W_ε^c 上的流由这一方程确定，方程(3.12)在原点邻域内的奇点与周期轨道的分支与稳定性等都可以从(3.16)来获得.

注 3.4 若设当 $\varepsilon=0$ 时原点为(3.12)的双曲奇点，则由定理3.3的证明过程可以看出(3.12)在原点的稳定与不稳定流形关于参数 ε 也为 C^r 的.

下面我们对一种较简单的情况来分析奇点的分支现象.

设(3.16)为标量方程，则 $B=0$. 设

$$R(H(z,0),z,0) = a_{20}z^2 + o(z^2), \quad a_{20} \neq 0,$$

$$R(H(z,\varepsilon),z,\varepsilon) = a_0(\varepsilon) + a_1(\varepsilon)z + a_2(\varepsilon)z^2 + o(z^2)$$
$$\equiv R^*(z,\varepsilon) \in C^2, \tag{3.17}$$

其中 $a_0(0)=a_1(0)=0, a_2(0)=a_{20}\neq 0$. 由隐函数定理知存在函数 $z=a^*(\varepsilon)=O(\varepsilon)$ 使

$$\frac{\partial R^*}{\partial z}(a^*(\varepsilon),\varepsilon) = 0,$$

于是将函数 R^* 在 $z=a^*(\varepsilon)$ 处展开成 Taylor 公式可得

$$R^*(z,\varepsilon) = a_0^*(\varepsilon) + a_2^*(\varepsilon)[z - a^*(\varepsilon)]^2[1 + o(1)], \tag{3.18}$$

其中

$$a_0^*(\varepsilon) = R^*(a^*(\varepsilon),\varepsilon) = O(\varepsilon),$$

$$a_2^*(\varepsilon) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 R^*}{\partial z^2}(a^*(\varepsilon),\varepsilon) = a_{20} + O(\varepsilon).$$

如果 $a_0^*(\varepsilon)a_{20}>0$，则由(3.18)知 $R^*(z,\varepsilon)\neq 0$，因此(3.16)无奇点，如果 $a_0^*(\varepsilon)=0$，则(3.16)有退化奇点 $z=a_0^*(\varepsilon)$，称其为(3.16)的(二重)鞍结点，如果 $a_0^*(\varepsilon)a_{20}<0$，令

$$z - a_0^*(\varepsilon) = u\sqrt{-a_0^*/a_2^*},$$

由(3.18)知,方程(3.16)成为

$$\dot{u} = \frac{a_0^*}{\sqrt{-a_0^*/a_2^*}}[1 - u^2(1 + Q(u,\varepsilon))],$$

其中 $Q(u,0)=0$,再由隐函数定理可知上述方程恰有两个双曲奇点 $u_i(\varepsilon)=(-1)^i+o(1), i=1,2$,由此得 R^* 的两个单根

$$z_i(\varepsilon) = a_0^*(\varepsilon) + (-1)^i\sqrt{-a_0^*/a_2^*}(1 + o(1)), \quad i = 1,2,$$

于是证明了下述结果.

定理 3.6 (鞍结点分支)设 C^r $(r\geqslant 2)$系统(3.16)满足(3.17),且 $B=0$,则存在函数 $\Delta(\varepsilon)=a_0^*(\varepsilon)a_{20}=O(\varepsilon)$,使对充分小的$|\varepsilon|$,当 $\Delta(\varepsilon)<(=,>)0$ 时方程(3.16)在原点附近恰有两个双曲奇点(一个鞍结点,没有奇点).

例 3.4 考虑含参数的二次系统

$$\dot{y} = -y + \varepsilon, \quad \dot{z} = y^2 + z^2 + \varepsilon, \tag{3.19}$$

将(3.19)与(3.13)联立所得的三维系统在原点的线性变分方程的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

它不具有(3.14)的形式,因此对(3.19)不能直接利用定理 3.5 来计算求局部中心流形,作变换 $u=y-\varepsilon$,则(3.19)成为

$$\dot{u} = -u, \dot{z} = z^2 + u^2 + 2\varepsilon u + \varepsilon + \varepsilon^2, \tag{3.20}$$

由(3.20)与(3.13)所得的联立方程在原点的线性变分方程之系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\left(-1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

已具有(3.14)的形式. 利用 $H(z,\varepsilon)$ 所满足的方程(3.15)知(3.20)的局部中心流形为 $u=0$,因此由注 3.3 知(3.20)局部等价于

$$\dot{u} = -u, \quad \dot{z} = z^2 + \varepsilon + \varepsilon^2,$$

由此知对充分小的 $|\varepsilon|$,当 $\varepsilon<0$ 时原方程(3.19)在原点邻域内有两个双曲奇点(一个为鞍点,一个为结点),当 $\varepsilon=0$ 时此两个奇点合并成为一个鞍结点,当 $\varepsilon>0$ 时鞍结点消失而没有任何奇点.

例 3.5 考虑方程

$$\dot{y} = -y + y^2 - z^2, \quad \dot{z} = \varepsilon z - z^3 + yz. \tag{3.21}$$

易知(3.14)满足,于是设

$$y = H(z,\varepsilon) = a_0(\varepsilon) + a_1(\varepsilon)z + a_2(\varepsilon)z^2 + O(z^3),$$

利用(3.15)可求得

$$a_0(\varepsilon) = a_1(\varepsilon) = 0, \quad a_2(\varepsilon) = \frac{-1}{1+2\varepsilon}.$$

于是由注 3.3,(3.21)局部等价于

$$\dot{y} = -y, \quad \dot{z} = \varepsilon z - \left(1 + \frac{1}{1+2\varepsilon}\right)z^3 + O(z^4). \tag{3.22}$$

通过分析(3.22)的第二个方程的奇点可知,当 $\varepsilon<0$ 时原点为(3.22)的双曲奇点且是个汇,当 $\varepsilon=0$ 时原点为(3.22)的非双曲奇点,也是个汇,当 $\varepsilon>0$ 时(3.22)在轴上有三个双曲奇点,其中一个为鞍点(原点),两个为汇,如图 3.4 所示.

如果简约方程(3.16)为平面系统,且当 $\varepsilon=0$ 时原点为其细焦点,则当 $|\varepsilon|$ 充分小时(3.16)在原点邻域内可以存在周期轨线. 这

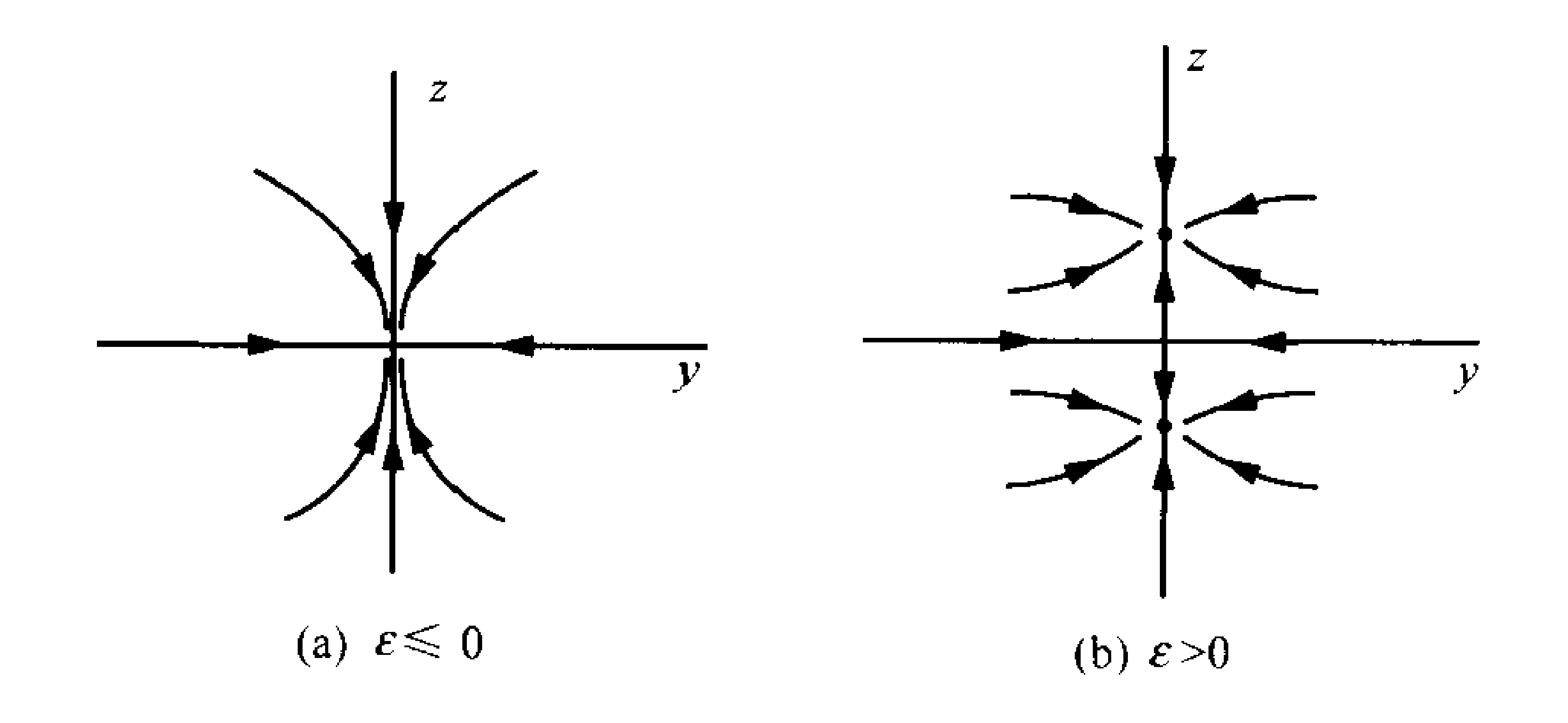


图 3.4　方程(3.22)的局部相图

方面的讨论将在以后进行.

§4　稳定性与 Liapunov 函数

由稳定流形定理,对自治系统的双曲奇点的稳定性质已有清楚的了解,例如,汇附近任一点的正半轨线总是在汇附近而且正向指数式地趋于这一奇点,亦即汇是"渐近稳定"的.本节引入有关 Liapunov 稳定性的一些概念,及判别稳定性的 Liapunov 型定理,然后采用定性分析方法讨论有实际背景的 Liénard 方程奇点的稳定性.

4.1　稳定性的基本概念与定理

考虑 n 维系统

$$\dot{x} = f(t,x), \tag{4.1}$$

其中 $f, f_x \in C(R_+ \times U)$, $R_+ = [0,\infty)$, $U \subset R^n$ 为一连通开集.

定义 4.1　设 $\psi: R_+ \to U$ 为(4.1)的一个解.如果对任意 $\varepsilon > 0$ 与 $t_0 \geqslant 0$,存在 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ 使对满足 $|x_0 - \psi(t_0)| < \delta(\varepsilon, t_0)$ 的所有 x_0,(4.1)过点 (t_0, x_0) 的解 $\varphi(t, t_0, x_0)$ 在 $[t_0, \infty)$ 上有定义,且当 $t > t_0$ 时 $|\varphi(t, t_0, x_0) - \psi(t)| < \varepsilon$,则称解 ψ 为 Liapunov 稳定的,简称为稳定的.如果可取得 $\delta(\varepsilon, t_0) = \delta(\varepsilon)$ 与 t_0 无

关,则称解 ψ 为一致稳定的.

定义 4.2 如果对任何 $t_0 \geq 0$,存在 $\eta(t_0) > 0$,使当 $|x_0 - \psi(t_0)| < \eta(t_0)$时有

$$\lim_{t \to +\infty} |\varphi(t, t_0, x_0) - \psi(t)| = 0, \tag{4.2}$$

则称解 $\psi: R_+ \to U$ 为吸引的.如果可取得 $\eta(t_0) = \eta$ 与 t_0 无关,且式(4.2)关于(t_0, x_0)一致地成立,则称解 ψ 为一致吸引的.

定义 4.3 如果解 ψ 为稳定的且是吸引的,则称其为渐近稳定的;如果 ψ 为一致稳定的且是一致吸引的,则称其为一致渐近稳定的.

定义 4.4 设 $\psi: R_+ \to U$ 为(4.1)的解且是吸引的.令

$$B(t_0) = \{x_0 \in U \mid \lim_{t \to +\infty} |\varphi(t, t_0, x_0) - \psi(t)| = 0\},$$

称集合 $B(t_0)$为 ψ 在时刻 t_0 的吸引域;如果对一切 $t_0 \geq 0$ 有 $B(t_0) = U = R^n$,则称 ψ 为全局吸引的;如果 ψ 是稳定的且是全局吸引的,则称 ψ 为全局渐近稳定的.

对自治或周期系统成立下述定理.

定理 4.1(Yoshizawa) 如果(4.1)为自治系统或周期系统(即 f 关于 t 为周期函数),且 $f(t, 0) \equiv 0$,则零解 $x = 0$ 为稳定的(渐近稳定的)当且仅当它是一致稳定(一致渐近稳定)的.

由稳定流形定理和线性化定理知

定理 4.2 任何 C^1 自治系统的双曲奇点是渐近稳定的当且仅当该奇点是汇.

下面我们介绍判定自治系统的奇点是否是汇的 Routh-Hurwitz 准则.考虑 n 次实系数多项式

$$p(v) = a_n v^n + a_{n-1} v^{n-1} + \cdots + a_1 v + a_0, \tag{4.3}$$

其中 $n \geq 1, a_n > 0$.引入 n 阶矩阵如下:

$$H_p = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \cdots & a_n \end{bmatrix},$$

其中当 $k>n$ 时 $a_k=0$，又用 Δ_j 表示 H_p 的 j 阶主子式，$j=1,\cdots,n-1$，例如

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},$$

则有下述定理.

定理 4.3 由(4.3)给出的多项式 $p(v)$ 关于 v 的根均具有负实部当且仅当 $a_k>0, k=0,1,\cdots,n$，及 $\Delta_j>0, j=2,\cdots,n-1$.

下列两个定理是由 Liapunov 早在 1892 年建立的经典结果.

定理 4.4 设 $f(t,0)=0$，U 包含原点，且存在 C^1 函数 V: $R_+\times U\to R$ 且 $V(t,0)=0$，使对 $(t,x)\in R_+\times U$ 有

(1) $V(t,x)\geqslant h(|x|)$，其中 h 为严格增加的连续函数且 $h(0)=0$;

(2) $\dot{V}_{(4.1)}(t,x)\leqslant 0$，其中 $\dot{V}_{(4.1)}$ 为 V 关于(4.1)的全导数，即

$$\dot{V}_{(4.1)}(t,x) = V_t(t,x) + V_x(t,x)\cdot f(t,x),$$

则(4.1)的零解为稳定的.

定理 4.5 设 $f(t,0)=0$，U 包含原点，且存在 C^1 函数 V: $R\times U\to R$ 使对 $(t,x)\in R\times U$ 有

(1) $h_1(|x|)\leqslant V(t,x)\leqslant h_2(|x|)$;

(2) $\dot{V}_{(4.1)}(t,x)\leqslant -h_3(|x|)$,

其中 h_j 为严格增加的连续函数，且 $h_j(0)=0$，$j=1,2,3$，则(4.1)的零解为一致渐近稳定的.

上述三个定理的证明可见[19]，其中后两个定理请读者自行

给出. 满足定理 4.4 与 4.5 中条件的函数 V 称为 Liapunov 函数.

若(4.1)为自治系统,定理 4.5 的条件(2)可适当减弱,例如 Barbashin-Krasobskij 于 1952 年给出了下述改进.

定理 4.6 设(4.1)为自治系统,即 $f(t,x)=f(x)$不显含 t, $f(0)=0$, U 包含原点,又设存在 C^1 函数 $V: U\to R$ 及 $\varepsilon>0$ 使得对 $|x|\leqslant\varepsilon$ 有

(1) $h_1(|x|)\leqslant V(x)\leqslant h_2(|x|)$,其中 h_j 为严格增加的连续函数且 $h_j(0)=0, j=1,2$;

(2) $\dot{V}=V_x\cdot f(x)\leqslant 0$ 且集合 $\{x\,|\,V_x\cdot f(x)=0, 0<|x|\leqslant\varepsilon\}$ 不包含任何正半轨,则原点为渐近稳定的.

例 4.1 设 $V: R\to R$ 为 C^2 函数且 $V(0)=V_x(0)=0$,考虑下述 n 维梯度系统:

$$\dot{x}=-\operatorname{grad}V(x). \tag{4.4}$$

可证:如果当 $0<|x|\ll 1$ 时 $V(x)>0$, $|\operatorname{grad}V(x)|>0$,则原点为(4.4)的渐近稳定奇点. 如果对一切 $|x|>0$ 有 $V(x)>0$, $|\operatorname{grad}V(x)|>0$,且 $\lim\limits_{|x|\to\infty}V(x)=\infty$,则原点为全局渐近稳定的.

事实上,易知

$$\dot{V}_{(4.4)}=-|\operatorname{grad}V(x)|^2,$$

因此,由定理 4.6,为证前一结论,只须证明存在连续的严格增加函数 h_1 与 h_2,使对充分小的$|x|$有 $h_1(|x|)\leqslant V(x)\leqslant h_2(|x|)$. 设 $c>0$ 充分小,则方程 $V(x)=c$ 在原点附近定义了包围原点的闭曲面 $L(c)$,令

$$r_1(c)=\max\{|x|: x\in L(c)\},$$

$$r_2(c)=\min\{|x|: x\in L(c)\}.$$

由于 $L(c)$为一族不交的球面,因此 $r_1(c)$与 $r_2(c)$关于 $c>0$ 为严格增加的,且 $r_1(c)\geqslant r_2(c)>0$, $\lim\limits_{c\to 0}r_j(c)=0, j=1,2$. 于是对一

切$|x|\ll 1$有

$$r_2(V(x))\leqslant |x|\leqslant r_1(V(x)),$$

由此,取h_j为r_j的反函数即得$h_1(|x|)\leqslant V(x)\leqslant h_2(|x|)$. 从而第一个结论得证. 下证后一结论. 设$x(t)$为(4.4)的任一解,由假设知$[V(x(t))]'_t=\dot{V}_{(4.1)}(x(t))<0$,故当$t\to+\infty$时$V(x(t))$趋于某定值$V_1$,令$V_0=V(x(0))$,则对一切$t\geqslant 0$有$V_1\leqslant V(x(t))\leqslant V_0$. 若$V_1>0$,则

$$\min\{|\operatorname{grad}V(x)|^2: V_1\leqslant V(x)\leqslant V_0\}\equiv\varepsilon>0,$$

于是对一切$t\geqslant 0$必有$[V(x(t))]'_t\leqslant-\varepsilon<0$,由此知当$t\to+\infty$时$V(x(t))\to-\infty$,矛盾. 故必有$\lim\limits_{t\to+\infty}V(x(t))=0$. 因为$\lim\limits_{|x|\to\infty}V(x)=\infty$,解$x(t)$必正向有界,从而可证$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$. 于是原点为全局渐近稳定的.

例 4.2 考虑 Liénard 方程

$$\dot{x}=y-F(x),\quad \dot{y}=-g(x), \tag{4.5}$$

可证若F与g为C^1函数且当$|x|>0$充分小时$xg(x)>0$, $xF(x)>0$,则原点为(4.5)的渐近稳定奇点.

事实上,令

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+G(x),\quad G(x)=\int_0^x g(u)\mathrm{d}u,$$

则对$x^2+y^2\ll 1$且$x\neq 0$有

$$\dot{V}_{(4.5)}=-g(x)F(x)<0,$$

因此仿例4.1,利用定理4.6即得结论.

从以上两例,我们知道定理4.6是判定奇点稳定性的强有力工具,然而由于 Liapunov 函数不易寻求,这种方法也有局限性. 例如,若函数F不满足$xF(x)>0$,则无法利用初等的 Liapunov 函数来讨论(4.5)在原点的稳定性. 以下我们采用定性分析方法来进

一步讨论(4.5)的奇点稳定性问题.

4.2 Liénard 方程奇点的稳定性

我们采用从简单到一般的过程来讨论.首先,极易证明对线性方程

$$\dot{x} = y - ax, \quad \dot{y} = -x, \tag{4.6}$$

成立

引理 4.1 当 $a=0$ 时原点为(4.6)的中心,当 $0<|a|<2$ 时原点为(4.6)的焦点,当 $|a|\geqslant 2$ 时原点为结点,此外当 $a>0(<0)$ 时原点为稳定(不稳定)的.

进一步考虑方程

$$\dot{x} = y - F(x), \quad \dot{y} = -x, \tag{4.7}$$

其中 F 为连续函数,$F(0)=0$,且当 $x\neq 0$ 时 F 为 C^1 的.首先指出,(4.7)过任一常点都存在惟一解.事实上,任取点 $(x_0, y_0)\neq(0,0)$,若 $x_0\neq 0$,则由解的存在惟一性定理即得,若 $x_0=0, y_0\neq 0$,则在 $(0,y_0)$ 的附近(4.7)可写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-x}{y - F(x)} \equiv f(x,y),$$

且 f 在 $(0,y_0)$ 附近连续,关于 y 为 C^∞ 的,从而又由解的存在惟一性定理知过 $(0,y_0)$ 有惟一解 $y=y^*(x)\in C^1$ 且 $y^*(0)=y_0$,代入(4.7)的第一个方程,并由分离变量积分法知方程 $\dot{x}=y^*(x)-F(x)$ 有满足 $x(0)=0$ 的惟一解 $x(t)$,于是令 $y(t)=y^*(x(t))$,即得所求惟一解 $(x(t),y(t))$.

设 $\gamma^+(A)$ 表示(4.7)过点 $A(0,y_0)$ 的正半轨,则有

引理 4.2 下列结论对(4.7)成立

(1) 若对 $0\leqslant x\ll 1$ 有 $F(x)\geqslant ax$, $a>-2$,则当 $0<y_0\ll 1$ 时 $\gamma^+(A)$ 必在原点附近与负 y 轴相交或进入原点;

(2) 若对 $0\leqslant x\ll 1$ 有 $F(x)\leqslant -2x+x^\alpha$, $\alpha>1$,则当 $0<y_0\ll$

1 时 $\gamma^+(A)$必在原点附近不与负 y 轴相交；

(3) 若对 $0<-x\ll 1$ 有 $F(x)\leqslant -ax, a<2$，则当 $0<-y_0\ll 1$ 时 $\gamma^+(A)$必在原点附近与 y 轴相交或进入原点；

(4) 若对 $0<-x\ll 1$ 有 $F(x)\geqslant -2x-|x|^\alpha, \alpha>1$，则当 $0<-y_0\ll 1$ 时 $\gamma^+(A)$必在原点附近不与 y 轴相交.

证明 由于类似性，只以(1)、(2)为例证之. 先证(1). 因为 $a>-2$，由引理 4.1 知原点为(4.6)的焦点或稳定结点，故当 $0<y_0\ll 1$ 时(4.6)过点 A 的正半轨 $\gamma_0^+(A)$在原点附近与负轴相交于某点 B 或进入原点(此时可取 $B=0$). 在轨线段 AB 上任取(常点)(x,y)，则 $\gamma_0^+(A)$在该点的内法向为 $\omega_1=(-x, ax-y)$，而方程(4.7)在该点的向量场方向为 $\omega_2=(y-F(x),-x)$，于是 ω_1 与 ω_2 的内积为 $\omega_1\cdot\omega_2=x[F(x)-ax]\geqslant 0$，由此知方程(4.7)从弧 AB 上任一点出发的轨线必进入该弧左侧，从而 $\gamma^+(A)$必在 $\gamma_0^+(A)$的左侧与负 y 轴相交或进入原点(这一结论也可将(4.6)与(4.7)写成以 y 为自变量的一维方程的形式然后利用常微分方程的比较定理来证得)，如图 4.1(a)所示.

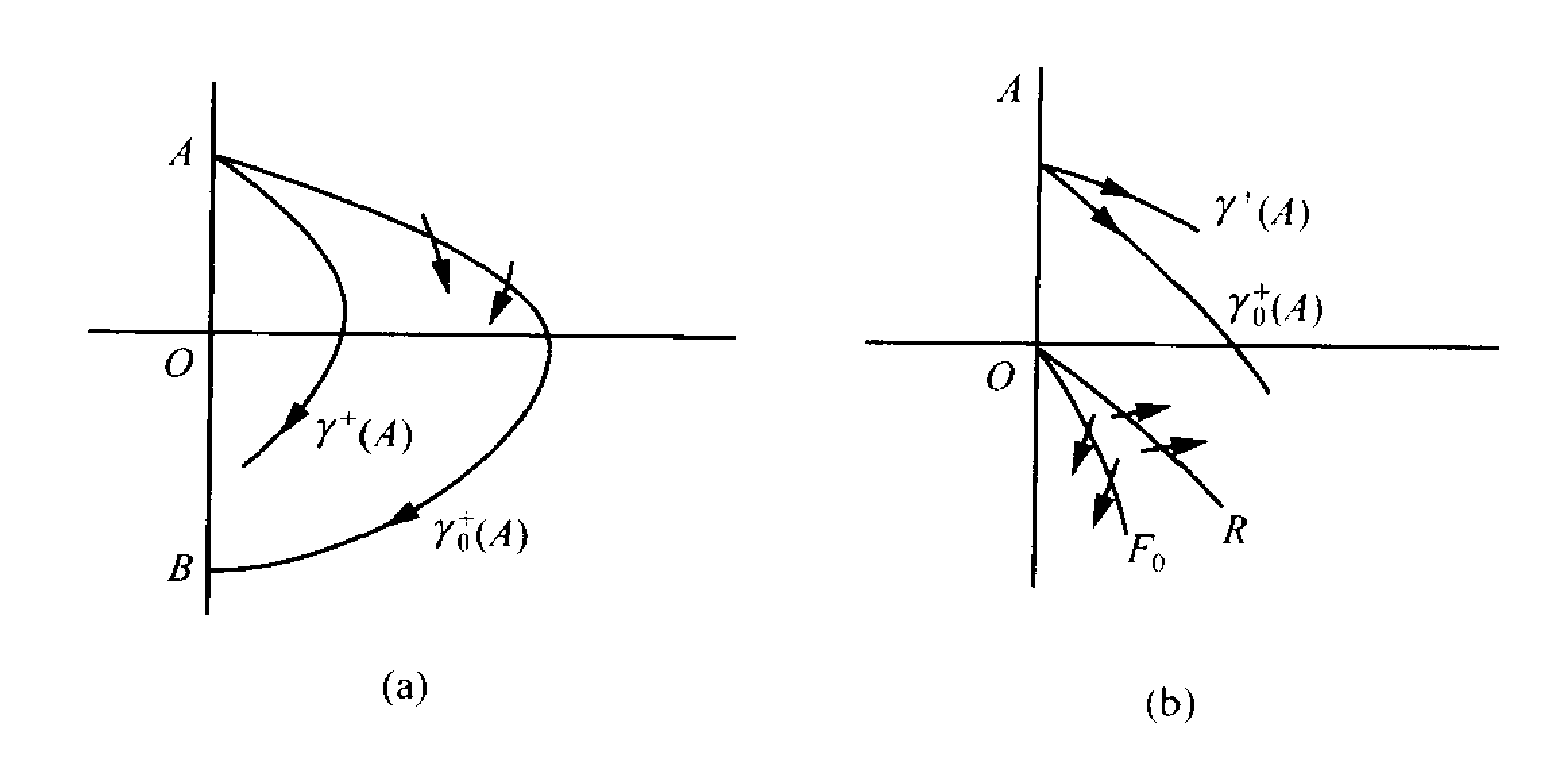


图 4.1

次证(2). 只须证当 $0<x\ll 1$ 时从点$(x,F(x))$出发的轨线的负半轨必在原点附近进入原点. 由所设条件及比较轨线的方法，只

须证这一结论对方程

$$\dot{x} = y - (-2x + x^{\alpha}), \quad \dot{y} = -x \tag{4.8}$$

成立. 令 $F_0(x) = -2x + x^{\alpha}, R(x) = -x - x^{\beta}$, 其中 $\beta > 1$ 待定. 由比较定理, 只须证存在 $\beta > 1$, 使当 $0 < x \ll 1$ 且 $y = R(x)$ 时有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{(4.8)} > R'(x)$$

(参考图 4.1(b)), 易知上式等价于

$$0 > (1-\beta)x^{\beta} + x^{\alpha} - \beta x^{\beta-1}(x^{\beta} + x^{\alpha}),$$

由此知, 只要取 $1 < \beta < \alpha$ 即可, 例如 $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + 1)$. 证毕.

关于(4.7)在原点的稳定性有下列定理:

定理 4.7 设 F 为连续函数, $F(0) = 0$, 且对 $x \neq 0$, F 为 C^1 的, 则

(1) 若存在 $\alpha > 1$, 使当 $0 < x \ll 1$ 时 $F(x) \leqslant -2x + x^{\alpha}$; 或当 $0 < -x \ll 1$ 时 $F(x) \geqslant -2x - |x|^{\alpha}$, 则原点是(4.7)的不稳定奇点.

(2) 若存在 $a < 2$, 使当 $0 < x \ll 1$ 时 $F(x) \geqslant -ax$; 当 $0 < -x \ll 1$ 时 $F(x) \leqslant -ax$, 且当 $0 < x \ll 1$ 时 $F(-x) - F(x) < 0$, 则原点是(4.7)的渐近稳定奇点.

证明 由引理 4.2 的结论(2)与(4)即得定理的结论(1). 往证结论(2)成立. 固定 $0 < y_0 \ll 1$, 考虑(4.7)过点 $A(0, y_0)$ 的正半轨 $\gamma^+(A)$. 要证 $\gamma^+(A)$ 必恒在原点附近且趋于原点. 若 $\gamma^+(A)$ 在右半平面沿某方向趋于原点, 则结论已证. 故由引理 4.2 可设 $\gamma^+(A)$ 与负 y 轴有交点 $B \neq 0$. 若 $\gamma^+(A)$ 经 B 后在左半平面进入原点, 则结论已证. 因此由引理 4.2 又可设 $\gamma^+(A)$ 继 B 之后又与正 y 轴交于某点 C, 现在只要证点 C 位于 A 之下即可.

在(4.7)中令 $u = -x$; $t \to -t$ 可得

$$\dot{u} = y - F(-u), \quad \dot{y} = -u,$$

显见，轨线段 BC 关于 y 轴的对称线（记为 L'）是上述方程的轨线. 于是利用引理 4.2 的证明所用的通过取内积来比较轨线的方法或对方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{y - F(x)}{-x} \equiv f_1(x, y)$$

与

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{y - F(-u)}{-u} \equiv f_2(u, y)$$

利用比较定理（因为 $f_1(x,y) - f_2(x,y) = -[F(-x) - F(x)]/x$）可证 L' 必位于弧 AB 的左侧且点 C 位于点 A 之下方. 证毕.

由上述证明易得

推论 4.1 设存在常数 $a<2$，使当 $0<x\ll1$ 时

$$-ax \leqslant F(x) = F(-x) \leqslant ax,$$

则原点为(4.7)的中心奇点.

现考虑较一般的方程(4.5)的奇点的稳定性.

定理 4.8 设 F, g 为连续函数，且 F 对 $x\neq0$ 为 C^1 的.

(1) 若存在 $r>\frac{1}{2}$ 使当 $0<x\ll1$ 时 $F(x)\leqslant-\sqrt{8G(x)}+[G(x)]^r$；或当 $0<-x\ll1$ 时 $F(x)\geqslant\sqrt{8G(x)}-[G(x)]^r$，其中 $G(x)=\int_0^x g(u)\mathrm{d}u$，则原点为(4.5)的不稳定奇点.

(2) 若存在 $a<\sqrt{8}$ 使当 $0<x\ll1$ 时 $F(x)\geqslant-a\sqrt{G(x)}$；当 $0<-x\ll1$ 时 $F(x)\leqslant a\sqrt{G(x)}$，且当 $0<x\ll1$ 时 $F(\alpha(x))-F(x)<0$，其中 $\alpha(x)$ 满足 $G(\alpha(x))=G(x)$，$x\alpha(x)<0 (x\neq0)$，则原点为(4.5)的渐近稳定奇点.

(3) 若存在 $a<\sqrt{8}$ 使对 $|x|\ll1$ 有 $|F(x)|\leqslant a\sqrt{G(x)}$，且当 $0<x\ll1$ 时

$$F(\alpha(x)) - F(x) \equiv 0(<0, >0),$$

则原点为(4.5)的中心奇点(稳定焦点,不稳定焦点).

证明 令 $u=\sqrt{2G(x)}\operatorname{sgn}x$,其反函数记为 $x=X(u)$,则由(4.5)可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{g(X(u))}{u}[y-F^*(u)],$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-g(X(u)),$$

其中 $F^*(u)=F(X(u))$.进一步令 $\mathrm{d}\tau=\frac{g(X(u))}{u}\mathrm{d}t\ (u\neq 0)$,可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}=y-F^*(u),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=-u,$$

对上述方程利用定理 4.7 及推论 4.1 即得结论.证毕.

上述定理的第一个结论源自[65],而后两个结论则属于 Filippov(见[131]).

本章习题给出了有关 Liénard 方程奇点性质的进一步结果,有关 Liénard 方程及其推广形式的极限环的存在性、惟一性及解的有界性等全局性质的定性研究可参看[131,138]、[145],[65]及[106]等.关于函数 $F(\alpha(x))-F(x)$ 的符号判定我们将在以后做详细讨论,此处我们只给出较常用的几个公式(见[65]).

设

$$G(x)=G_2x^2+G_3x^3+G_4x^4+G_5x^5+\cdots,\quad G_2>0,$$
$$F(x)=F_1x+F_2x^2+F_3x^3+F_4x^4+F_5x^5+\cdots, \tag{4.9}$$

则

$$\alpha(x) = -x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 + \cdots,$$

$$F(\alpha(x)) - F(x) = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + \cdots,$$

其中

$$\alpha_2 = -G_3/G_2, \alpha_3 = -(G_3/G_2)^2,$$

$$\alpha_4 = -\frac{1}{G_2}[2\alpha_2\alpha_3 G_2 + 2\alpha_2 G_4 + G_5],$$

$$\alpha_5 = -\frac{1}{G_2}[-\alpha_3(\alpha_4 + 2)G_3 + 4\alpha_3 G_4 - 2\alpha_2 G_5], \tag{4.10}$$

$$A_1 = -2F_1, A_2 = \alpha_2 F_1, A_3 = -2F_3 - 2\alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_1,$$

$$A_4 = (\alpha_2^2 - 2\alpha_3)F_2 + 3\alpha_2 F_3 + \alpha_4 F_1,$$

$$A_5 = -2F_5 + 2F_2(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_4) + 3F_3(\alpha_3 - \alpha_2^2) - 4\alpha_2 F_4 + \alpha_5 F_1.$$

于是有

推论 4.2 设(4.9)成立,若 $A_1<0$ (>0)或 $A_1=0, A_3<0$ (>0)或 $A_1=A_3=0, A_5<0$(>0),则原点是(4.5)的稳定(不稳定)焦点.

例 4.3 考虑四次 Liénard 方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - [a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4], \\ \dot{y} &= -(x + bx^2), \end{aligned} \tag{4.11}$$

利用公式(4.10)易算得 $A_1 = -2a_1$, 当 $A_1 = 0$ 时 $A_3 = 2\left[\frac{2}{3}a_2 b - a_3\right]$,当 $A_1 = A_3 = 0$ 时 $A_5 = \frac{8}{3}a_4 b$. 又易知当 $A_1 = A_3 = A_5 = 0$ 时有 $F(x) = 2a_2 G(x)$,故由定理 4.8(3)知此时原点为(4.11)的中心. 于是可知原点为(4.11)的中心当且仅当

$$a_1 = 0, \quad a_3 = \frac{2}{3}a_2 b, \quad a_4 b = 0.$$

§5 指标理论与平面高次奇点

奇点指标是刻画平面(高次)奇点性质的重要量. 在本节我们对平面系统的孤立奇点引入指标的概念,并介绍指标的计算公式,对平面高次奇点(包括无穷远奇点),我们给出几个常用的判定定理. 我们侧重于方法与应用,因此所述定理不加证明. 有兴趣的读者可参考[145],[68]及[117]等.

5.1 指标概念与公式

设有连续向量函数 $f: R^2 \mapsto R^2$ 和分段光滑的简单闭曲线 $C \subset R^2$,设 f 在 C 上无奇点,即对 C 中任一点 P 有 $f(P) \neq 0$,于是向量 $f(P)$ 与正横轴有交角 $\theta_f(P)$. 设 P 在 C 上从某点 P_0 开始按逆时针方向变动一周并回到 P_0,则 $\theta_f(P)$ 有改变量 $\Delta\theta_f$,该量必是 2π 的整数倍. 我们称 $\Delta\theta_f/(2\pi)$ 为闭曲线 C 关于向量场 f 的指标,记为 $I_f(C)$. 如果 $f=(g,h)$ 在 C 上为 C^1 的,注意到 $\theta_f(P) = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{h(P)}{g(P)}$,可知

$$\begin{aligned} I_f(C) &= \frac{1}{2\pi}\oint_C \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\oint_C \mathrm{d}\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{h(P)}{g(P)} \\ &= \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{g\mathrm{d}h - h\mathrm{d}g}{g^2 + h^2}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

下列两个引理给出了指标的性质.

引理 5.1 设 C_1 与 C_2 为两个分段光滑的闭曲线,如果 C_1 可以通过连续变形成为 C_2 而不途经 f 的任何奇点,则 $I_f(C_1) = I_f(C_2)$.

引理 5.2 设 C 为分段光滑的简单闭曲线,f 与 F 为两个在 C 上无奇点的连续向量场. 如果对一切 $x \in C$ 有 $f(x) \neq -F(x)$,

则 $I_f(C)=I_F(C)$.

又可证下列结论:(i)如果 C 为由 f 确定的微分方程

$$\dot{x} = f(x) \tag{5.2}$$

的闭轨线,则 $I_f(C)=1$;(ii)如果 f 在 C 上任一点出发的正半轨恒位于 C 的外部 Ext$C$(或恒位于 C 的内部 Int$C$),则 $I_f(C)=1$.

一般情况下,(5.2)的轨线与 C 可能在某点 P 相切,C 上孤立切点的类型只有如下三种可能:

(I) 内切点:(5.2)的过 P(切点)的轨线在 P 点附近的轨线位于 Int$C$ 中;

(II) 外切点:(5.2)的过 P(切点)的轨线在 P 点附近的轨线位于 Ext$C$ 中;

(III) 中性切点:既非内切点也非外切点(参考图 5.1).

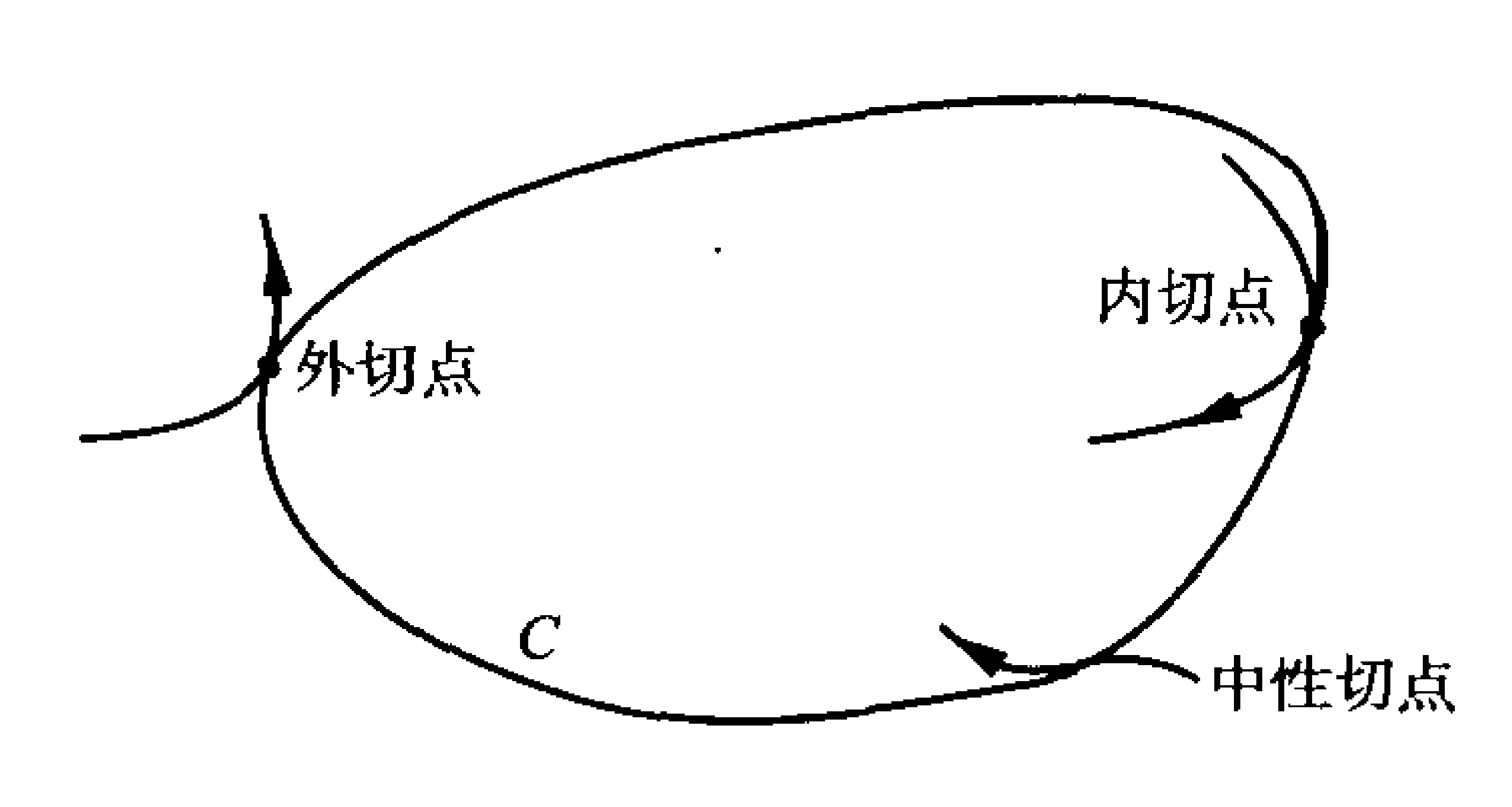


图 5.1 三类切点

指标 $I_f(C)$与内、外切点的关系由下列定理给出.

定理 5.1(Poincaré) 设 C 为光滑简单闭曲线,f 在 C 上无奇点,又设对于(5.2)的轨线来说,在 C 上存在 g 个内切点,h 个外切点,则 $I_f(C)=1+\dfrac{g-h}{2}$.

当 C 为分段光滑曲线,且 f 在 C 上有奇点时叶彦谦([138])给出计算指标的方法,推广了上述定理,获得了一系列很有意义的结果,此处略.

现设 x_0 为(5.2)的一孤立奇点,因此存在一光滑简单闭曲线

C,使得 x_0 为(5.2)在 Int$C$ 中的惟一奇点. 由引理 5.1,指标 $I_f(C)$与 C 的取法无关,从而可定义奇点 x_0 的指标为 $I_f(x_0)=I_f(C)$.

对一给定闭曲线 C,其指标 $I_f(C)$与其内部的奇点的指标之关系由下列定理给出.

定理 5.2 设 C 为一分段光滑的简单闭曲线,方程(5.2)在 C 上没有奇点,而在 Int$C$ 内只有有限个奇点 $x_1,\cdots,x_n$,则 $I_f(C)=\sum_{i=1}^{n} I_f(x_i)$. 特别,如果 Int$C$ 中没有(5.2)的奇点,则 $I_f(C)=0$.

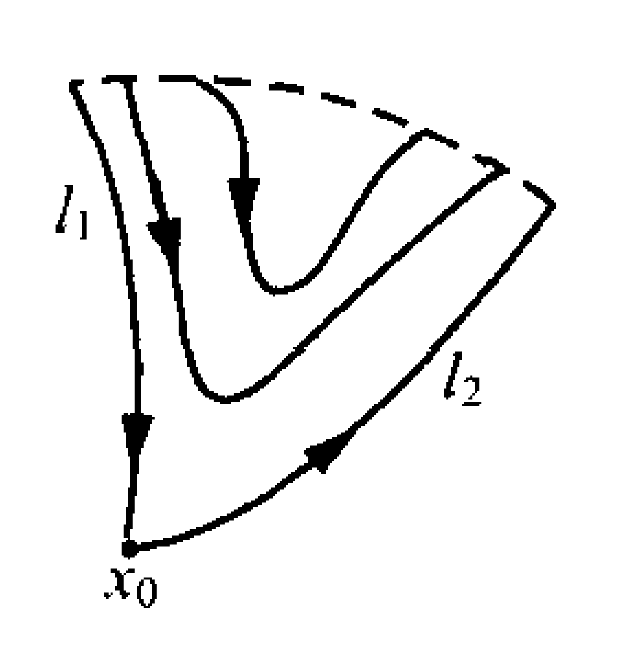
由上述定理知,平面系统(5.2)的闭轨的内部至少有一个指标为正的奇点.

利用引理 5.2 与(5.1)可证平面 C^1 系统的初等鞍点的指标为 -1,其他初等奇点的指标均为 $+1$. 为给出高次奇点的指标公式,下面引入三种扇形区域的概念.

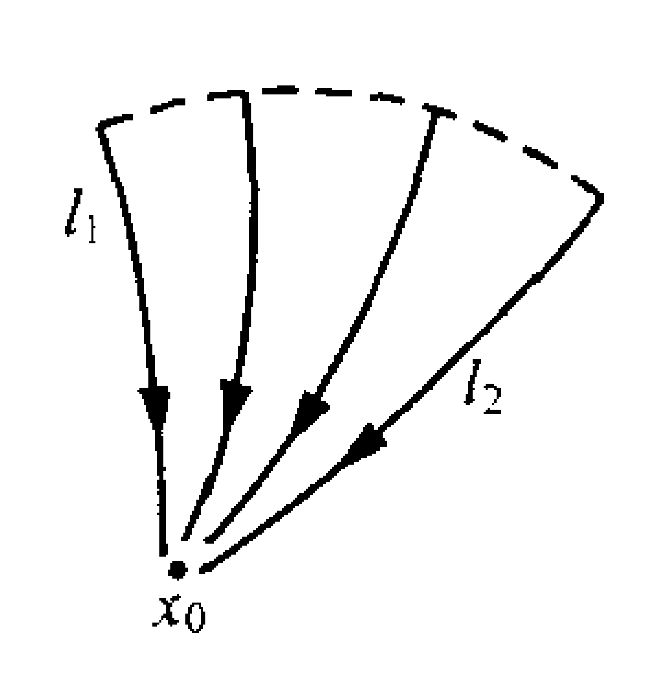
设 x_0 为(5.2)的孤立奇点,又设 G 为以 x_0 为顶点且不含其他奇点的扇形区域,G 的过 x_0 的两条边分别记为 l_1 与 l_2,记 $l_i^0=l_i-x_0$, $i=1,2$. 如果 l_1^0 与 l_2^0 两者之中一个为正半轨,另一个为负半轨,且(5.2)过 $G-l_1\cup l_2$ 中任一点的轨线在正、负两向都不趋于 x_0,则称 G 为(5.2)的在 x_0 的双曲域;如果 l_1^0 与 l_2^0 均为正(或负)半轨,且(5.2)过 G 中任一点的正(或负)轨线都趋于 x_0,又 G 中不含整条轨线,则称 G 为(5.2)在 x_0 的抛物域;如果存在正、负向均趋于 x_0 的同宿轨 l,使 $l_i^0\subset l$, $i=1,2$ 且 G 属于 Int$l$ 的闭包:$G\subset \mathrm{Cl}\,(\mathrm{Int}l)$,则称 G 为(5.2)在 x_0 的椭圆域,如图 5.2 所示. 易见一个椭圆域包含了一个更小的椭圆域与两个抛物域.

现在我们可以叙述计算高次奇点指标的 Bendixon 公式了.

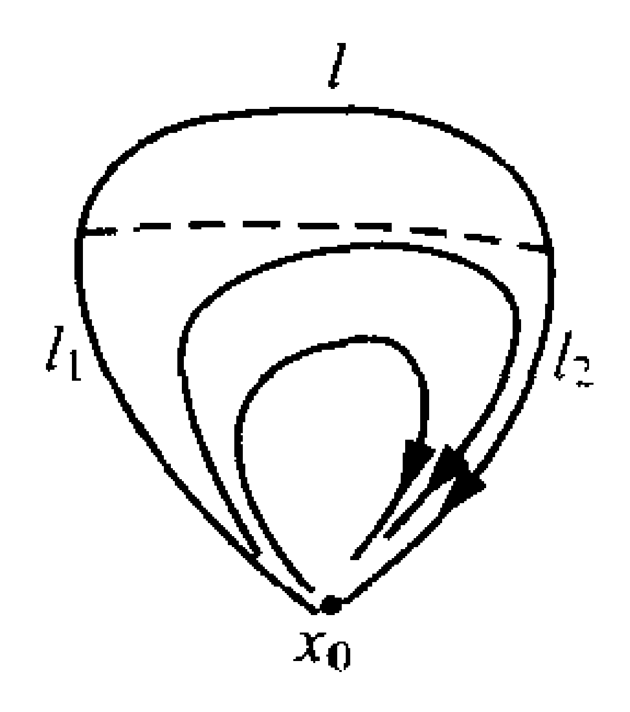
定理 5.3(Bendixon) 设 x_0 为解析系统(5.2)的孤立奇点,设(5.2)在 x_0 有 g 个椭圆域,h 个双曲域,则 x_0 的指标为 $I_f(x_0)=1+\frac{1}{2}(g-h)$.



(a) 双曲域



(b) 抛物域



(c) 椭圆域

图 5.2

注 5.1 由定理 5.1 与 5.2 知,定理 5.3 可推广到 C^1 系统,特别,若(5.2)在 x_0 仅有有限个椭圆域,则定理 5.3 对 C^1 系统成立.

注 5.2 由于平面系统的(二重)鞍结点只有两个双曲域与一个抛物域,因此由注 5.1 知 C^1 系统的二重鞍结点的指标为零.

5.2 解析系统的高次奇点判定

本小节给出判定平面解析系统的高次奇点类型的两个常用定理,并给出应用例子.

定理 5.4 考虑以原点为孤立奇点的解析系统

$$\dot{x} = P_2(x,y), \quad \dot{y} = y + Q_2(x,y), \tag{5.3}$$

其中 $P_2, Q_2 = O(|x,y|^2)$,设 $y=\varphi(x)$为方程 $y+Q_2(x,y)=0$ 在原点邻域内的解.如果存在 $m\geqslant 2, a_m\neq 0$ 使当$|x|$充分小时 $P_2(x,\varphi(x))=a_m x^m + O(x^{m+1})$,则

(i) 当 m 为奇数且 $a_m>0$ 时原点为(5.3)的不稳定结点;

(ii) 当 m 为奇数且 $a_m<0$ 时原点为(5.3)的鞍点;

(iii) 当 m 为偶数时原点为(5.3)的鞍结点.

定理 5.5 考虑下述形式的解析系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= a_k x^k(1+h(x)) + b_n x^n y(1+g(x)) + y^2 f(x,y), \end{aligned} \tag{5.4}$$

其中 $h(0)=g(0)=0, k\geqslant 2, a_k\neq 0, n\geqslant 1$. 若 $k=2m+1$ 为奇数, $m\geqslant 1$, 且记

$$\lambda = b_n^2 + 4(m+1)a_k,$$

那么, 当 $a_k>0$ 时原点为鞍点; 当 $a_k<0$ 且下列条件: (1) $b_n=0$, (2) $b_n\neq 0, n>m$, (3) $b_n\neq 0, n=m, \lambda<0$ 之一成立时, 原点为中心或焦点. 当 $a_k<0$ 且条件: (1) $b_n\neq 0$, n 为奇数, $n<m$, (2) $b_n\neq 0$, n 为偶数, $n=m, \lambda\geqslant 0$ 之一成立时原点为结点. 当 $a_k<0$ 且条件: (1) $b_n\neq 0$, n 为奇数, $n<m$, (2) $b_n\neq 0$, n 为奇数, $n=m, \lambda\geqslant 0$ 之一成立时原点为含一个椭圆域、一个双曲域和两个抛物域的奇点. 若 $k=2m$ 为偶数, $m\geqslant 1$, 那么当 (1) $b_n=0$ 或 (2) $b_n\neq 0$, $n\geqslant m$ 时原点为含两个双曲域的尖点型奇点; 当 $b_n\neq 0, n<m$ 时原点为鞍结点.

作为应用, 下面给出两个例子.

例 5.1 考虑 Liénard 方程

$$\dot{x} = y - ax^2, \quad \dot{y} = -x^3. \tag{5.5}$$

易见(5.5)等价于

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x^3 - 2axy,$$

该方程具有(5.4)的形式. 由定理 5.5 知当 $a^2\geqslant 2$ 时原点为(5.5)的含一个椭圆域, 一个双曲域与两个抛物域的退化奇点, 当 $a^2<2$ 时, 原点为中心或焦点. 注意到(5.5)在变换 $(x,t)\rightarrow(-x,-t)$ 下不变, 即(5.5)的轨线关于 y 轴对称, 故原点必为中心. 如图 5.3 所示. 此时, 由定理 5.3 知(5.5)在原点的指标是 1.

例 5.2 考虑多项式系统

$$\dot{x} = y + y^2 - x^3, \quad \dot{y} = 3x^2y + y^3 - 3x^5, \tag{5.6}$$

此方程不具有(5.4)的形式, 令 $Y = y + y^2 - x^3$, 其反函数为

$$y = Y(1+2x^3+O(x^6)) + x^3(1-x^6+O(x^9)) + O(Y^2),$$

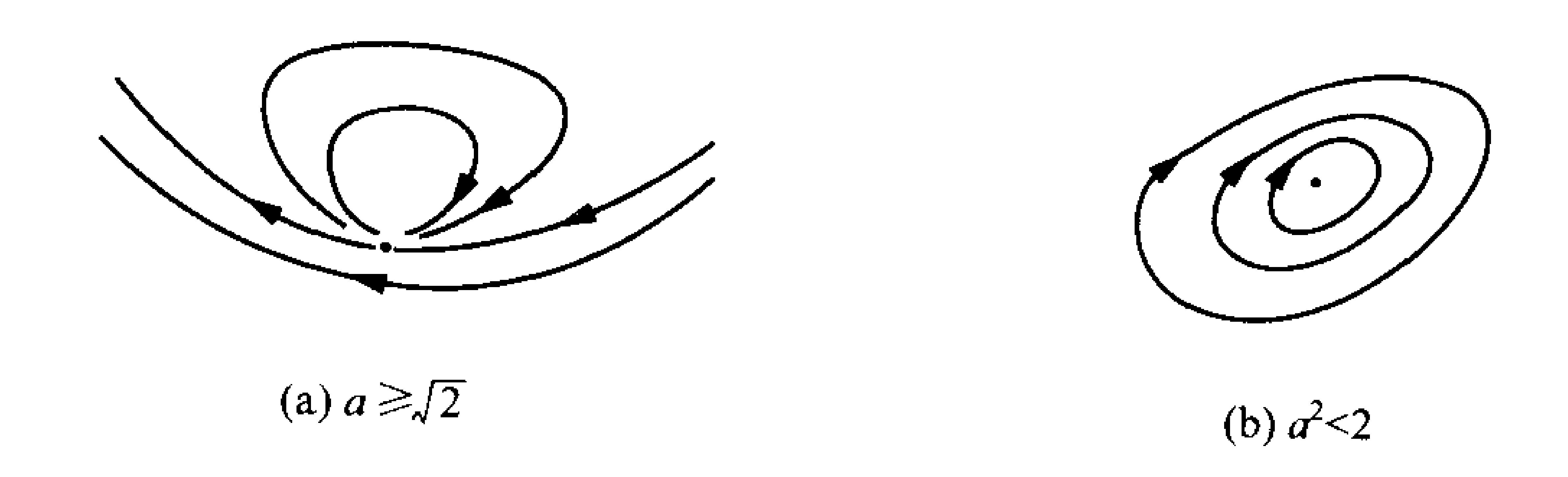

(a) $a \geqslant \sqrt{2}$　　(b) $a^2<2$

图 5.3

可知(5.6)成为

$$\dot{x} = Y, \dot{Y} = -3x^{11}(1 + O(x)) + 12x^5 Y(1 + O(x)) + O(Y^2),$$

于是由定理 5.5 知原点为(5.6)的尖点型奇点,如图 5.4 所示 .

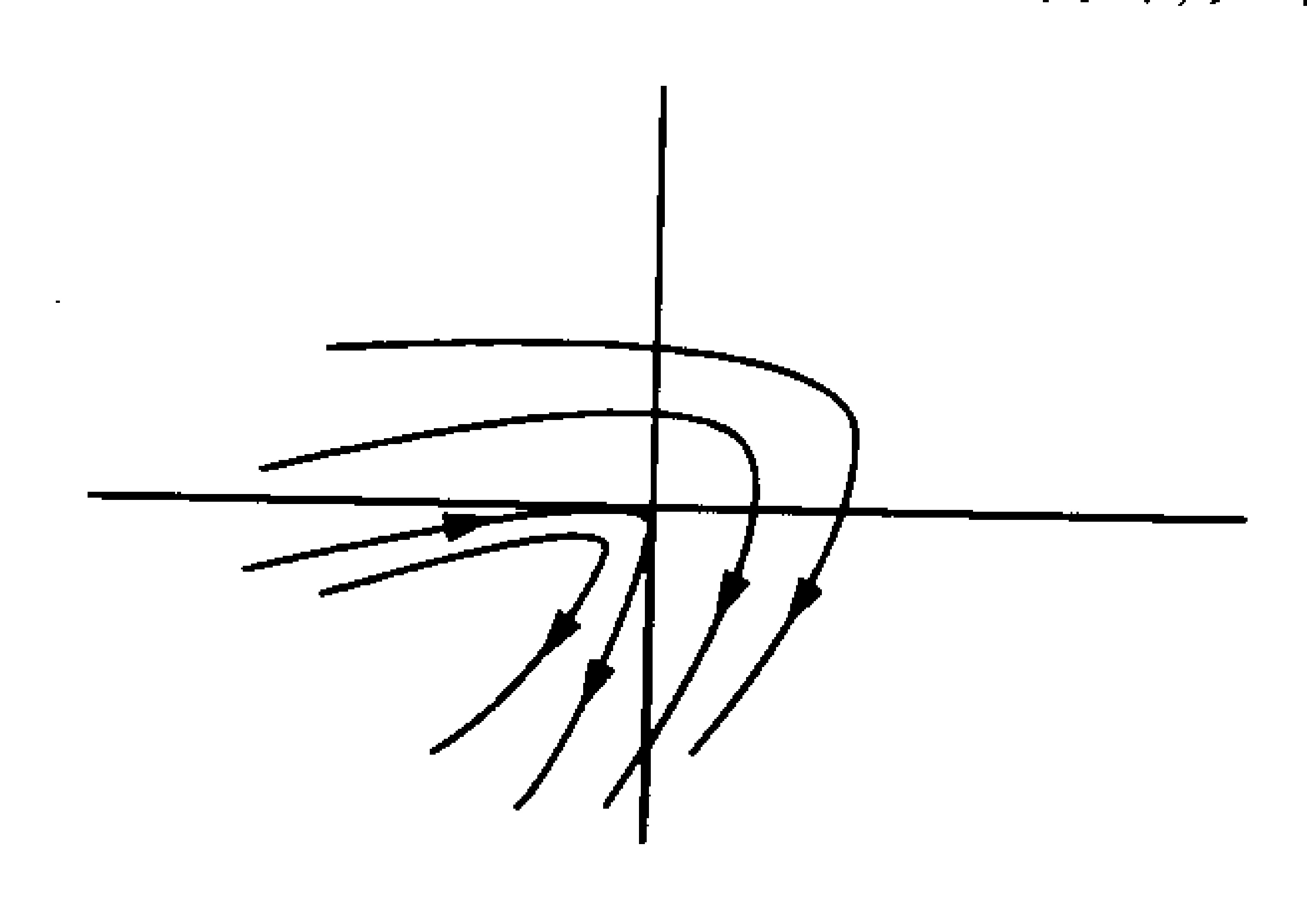


图 5.4

5.3 无穷远奇点

在研究平面微分系统的全局性质时,除了研究有限远奇点的性质外还要研究无界轨线的走向,例如,若一正半轨沿某确定方向趋向无穷远,则所述系统在该方向必有无穷远奇点.研究清楚每个无穷远奇点的性质,对轨线的全局结构才会有较全面的了解.本小节我们介绍分析无穷远奇点的方法.

考虑平面解析系统

$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y), \tag{5.7}$$

由于每条过原点的直线除了 y 轴外都可以写为 $y = ux$, $u \in R$,因此要研究(5.7)在无穷远处的轨线性质,只需要研究(5.7)在每条

这种斜直线以及 y 轴(竖直线)的两个无穷远端点附近的轨线性态.

先研究斜直线两端点附近的轨线性态. 对(5.7)引入下列变换:

$$z=\frac{1}{x},\quad u=\frac{y}{x},\tag{5.8}$$

则(5.7)成为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}&=-uzP\left(\frac{1}{z},\frac{u}{z}\right)+zQ\left(\frac{1}{z},\frac{u}{z}\right),\\\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}&=-z^2P\left(\frac{1}{z},\frac{u}{z}\right),\end{aligned}\tag{5.9}$$

于是问题转化为研究(5.9)在整个 u 轴附近(即含 u 轴的小带域内)轨线的性质. 假设(5.9)可以写成下述形式:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{z^n}P_1(u,z),\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{z^n}Q_1(u,z),\tag{5.10}$$

其中 $n\geqslant 0$ 为适当选取的非负整数, P_1, Q_1 为连续可微函数. 特别,如果确 P, Q 为多项式,则(5.9)必可写成(5.10)之形式,且 P_1, Q_1 也是多项式. 对(5.10)做时间变换

$$\mathrm{d}\tau=\frac{1}{z^n}\mathrm{d}t,\tag{5.11}$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}=P_1(u,z),\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}=Q_1(u,z),\tag{5.12}$$

若(5.12)在 u 轴上有有限个奇点,则通过分析这些奇点的性质,再利用(5.11)确定 t 与 τ 的单调关系,便可获得(5.9)在 u 轴附近的轨线性态了.

为了使所得的结果在 (x,y) 平面完全地反映出来,引入紧化变换:

$$X = \frac{\operatorname{sgn} z}{\sqrt{1 + u^2 + z^2}}, \quad Y = \frac{u \operatorname{sgn} z}{\sqrt{1 + u^2 + z^2}}, \tag{5.13}$$

方程(5.9)的轨线都被映到(X, Y)平面上的单位圆盘 $X^2 + Y^2 \leqslant 1$ 中,且(5.9)在 u 轴附近位于 $z>0$ 中的轨线映到右半圆周 $X^2 + Y^2 = 1, X>0$ 附近,而位于 $z<0$ 中的轨线映到左半圆周 $X^2 + Y^2 = 1, X<0$ 附近.

例如,设$(u_0, 0)$为(5.12)的奇点,不妨设 $u_0>0$,又取 $\varepsilon>0$ 充分小,$x_0>0$ 充分大,引入(x, y)平面上两个区域 D_1 与 D_2 如下:

$$D_1 = \left\{(x, y) \left| \left| \frac{y}{x} - u_0 \right| \leqslant \varepsilon, x \geqslant x_0 \right.\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x, y) \left| \left| \frac{y}{x} - u_0 \right| \leqslant \varepsilon, x \leqslant - x_0 \right.\right\}.$$

设 D_i 在变换(5.8)下的像为 S_i,则

$$S_1 = \{(u, z) \mid |u - u_0| \leqslant \varepsilon, 0 < z \leqslant z_0\},$$

$$S_2 = \{(u, z) \mid |u - u_0| \leqslant \varepsilon, - z_0 \leqslant z < 0\},$$

其中 $z_0 = \frac{1}{x_0}$. 记 $X_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + u_0^2}}$, $Y_0 = \frac{u_0}{\sqrt{1 + u_0^2}}$,并设 R_i 为 S_i 在(5.13)下的像,则注意到 $u = Y/X$,方程(5.7)在无穷区域 D_1 与 D_2 上的轨线性态通过(5.9)在 S_1 与 S_2 上的轨线性质最终可在有界小区域 R_1 与 R_2 上反映出来,如图 5.5 所示.

需要指出的是,若在(5.11)中 n 为偶数,则(5.10)与(5.12)在 S_1 与 S_2 中的轨线定向相同,若 n 为奇数,则(5.10)与(5.12)在 S_1 中的轨线定向相同,而在 S_2 中的轨线定向相反.

为研究(5.7)在 y 轴两端的轨线性态,再引入变换:

$$z = \frac{1}{y}, \quad v = - \frac{x}{y}, \tag{5.14}$$

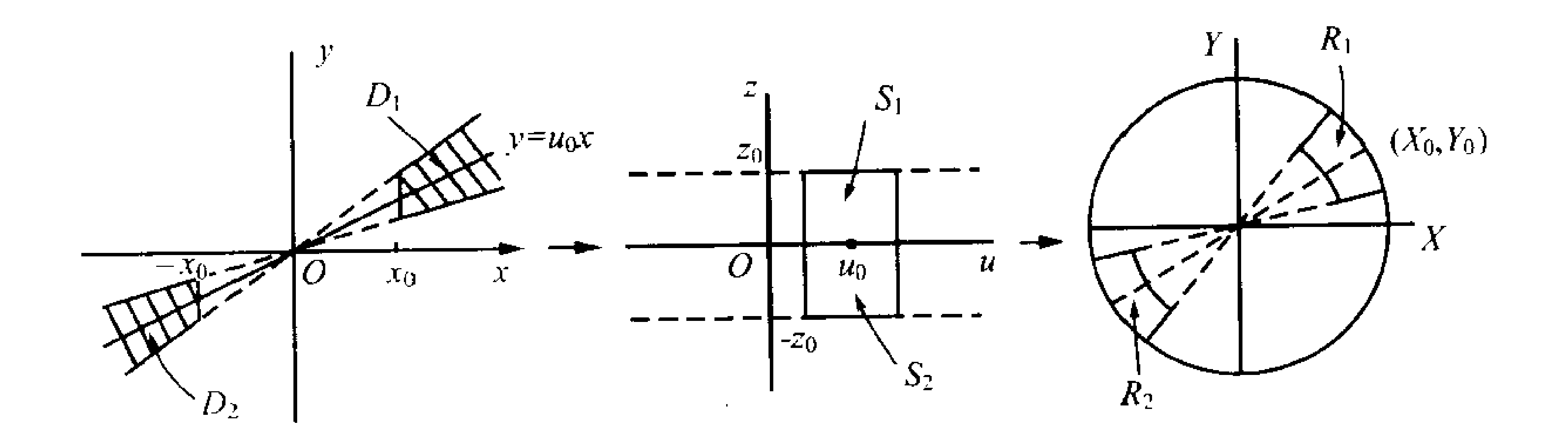


图 5.5

此时(5.7)成为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=zP\left(\frac{v}{z},\frac{1}{z}\right)-zvQ\left(\frac{v}{z},\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z^m}P_2(v,z),$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-z^2Q\left(\frac{v}{z},\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z^m}Q_2(v,z). \tag{5.15}$$

令 $\mathrm{d}\tau=\frac{\mathrm{d}t}{z^m}$,上方程成为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}=P_2(v,z),\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=Q_2(v,z), \tag{5.16}$$

对(5.16)只需讨论点(0,0)领域内的轨线性态.又通过引入变换

$$X=\frac{v\operatorname{sgn}z}{\sqrt{1+v^2+z^2}},\quad Y=\frac{\operatorname{sgn}z}{\sqrt{1+v^2+z^2}}, \tag{5.17}$$

可把(5.16)在原点附近的轨线映到(X,Y)平面的单位圆盘 $X^2+Y^2\leqslant1$ 的点$(X,Y)=(0,\pm1)$附近,如图 5.6 所示.同前,若 m 为奇数,则在图 5.6 中(z,v)平面上的阴影区域中(5.15)与(5.16)的轨线定向相反.

将(5.8)与(5.13)复合,(5.14)与(5.17)复合可得(X,Y)与(x,y)的关系如下:

$$X=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\quad Y=\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}},$$

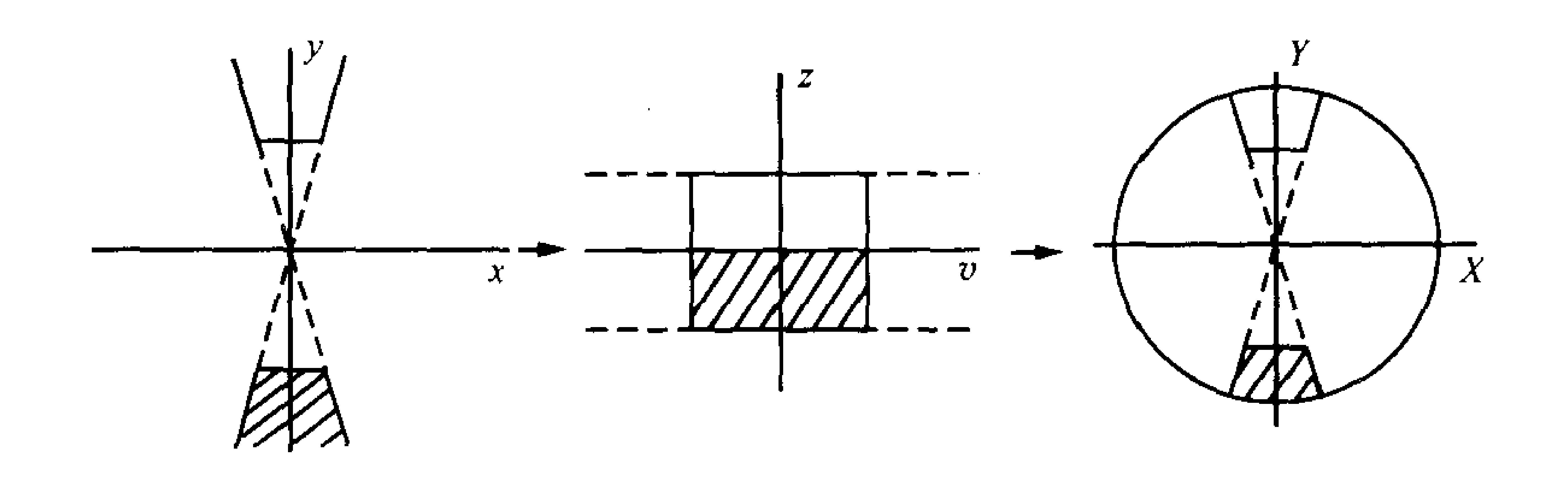


图 5.6

因此方程(5.7)在整个平面中的所有轨线都紧化到圆盘 $X^2+Y^2\leqslant 1$ 中，而无穷远处的轨线紧化到单位圆 $X^2+Y^2=1$ 的内侧附近.变换(5.8)与(5.14)均称为 Poincaré 变换，所得圆盘称为 Poincaré 圆盘，在整个 Poincaré 圆盘中所获得(5.7)的轨线相图称为(5.7)的全局相图.

例 5.3 考虑二次系统

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-x+\mu x^2-y^2, \tag{5.18}$$

其中 $\mu\in R$.易知当 $\mu\neq 0$ 时(5.18)有两个有限远奇点 $O(0,0)$ 与 $B(\mu^{-1},0)$，当 $\mu=0$ 时只有一个奇点 $O(0,0)$.注意到(5.18)在变换 $(t,y)\to(-t,-y)$ 下形式不变，可知(5.18)的轨线关于 x 轴为对称的，从而具指标 $+1$ 的奇点 O 为(5.18)的中心奇点.又易知奇点 B(当 $\mu\neq 0$ 时)为(5.18)的鞍点.

为研究无穷远奇点，先做 Poincaré 变换(5.8)，由(5.18)可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{z}[\mu-z-u^2-zu^2],\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{z}[-z^2u],$$

令 $\mathrm{d}\tau=\frac{1}{z}\mathrm{d}t$，上方程成为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\mu-z-u^2-zu^2,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-z^2u, \tag{5.19}$$

易见,(5.19)有积分直线 $z=0$,在该直线上,当 $\mu>0$ 时(5.19)有奇点 $E(0,\sqrt{\mu})$,$F(0,-\sqrt{\mu})$. 当 $\mu=0$ 时只有奇点 $C(0,0)$,而当 $\mu<0$ 时没有奇点. 利用定理 5.4 可知奇点 E,F 为(5.19)的鞍结点. 由定理 5.5 可知奇点 C 为鞍点(高次),如图 5.7 所示.

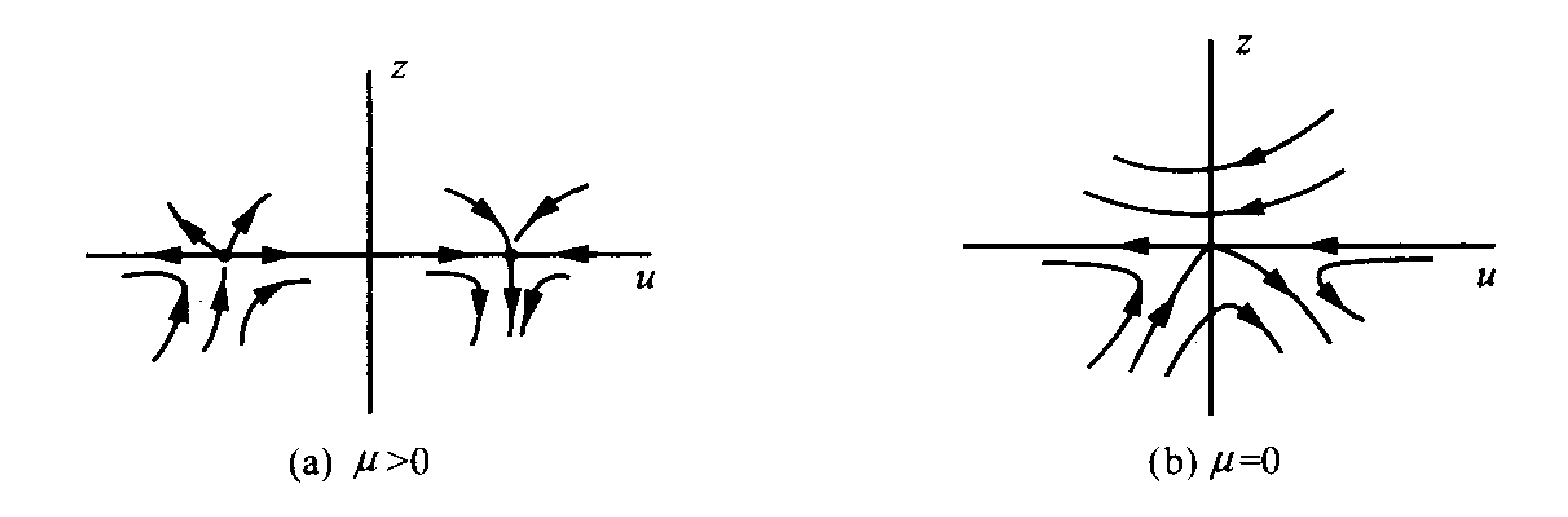


图 5.7

再研究 y 轴上的无穷远奇点,在变换(5.14)下(5.18)成为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{z}[z+v+v^2z-\mu v^3],$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{z}[z+vz^2-\mu v^2z],$$

令 $\mathrm{d}\tau=\frac{1}{z}\mathrm{d}t$,由上式得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}&=[z+v+v^2z-\mu v^3],\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}&=[z+vz^2-\mu v^2z],\end{aligned}\tag{5.20}$$

方程(5.20)有积分直线 $z=0$,且原点为(5.20)的不稳定结点.

为讨论(5.18)在有限平面内的轨线,我们发现(5.18)有首次积分

$$H(x,y)=e^{2x}\left[y^2-\mu x^2+(\mu+1)x-\frac{1}{2}(1+\mu)\right],$$

即

$$\left.\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right|_{(5.18)} = (H_x\dot{x} + H_y\dot{y})\Big|_{(5.18)} = 0,$$

因此沿(5.18)的每条轨线 H 取常值;反之,由"$H=$常数"可给出(5.18)的全部轨线.特别地,当 $\mu\neq0$ 时过鞍点 B 的分界线的方程为

$$y^2 = \frac{1}{2}(1-\mu)e^{\frac{2}{\mu}-2x} + \mu x^2 - (1+\mu)x + \frac{1}{2}(1+\mu).$$

通过分析分界线的走向,并注意到,对无穷远奇点,在 $z>0(z<0)$ 上 $\mathrm{d}t$ 与 $\mathrm{d}\tau$ 同号(异号),可得如图 5.8 所示的全局相图.

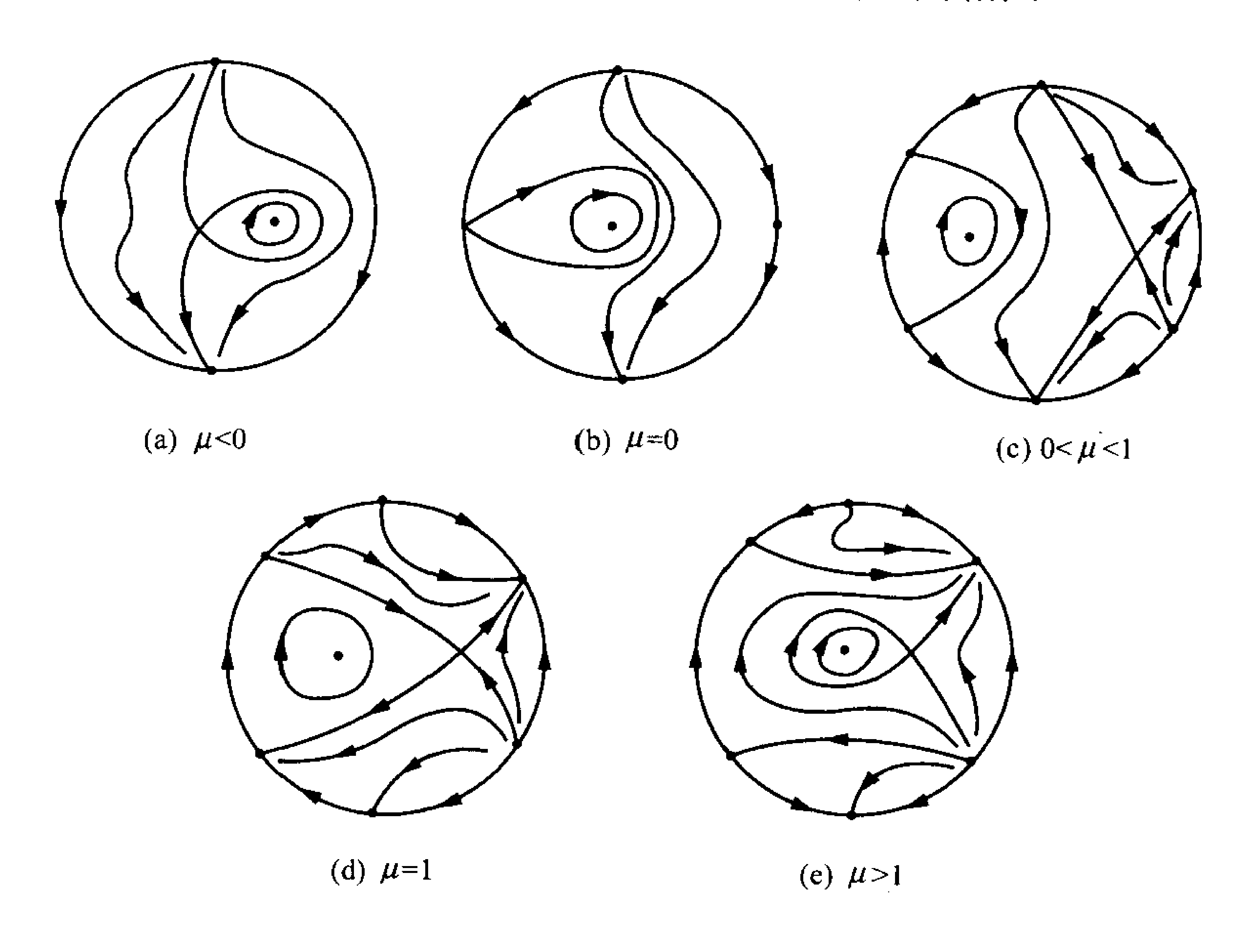


图 5.8

本节所介绍的分析无穷远奇点的 Poincaré 变换方法是平面定性理论的经典内容.此处的处理与其他书的细节有所不同,即我们在把无穷远奇点的性态反映到 Poincaré 圆盘的过程中没有出现所谓的 Poincaré 球面,这在形式上简化了分析过程.

§6 规范型理论与应用

规范型理论在研究高次奇点的多参数扰动分支及同、异宿轨线的扰动分支中起着十分关键的作用.本节我们只介绍规范型的基本理论与方法,并讨论对某些奇点的应用.

6.1 规范型基本理论

考虑 n 维 $C^r(r\geqslant 2)$ 系统

$$\dot{x} = F(x), \tag{6.1}$$

其中 $F(0)=0$. 设 $P:R^n\to R^n$ 为 C^∞ 映射,且 $P(0)=0, DP(0)=0$. 对式(6.1)施行变换

$$x = y + P(y) \equiv h(y), \tag{6.2}$$

则(6.1)成为

$$\dot{y} = [Dh(y)]^{-1}F(h(y)), \tag{6.3}$$

我们希望新方程(6.3)比方程(6.1)有较简单的形式,例如,(6.3)含有较少的(形式不同的)非线性项,这就是规范型理论所考虑的基本问题.下面我们先讨论一种较特殊的情况,即设 $DF(0)$ 为对角形矩阵,此时(6.1)可写成分量形式

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + f_i(x), \quad i = 1,\cdots,n, \tag{6.4}$$

其中 $f_i(x)$ 关于 x 在 $x=0$ 的展式的最低次项的次数为 $k(2\leqslant k\leqslant r)$,记 $f_i^{(k)}$ 为 f_i 中的 k 次齐次项,又取(6.2)中的 $P=(P_1,\cdots,P_n)$ 为 y 的 k 次齐次多项式,则注意到

$$(Dh)^{-1} = (I+DP)^{-1} = I - DP + O(|DP|^2),$$

由(6.3)与(6.4)知,在变换(6.2)下,方程(6.4)成为

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \lambda_i P_i(y) + f_i^{(k)}(y) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial y_j}\lambda_j y_j + \cdots, \tag{6.5}$$

$$i = 1,\cdots,n,$$

由(6.5)知,如果存在 P 使

$$\lambda_i P_i(y) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial y_j}\lambda_j y_j = - f_i^{(k)}(y), \quad i = 1,\cdots,n, \tag{6.6}$$

则新方程(6.5)中便不出现 k 次齐次项了.现在我们试求(6.6)关于 P 的解.由于(6.6)左端关于 P_i 为线性的,如果取 P_i 为 k 次齐次单项式 $y_1^{a_1}\cdots y_n^{a_n}$, $a_1+\cdots+a_n=k$,则(6.6)之左成为 $(\lambda_i - \sum_{j=1}^{n} a_j\lambda_j) P_i$,注意到 $f_i^{(k)}$ 为 k 次齐次单项式的线性组合,可知如果对满足 $a_1+\cdots+a_n=k$ 的所有非负整数 $a_1,\cdots,a_n$ 及 $i=1,\cdots,n$ 均有

$$\lambda_i - \sum_{j=1}^{n} a_j\lambda_j \neq 0, \tag{6.7}$$

则由(6.6)可惟一地确定 k 次齐次式 P,从而可使(6.5)中不含有 k 次项.如果(6.7)对所有的 $k\geqslant 2$ 与 $i=1,\cdots,n$ 成立,则当函数 f 足够光滑时,(6.1)中任何指定的非线性都可经形如(6.2)的一系列多项式变换而消去.然而,我们指出,这不意味着(6.1)可被光滑线性化,因为把形如(6.2)的多项式变换应用到(6.1)所得的新方程总会含有一"尾巴",其次数虽可任意高地设定,但总是存在的.至于这一"尾巴"是否可以经无穷多次的变换而最终消去的问题,在此不做讨论,有兴趣的读者可参考[4]与等[109].

由上述讨论知,如果存在 $k\geqslant 2, 1\leqslant i\leqslant n$ 及满足 $a_1+\cdots+a_n=k$ 的非负整数 $a_1,\cdots,a_n$ 使(6.7)不成立,即有

$$\lambda_i - \sum_{j=1}^{n} a_j\lambda_j = 0, \tag{6.8}$$

则(6.5)中第 i 个方程右端的 k 次项 $y_1^{a_1}\cdots y_n^{a_n}$ 将被保留下来,我们称这种被保留下来的项为(6.5)的共振项.因为有限个形如(6.2)的多项式变换的复合仍是多项式变换,可知对形如(6.4)的方程组,我们有下述结论:

存在形如(6.2)的多项式变换,把(6.4)化为下述形式:

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + g_i^{(2)}(y) + \cdots + g_i^{(k)}(y) + o(|y|^k), \quad i = 1,\cdots,n, \tag{6.9}$$

其中每个 $g_i^{(j)}(y)$为 j 次共振项的线性组合.称(6.9)为(6.1)的 k 次规范型.

现在考虑一般情况,设 $L = DF(0)$,用 H_k 表示分量是$x_1,\cdots,x_n$ 的k 次齐次式的n 维向量所成的(有限维)线性空间.定义线性映射 $ad_L: H_k \to H_k$ 为

$$ad_L(Y) = [Y, L] = DL \cdot Y - DY \cdot L, \quad Y \in H_k, \tag{6.10}$$

其中$[\cdot,\cdot]$表示 Lie 括号运算(这里注意,由于 L 可视为线性映射,因此 $DL = L$).令 $B_k = \mathrm{Im}\, ad_L \subset H_k$,即 B_k 为H_k 在ad_L 下的像空间.由线性空间理论,存在 B_k 在H_k 中的补空间$G_k \subset H_k$,使 $H_k = B_k + G_k$.我们证明

定理 6.1(规范型定理) 设在原点的某邻域内 F 为C^r($r \geqslant 2$)函数,则存在形如(6.2)的多项式变换,使得方程(6.1)被变为下述规范型:

$$\dot{y} = g(y) = Ly + g_2(y) + \cdots + g_r(y) + R_r(y), \tag{6.11}$$

其中 $g_k \in G_k$,$2 \leqslant k \leqslant r$,$R_r = o(|y|^r)$.

证明 对 r 用归纳法.首先设 $r = 2$,则 $F(x) = Lx + f_2(x) + o(|x|^2)$,$f_2$ 为二次齐次式.设在(6.2)中 P 为待定的 2 次齐次式,则仿(6.5)变换,(6.2)把(6.1)变为

$$\dot{y} = Ly + f_2(y) + LP(y) - DP(y)Ly + o(|y|^r), \tag{6.12}$$

设 $f_2=f_2^{(1)}+f_2^{(2)}$，$f_2^{(1)}\in B_2$，$f_2^{(2)}\in G_2$，因为 $-f_2^{(1)}\in B_2$，必存在 $P\in H_2$ 使

$$LP(y)-DP(y)Ly+f_2^{(1)}(y)=ad_L(P)(y)+f_2^{(1)}(y)=0,$$

于是(6.12)成为

$$\dot{y}=Ly+f_2^{(2)}(y)+o(|y|^2).$$

因此当 $r=2$ 时定理成立．假设定理对 $r-1$ 成立，则可设

$$F(x)=Lx+g_2(x)+\cdots+g_{r-1}(x)+f_r(x)+R_r(x),$$

其中 $g_k\in G_k$，$2\leqslant k\leqslant r-1$，$f_r\in H_r$，$R_r=o(|x|^r)$．设在(6.2)中 P 为待定的 r 次齐次式，仿(6.12)，(6.3)成为

$$\dot{y}=Ly+g_2(y)+\cdots+g_{r-1}(y)+f_r(y)+ad_L(P)(y)$$
$$+o(|y|^r),$$

与 $r=2$ 的情况类似，设 $f_r=f_r^{(1)}+f_r^{(2)}$，$f_r^{(1)}\in B_r$，$f_r^{(2)}\in G_r$，则存在 $P\in H_r$ 使 $ad_L(P)+f_r^{(1)}=0$，从而 $f_r+ad_L(P)=f_r^{(2)}\in G_r$．证毕．

上述定理的证明是构造性的，因而提供了求规范型的一个具体方法，应用例子将在后面给出．

在研究奇点的扰动分支时，需要寻求含参数方程的规范型．下面讨论这一问题．

考虑(6.1)的下述扰动：

$$\dot{x}=F(x)+F_1(x,\mu)\equiv F^*(x,\mu),\qquad(6.13)$$

其中 $\mu\in R^m$，$F_1(0,0)=0$．对方程(6.13)添加方程 $\dot{\mu}=0$ 可得

$$\dot{x}=F^*(x,\mu),\quad \dot{\mu}=0,\qquad(6.14)$$

如果 F^* 关于 (x,μ) 为 C^r 的，则利用定理 6.1，通过寻求形如 $x=y+P(y,\mu)$，$\mu=\mu$ 的多项式变换(即 P 为 (y,μ) 的多项式)，可获得(6.14)的 r 次规范型．易知方程 $\dot{\mu}=0$ 始终保持不变，从而

由(6.14)的规范型舍去这一方程即得(6.13)的“r 次”规范型. 值得指出的是利用此法获得的规范型的“尾巴”为 $o(|y,\mu|^r)$,而不是 $o(|y|^r)$,这是一个缺陷,使得所得规范型不能满足某些实际需要(例如,Hopf 分支与同宿分支等). 含参数方程(6.13)是否存在形如(6.11)的规范型呢? 下列定理给出了一个回答.

定理 6.2 设(6.13)满足 $F_1(0,\mu)=F_1(x,0)=0$,F 与 F_1 关于 x 为 C^r 的,而关于 μ 为 C^k 的,$r\geqslant 2$,$k\geqslant 0$,设 B_j,$G_j(j=2,\cdots,r)$同前,$L^*(\mu)=F_x^*(0,\mu)$,如果对每个 $j=2,\cdots,r$ 及 $ad_{L^*}:H_j\to H_j$,都存在两个线性映射 $T_{i,\mu}:H_j\to H_j$ 使 $ad_{L^*}=T_{1,\mu}+T_{2,\mu}$ 且 $\operatorname{Im}T_{1,\mu}=B_j$,$\operatorname{Im}T_{2,\mu}\subset G_j$,则存在变换 $x=y+P(y,\mu)$,其中 P 关于 y 为多项式,关于 μ 为 C^k 的,把(6.13)化为下述 r 次规范型:

$$\dot{y}=L^*(\mu)y+g_{2,\mu}(y)+\cdots+g_{r,\mu}(y)+R_{r,\mu}(y), \tag{6.15}$$

其中 $g_{j,\mu}\in G_j$,$j=2,\cdots,r$,$R_{r,\mu}=o(|y|^r)$,又每个 $g_{j,\mu}$ 与 $R_{r,\mu}$ 关于 μ 为 C^k 的.

证明 设 $f_{r,\mu}=f_{r,\mu}^{(1)}+f_{r,\mu}^{(2)}\in H_r$,$f_{r,\mu}^{(1)}\in B_r$,$f_{r,\mu}^{(2)}\in G_r$,且 $f_{r,\mu}$ 为关于 μ 为 C^k 的,由定理 6.1 的证明,只须证明存在 $P_\mu\in H_r$ 且 P_μ 关于 μ 为 C^k 的,使下式成立:

$$f_{r,\mu}+ad_{L^*}(P_\mu)\in G_r. \tag{6.16}$$

由所设条件可知存在线性映射 $T_{i,\mu}:H_r\to H_r$,$i=1,2$,使 $ad_{L^*}=T_{1,\mu}+T_{2,\mu}$,$\operatorname{Im}T_{1,\mu}=\operatorname{Im}ad_L$,$\operatorname{Im}T_{2,\mu}\subset G_r$,于是存在 $P_\mu\in H_r$ 关于 μ 为 C^k 的,使 $T_{1,\mu}P_\mu+f_{r,\mu}^{(1)}=0$,$T_{2,\mu}P_\mu\subset G_r$,由此即得(6.16). 证毕.

由本节前面的讨论,如果 L 为实对角形,可以利用(6.8)来求出共振项,这一方法也适用于 L 的 Jordan 标准形为复对角形的情况,而且可用 L 的对角化矩阵来求含参数方程的规范型. 为此,设

存在可逆(实或复)矩阵 T 使

$$TLT^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\equiv J,$$

$$TL^*(\mu)T^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1^*(\mu),\cdots,\lambda_n^*(\mu))$$

$$\equiv J^*(\mu). \tag{6.17}$$

由前面对(6.4)的讨论知,对任意整数 $j\geqslant z$ 及 $ad_{L^*}:H_j\to H_j$,必有线性映射 $T_{1,\mu},T_{2,\mu}:H_j\to H_j$ 使 $ad_{L^*}=T_{1,\mu}+T_{2,\mu}$, $\mathrm{Im}T_{1,\mu}=B_j$, $\mathrm{Im}T_{2,\mu}\subset G_j$,于是在定理 6.2 的条件下(6.13)可写成

$$\dot{x}=L^*(\mu)x+f(x,\mu),\quad f=o(|x|^2). \tag{6.18}$$

方程(6.18)的规范型具有(6.15)的形式.另一方面,对(6.18)作变换 $y=Tx$ 可得

$$\dot{y}=J^*(\mu)y+g(y,\mu), \tag{6.19}$$

其中 $g(y,\mu)=Tf(T^{-1}y,\mu)$. 由(6.17),利用(6.8)可确定(6.19)的共振项,于是可得(6.19)的(实或复)规范型

$$\dot{z}=J^*(\mu)z+g_{2,\mu}(z)+\cdots+g_{r,\mu}(z)+o(|z|^r), \tag{6.20}$$

其中 $g_{j,\mu}$为j 次共振项,$j=2,\cdots,r$. 注意到,若 L 有复特征值,则(6.20)中变量 z 与各共振项的系数均为复数. 再对(6.20)施行变换 $z=Tx$ 可得

$$\dot{x}=L^*(\mu)x+g_{2,\mu}^*(x)+\cdots+g_{r,\mu}^*(x)+o(|x|^r), \tag{6.21}$$

其中 $g_{j,\mu}^*(x)=T^{-1}g_{j,\mu}(Tx)$, $j=2,\cdots,r$. 现在把(6.21)中的 x 及各共振项 $g_{j,\mu}^*(x)$的系数等均取作实数,则(6.21)就是(6.18)的实规范型,且与由定理 6.2 所得到的规范型(6.15)一致. 因此在条件(6.17)下,式(6.20)与(6.21)提供了求规范型的一种较简单的方法.

规范型定理是许多动力系统分支理论书中常有的内容,除了

上面所介绍的计算规范型的方法外,还有其他的计算方法,可参考[14].对含参数的系统,利用(6.14)来求规范型的方法曾在许多书中出现,但实用性不强.在讨论 Hopf 分支与同宿分支时需要求出形如(6.15)的含参数规范型,这方面的工作已在[122],[78]及[128]和[129]等文献中出现过,而对一般的含参数方程(6.13),韩茂安与朱德明([65])在条件(6.17)下给出类似于定理 6.2 的一个结果.

6.2 应用:几类方程的规范型

本小节应用规范型理论来求出几类方程的规范型,在研究一些局部与非局部分支问题中这些规范型是必须用到的.

首先考虑二维系统

$$\dot{x} = f(x,y), \dot{y} = x + g(x,y), \tag{6.22}$$

其中 $f,g:R^2 \to R$ 为 C^∞ 函数,且满足

$$f(0,0) = g(0,0) = 0, \quad Df(0,0) = Dg(0,0) = 0. \tag{6.23}$$

由 Taylor 公式,对任意自然数 r,存在 r 次多项式 f_r, g_r 使在原点邻域内成立

$$f(x,y) = f_r(x,y) + o(|x,y|^r),$$
$$g(x,y) = g_r(x,y) + o(|x,y|^r).$$

命题 6.1 设 r 为任给的自然数,则存在在原点附近解析的坐标变换,把(6.22)化为下述规范型

$$\dot{x} = \sum_{j=2}^{r} a_j y^j + o(|x, \quad y|^r), \dot{y} = x + \sum_{j=2}^{r} b_j y^j + o(|x,y|^r),$$

其中 a_j, b_j 为只与 f_r, g_r 的系数有关的常数.

证明 对 $j \geq 0, k \geq 0, j+k=l, 1 \leq l \leq r$,记

$$Y_1(j,k)(x,y) = (x^j y^k, 0)^T, \quad Y_2(j,k)(x,y) = (0, x^j y^k)^T.$$

注意到 $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 由(6.10)知,

$$ad_L(Y_1)(x,y) = (-kx^{j+1}y^{k-1}, x^jy^k)^T$$
$$= -kY_1(j+1,k-1) + Y_2(j,k),$$
$$ad_L(Y_2)(x,y) = (0, -kx^{j+1}y^{k-1})^T$$
$$= -kY_2(j+1,k-1). \quad (6.24)$$

下证 H_l 由 B_l 和向量 $Y_1(0,l)$, $Y_2(0,l)$张成. 事实上，令

$$e_i = Y_1(i-1,l-i+1), \quad e_{l+1+i} = Y_2(i-1,l-i+1),$$
$$i = 1,\cdots,l+1,$$

则 $e_j, j=1,\cdots,2(l+1)$，为 H_l 的一组基，且由(6.24)知 ad_L 在该基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ I & A^T \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -l & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -l+1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

上式中"T"表示转置. 因此相空间 $ad_L(H_l)$为 $2l$ 维的，而且进一步由(6.24)知 $ad_L(H_l)$为由 $e_3,\cdots,e_{l+1},e_{l+3},\cdots,e_{2l+2}$和 $-le_2+e_{l+2}$生成的子空间，从而得证 H_l 为由 $B_l = ad_L(H_l)$和 $e_1 = Y_1(0,l)$与 $e_{l+2} = Y_2(0,l)$生成的空间，即 G_l 可取作由向量 $Y_1(0,l)$和 $Y_2(0,l)$张成的子空间，由此利用定理 6.1 即得结论. 证毕.

由上述证明知，H_l 也由 B_l 和向量 $e_1 = Y_1(0,l)$, $e_2 = Y_1(1,l-1)$生成，即 G_l 又可取作由 $e_1 = Y_1(0,l)$, $e_2 = Y_1(1,l-1)$生成的子空间，此时可把(6.22)化为下述形式：

$$\dot{x} = \sum_{j=2}^{r}(a_jy^j + b_jxy^{j-1}) + o(|x,y|^r),$$

$$\dot{y} = x + o(|x,y|^r).$$

其次考虑二维 C^∞ 系统

$$\dot{x} = -y + f(x,y), \quad \dot{y} = x + g(x,y), \tag{6.25}$$

其中 f,g 仍然满足(6.23)，此时有 $L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，其特征值为 $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$，其中 $i = \sqrt{-1}$，易知取

$$T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

则 $TLT^{-1} = \mathrm{diag}(i, -i)$，由(6.8)知，与(6.25)相应的形如(6.20)的复方程组的第一(二)个方程的共振项 $z_1^{a_1} z_2^{a_2}$ 满足 $1 - a_1 + a_2 = 0(-1 - a_1 + a_2 = 0)$，若设 $a_1 + a_2 = l \geqslant 2$，则必有

$$a_1 = \frac{1}{2}(l+1), \quad a_2 = \frac{1}{2}(l-1)$$

$$\left(a_1 = \frac{1}{2}(l-1), \quad a_2 = \frac{1}{2}(l+1)\right),$$

由于 a_1, a_2 为非负整数，l 只能取奇数，于是可知，对任意 r，有下述复规范型

$$\dot{z}_1 = iz_1 + A_1 z_1^2 z_2 + A_2 z_1^3 z_2^2 + \cdots + A_r z_1^{r+1} z_2^r + o(|z_1, z_2|^{2r+1}),$$

$$\dot{z}_2 = -iz_2 + B_1 z_1 z_2^2 + B_2 z_1^2 z_2^3 + \cdots + B_r z_1^r z_2^{r+1} + o(|z_1, z_2|^{2r+1}),$$

利用上式及(6.21)可得(6.25)的下述实规范型：

$$\dot{x} = -y + \sum_{j=1}^{r} (a_j x - b_j y)(x^2 + y^2)^r + o(|x, y|^{2r+1}),$$

$$\dot{y} = x + \sum_{j=1}^{r} (b_j x + a_j y)(x^2 + y^2)^r + o(|x, y|^{2r+1}). \tag{6.26}$$

于是成立

命题 6.2 设 r 为任给自然数,则存在在原点邻域内解析的变换,把(6.25)化为规范型(6.26).

注意到,如取

$$L^*(\mu)=\begin{pmatrix}a_0(\mu) & -b_0(\mu)\\ b_0(\mu) & a_0(\mu)\end{pmatrix}, a_0(0)=0, b_0(0)=1,$$

则(6.17)满足,从而由定理 6.2 之后的讨论及命题 6.2 有

推论 6.1 设 $\mu\in R^n$ 为小参数,则 C^∞ 系统

$$\dot{x}=a_0(\mu)x-b_0(\mu)y+F(x,y,\mu),$$

$$\dot{y}=b_0(\mu)x+a_0(\mu)y+G(x,y,\mu),$$

(其中 $F,G=O(|x,y|^2)$)可化为下述 C^∞ 系统

$$\dot{x}=\sum_{j=0}^{r}(a_j(\mu)x-b_j(\mu)y)(x^2+y^2)^j+O(|x,y|^{2r+2}),$$

$$\dot{y}=\sum_{j=0}^{r}b_j(\mu)x+(a_j(\mu)y)(x^2+y^2)^j+O(|x,y|^{2r+2}).$$

定义 6.1 我们说原点是(6.25)或(6.26)的 k 阶细焦点,如果(6.26)满足 $a_j=0, j=1,\cdots,k-1, a_k\neq 0$.

对系统(6.25),有下述计算量 a_1 的公式,其推导将在以后给出.

$$a_1=\frac{1}{16}[f_{xxx}+f_{xyy}+g_{xxy}+g_{yyy}+f_{xy}(f_{xx}+f_{yy})$$
$$-g_{xy}(g_{xx}+g_{yy})-f_{xx}g_{xx}+f_{yy}g_{yy}]_{(0,0)}.$$

再考虑含参数的二维系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=(\lambda+a_0(\mu))x+f(x,y,\mu),\\ \dot{y}&=(-\lambda+b_0(\mu))y+g(x,y,\mu),\end{aligned}\tag{6.27}$$

其中 $\lambda>0, f, g=O(|x,y|^2)$ 为 C^r 函数, $r\geqslant 3, \mu\in R^n$ 为小参数且 $a_0(0)=b_0(0)=0$, 这表示当 $\mu=0$(6.27)以原点为细鞍点. 与前面类似可证

命题 6.3 在 $(x,y,\mu)=(0,0,0)$ 的邻域内存在一变换, 关于 (x,y) 为解析的, 关于 μ 为 C^r 的, 把(6.27)化为下述 C^r 规范型:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda\left[x+\sum_{j=0}^{m}a_j(\mu)(xy)^j x+R_1(x,y,\mu)\right],\\ \dot{y} &= \lambda\left[-y+\sum_{j=0}^{m}b_j(\mu)(xy)^j y+R_2(x,y,\mu)\right],\end{aligned}\tag{6.28}$$

其中 $R_1, R_2=o(|x,y|^r)\in C^r$, m 为 $\frac{1}{2}(r-1)$ 的整数部分, 即 $m=\left[\frac{r-1}{2}\right]$.

令 $c_j=a_j(0)+b_j(0), j=1,\cdots,m$, 则与(6.26)类似可定义方程(6.27)$(\mu=0)$的 k 阶细鞍点, 特别称 $c_1=a_1(0)+b_1(0)$ 为方程(6.27)$(\mu=0)$在原点的一阶鞍点量, 不难给出计算 c_1 的公式如下(其推导可参考[80]):

$$c_1=\frac{1}{2\lambda}\left[f_{xxy}+g_{xyy}-\frac{1}{\lambda}(f_{xx}f_{xy}-g_{xy}g_{yy})\right]_{x=y=\mu=0}.$$

在研究同、异宿分支时需要用到比(6.28)更标准的规范型. 为了以后的需要, 我们证明下列命题:

命题 6.4 考虑含小参数 $\mu\in R^n$ 的系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda_1(\mu)x+f_1(x,y,\mu),\\ \dot{y} &= \lambda_2(\mu)x+f_2(x,y,\mu),\end{aligned}\tag{6.29}$$

其中 $\lambda_1(0)=\lambda_{10}>0, \lambda_2(0)=\lambda_{20}<0, f_i=O(|x,y|^2)\in C^r, r\geqslant 2$, 则存在形如 $u=U[1+g_1(V,\mu)], v=V[1+g_2(U,\mu)]$ 的 C^{r-1} 变换, 其中 $U=U(x,y,\mu)=O(|x,y|), V=V(x,y,\mu)$

$=O(|x,y|)$，且 $U,V\in C^r$, $g_i(u,\mu)=O(|u|)\in C^{r-1}$，把 (6.29)化为

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \lambda_1 u[1+h_1(u,v,\mu)],\\ \dot{v} &= \lambda_2 v[1+h_2(u,v,\mu)]\end{aligned} \tag{6.30}$$

其中 $h_i=uvh_i^*\in C^{r-1}$, $h_i^*\in C^{r-2}$, $i=1,2$.

证明 以下为了方便，在书写中省去参数 μ，由稳定流形定理，(6.29)在原点有 C^r 局部稳定流形 W_0^s 与不稳定流形 W_0^u，它们在原点分别与 y 轴和 x 轴相切，因此可分别表示为

$$W_0^s: x = k_1(y) = O(y^2)\in C^r,$$

$$W_0^u: y = k_2(x) = O(x^2)\in C^r,$$

且满足

$$\begin{aligned}F_1(k_1(y),y) &= k_1'(y)F_2(k_1(y),y),\\ F_2(x,k_2(x)) &= k_2'(x)F_1(x,k_2(x)),\end{aligned} \tag{6.31}$$

其中 $F_1(x,y)=\lambda_1 x+f_1(x,y,\mu)$, $F_2(x,y)=\lambda_2 y+f_2(x,y,\mu)$，令

$$u = x-k_1(y),\ v = y-k_2(x), \tag{6.32}$$

其逆变换为 $x=u+R_1(u,v)$, $y=v+R_2(u,v)$, $R_i=O(|u,v|^2)\in C^r$, $i=1,2$，由(6.29)与(6.32)得

$$\begin{aligned}\dot{u} &= F_1(u+k_1(y),y)-k_1'(y)F_2(u+k_1(y),y)\equiv P(u,y),\\ \dot{v} &= F_2(x,v+k_2(x))-k_2'(x)F_1(x,v+k_2(x))\equiv Q(x,v),\end{aligned} \tag{6.33}$$

其中 P 关于 u 为 C^r 的，关于 y 为 C^{r-1} 的，Q 关于 v 为 C^r 的，关于 x 为 C^{r-1} 的，且由(6.31)知，$P(0,y)=Q(x,0)=0$，于是由微分中值定理得

$$
\begin{aligned}
P(u,y) &= u\int_0^1 P_u(tu,y)\mathrm{d}t \equiv uP_1(u,y),\\
Q(x,v) &= v\int_0^1 Q_v(x,tv)\mathrm{d}t \equiv vQ_1(x,v).
\end{aligned}
\tag{6.34}
$$

易见 P_1, Q_1 为 C^{r-1} 函数. 令

$$
\begin{aligned}
P_2(u,v) &= P_1(u, v+R_2),\\
Q_2(u,v) &= Q_1(u+R_1, v),
\end{aligned}
\tag{6.35}
$$

则 P_2, Q_2 为 C^{r-1} 函数, 且易知 $P_2(0,0)=\lambda_1, Q_2(0,0)=\lambda_2$. 于是由(6.33)～(6.35)知,

$$
\begin{aligned}
\dot{u} &= uP_2(u,v) = \lambda_1 u + uf_3(u,v),\\
\dot{v} &= vQ_2(u,v) = \lambda_2 v + vf_4(u,v),
\end{aligned}
\tag{6.36}
$$

其中 $f_i \in C^{r-1}, f_i(0,0)=0, (i=3,4)$. 进一步作变换

$$
x = u + h_3(u), \quad y = v + h_4(v), \tag{6.37}
$$

其中 x, y 为新变量, h_3, h_4 为待定函数, 且满足 $h_i(0)=h_i'(0)=0, i=3,4$. 易知(6.37)的逆变换为 $u = x + O(h_3), v = y + O(h_4)$, 因此(6.36)的第一式化为

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \lambda_1[x - h_3(u)] + uf_3 + h_3'(u)(\lambda_1 u + uf_3)\\
&= \lambda_1 x + u\left[f_3 + h_3'(u)(\lambda_1 + f_2) - \frac{\lambda_1}{u}h_3(u)\right],
\end{aligned}
\tag{6.38}
$$

取 h_3 满足 $f_3(u,0) = h_3'(u)(\lambda_1 + f_3(u,0) = \frac{\lambda_1}{u}h_3(u)$, 即

$$
h_3(u) = ue^{k(u)}\int_0^u \frac{-f_3(u,0)}{u(\lambda_1 + f_3(u,0))}e^{-k(u)}\mathrm{d}u, \tag{6.39}
$$

其中 $k(u) = \int_0^u \frac{-f_3(u,0)}{u(\lambda_1 + f_3(u,0))}\mathrm{d}u$. 由于 $\frac{f_3(u,0)}{u} = \int_0^1 f_{3u}(tu,$

0)d$u\in C^{r-2}$,可知 $k'(u)\in C^{r-2}$,$k(u)\in C^{r-1}$,从而由(6.39)知 $h_3/u\in C^{r-1}$,于是由 h_3 所满足的方程知 $h'_3\in C^{r-1}$,从而 $h_3\in C^r$,因而利用微分中值定理,(6.38)可写成

$$\dot{x} = \lambda_1 x + uv\tilde{f}_3(u,v), \tag{6.40}$$

其中 $v\tilde{f}_3\in C^{r-1}$且 $\tilde{f}_3$ 关于 v 为C^{r-2}的,关于 u 为C^{r-1}的.同理可取 $h_4\in C^r$,使(6.36)第二式化为

$$\dot{y} = \lambda_2 y + uv\tilde{f}_4(u,v), \tag{6.41}$$

其中 $u\tilde{f}_4\in C^{r-1}$且 $\tilde{f}_4$ 关于 u 为 C^{r-2}的,关于 v 为 C^{r-1}的.将(6.37)的逆变换代入(6.40)与(6.41)可得

$$\dot{x}=\lambda_1 x + xyf_5(x,y), \quad \dot{y}=\lambda_2 y + xyf_6(x,y), \tag{6.42}$$

其中 $yf_5,xf_6\in C^{r-1}$,且 f_5 关于 y 为C^{r-2}的,f_6 关于 x 为C^{r-2}的,对式(6.42)再引入变换

$$u = x + xh_5(y), \quad v = y + yh_6(x), \tag{6.43}$$

其中 u,v 为新变量,h_5,h_6 为待定函数,满足 $h_i(0)=0,i=5,6$,(6.43)的逆变换为 $x=u+O(uh_5(v))$,$y=v+O(vh_6(u))$,且有

$$xy = uv(1+O(|u,v|)), \tag{6.44}$$

由(6.43)及(6.42)第一式可得

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \lambda_1 x + xyf_5 + (\lambda_1 x + xyf_5)h_5 + xh'_5(y)(\lambda_2 y + xyf_6)\\ &= \lambda_1 u + xy[f_5(1+h_5) + h'_5(\lambda_2 + xf_6),\end{aligned} \tag{6.45}$$

取 h_5 满足方程

$$f_5(0,y)(1+h_5) + h'_5(y)\lambda_2 = 0, \tag{6.46}$$

即 $h_5(y)=-e^{-\varphi(y)}\int_0^y \frac{f_5(0,y)}{\lambda_2}e^{\varphi(y)}\mathrm{d}y$,其中 $\varphi(y)=\int_0^y \frac{1}{\lambda_2}f_5(0,$

$y)\mathrm{d}y\in C^{r-1}$，从而 $h_5\in C^{r-1}$，且由(6.46)及 $yf_5\in C^{r-1}$ 知 $yh_5'\in C^{r-1}$，于是式(6.45)可写成

$$\dot{u} = \lambda_1 u + x^2 y\tilde{f}_5(x,y),$$

其中 $\tilde{f}_5\in C^{r-2}$，$xy\tilde{f}_5\in C^{r-1}$. 同理存在 C^{r-1} 函数 $h_6(x)$ 使(6.42)第二式成为

$$\dot{v} = \lambda_2 v + xy^2\tilde{f}_6(x,y),$$

其中 $\tilde{f}_6\in C^{r-2}$，$xy\tilde{f}_6\in C^{r-1}$. 因此可知变换(6.43)把(6.42)化为

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \lambda_1 u + u^2 v f_7(u,v),\\ \dot{v} &= \lambda_2 v + uv^2 f_8(u,v),\end{aligned}\tag{6.47}$$

其中 $f_i\in C^{r-2}$，$uvf_i\in C^{r-1}$，$i=7,8$. 取 $h_i=uvf_{6+i}$，$i=1,2$，则由(6.47)即得(6.30). 将变换(6.32)，(6.37)与(6.43)复合即得命题中所述变换的形式. 证毕.

下述命题称为有限光滑定理，是由 Ilyashenko 与 Yakovenko([75])获得的(此处证略).

命题 6.5 设(6.29)为 C^∞ 系统，令 $\lambda(\mu)=-\lambda_2(\mu)/\lambda_1(\mu)$，$\lambda_0=\lambda(0)$，$k$ 为任一给定自然数. 如果 λ_0 为无理数，则当 $|\mu|$ 充小时(6.29)在原点附近 C^∞ 等价于 $\dot{x}=x$，$\dot{y}=-\lambda(\mu)y$. 若 $\lambda_0=p/q$ 为有理数，则存在自然数 $N(k)>0$，使(6.29)在原点附近 C^k 等价于

$$\dot{x} = x,\ \dot{y} = y\Big[-\lambda_0 + \sum_{i=0}^{N(k)}\alpha_i(\mu)(x^p y^q)^i\Big],$$

其中 $\alpha_i(\mu)$ 为 μ 的光滑函数.

最后考虑三维 C^∞ 系统

$$\dot{x} = Lx + O(|x|^2),\tag{6.48}$$

其中

$$L=\begin{pmatrix}0 & -\beta & 0\\ \beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\beta\neq 0,$$

易知 L 的特征值为$\lambda_1=\beta i,\lambda_2=-\beta i,\lambda_3=0$，取

$$T=\begin{pmatrix}1 & i & 0\\ i & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

与命题 6.2 类似可证：

命题 6.6 方程(6.48)的三次规范型为

$$\dot{x}=Lx+g_2(x)+g_3(x)+O(|x|^4),$$

其中

$$g_2(x)=\begin{pmatrix}(A_1x_1-B_1x_2)x_3\\ (B_1x_1+A_1x_2)x_3\\ C_1(x_1^2+x_2^2)+D_1x_3^3\end{pmatrix},$$

$$g_3(x)=\begin{pmatrix}(A_2x_1-B_2x_2)(x_1^2+x_2^2)+(A_3x_1-B_3x_2)x_3^2\\ (B_2x_1+A_2x_2)(x_1^2+x_2^2)+(B_3x_1+A_3x_2)x_3^2\\ C_2(x_1^2+x_2^2)x_3+D_2x_3^3\end{pmatrix}.$$

习　题

1. 对线性方程(1.7)，画出当 $a<0$ 与 $a=0$ 时的相图.
2. 设原点为平面线性系统 $\dot{x}=ax+by,\dot{y}=cx+dy$ 的双曲鞍点，试求其稳定集与不稳定集的直线方程.
3. 若(1.1)中的矩阵 A 的每个实 Jordan 块或是一阶的(与实特征值对应)或为二阶的(与复特征值对应)，则称 A 为半单矩阵. 试证(1.1)的中心集中每个轨线都是有界的当且仅当 A 是半单的.
4. 设 A 为常矩阵，$f:R^n\to R^n$ 为连续函数，证明 $x(t)$是方程 $\dot{x}=Ax+f(x)$

的解当且仅当 $x(t)=e^{At}[x(0)+\int_0^t e^{-AS}f(x(s))\mathrm{d}s]$.

5. 求周期线性方程

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}a_0+a_1\cos kt+a_2\sin kt\\ b_0+b_1\cos kt+b_2\sin kt\end{pmatrix}$$

的 Poincaré 映射,其中 a_i 与 b_i 为常数,k 为自然数.

6. 设 $f(t)$为连续的 2π 周期函数,证明二阶周期方程 $\ddot{x}+x=f(t)$有一个 2π 周期解当且仅当 $\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=0$.

7. 证明若在(1.8)中,

$$A(t)=\begin{pmatrix}-1+\frac{3}{2}\cos^2 t & 1-\frac{3}{2}\sin t\cos t\\ -1-\frac{3}{2}\sin t\cos t & -1+\frac{3}{2}\sin^2 t\end{pmatrix},$$

则 $A(t)$的特征值为常数且具有负实部,但(1.8)存在正向无界解$(-\cos t,\sin t)e^{t/2}$(Markus-Yamabe).

8. 求出系统 $\dot{x}=x^2,\dot{y}=-y$ 的所有中心流形.

9. 考虑含参数的二维系统

$$\dot{x}=-\cos(x-y)+1+\varepsilon,$$
$$\dot{y}=-y-\cos(x-y)+1+\varepsilon,$$

证明该系统在原点存在含参数的中心流形 $H(x,\varepsilon)=\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon^2+2\varepsilon x-\frac{1}{2}x^2+O(|x,\varepsilon|^3)$,并用来讨论奇点分支.

10. 证明系统 $\dot{x}=-x^3,\dot{y}=-y+x^2$ 不存在解析的中心流形(提示:设 $h(x)=\sum_{i\geq 2} c_i x^i$ 为中心流形,则 $c_2=1$,对奇数 i 有 $c_i=0$,对偶数 i 有 $c_{i+2}=ic_i$).

11. 求下列方程的中心流形的近似表达式,并讨论原点的稳定性.

(1) $\dot{x}=xy,\dot{y}=-y+\lambda x^2$,

(2) $\dot{x}=\lambda x^2-y^2,\dot{y}=-y+x^2+xy$,

(3) $\dot{x}=-y+xz,\dot{y}=x+yz,\dot{z}=-z-x^2-y^2+z^2$.

12 (积分不等式). 设 $u(t),v(t)$为区间$[a,b]$的非负连续函数,$M(t)$为可

微函数,且 $v(t)\leqslant M(t)+\int_a^t v(s)u(s)\mathrm{d}s, a\leqslant t\leqslant b$,证明对 $a\leqslant t\leqslant b$ 有

$$v(t)\leqslant M(a)\exp\int_a^t u(s)\mathrm{d}s+\int_a^t e^{\int_s^t u(\tau)\mathrm{d}\tau}M'(s)\mathrm{d}s.$$

13. 设 $f_1(x,y)$ 与 $f_2(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续且关于 y 为 C^1 的且有 $f_1(x,y)\leqslant f_2(x,y)$,又存在 $x_n>a$ 且 $x_n\to a$(当 $n\to\infty$)使 $f_1(x_n,y)<f_2(x_n,y)$,证明对 $y_0\in(c,d)$,方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_i(x,y)$ 的满足 $y_i(a)=y_0$ 的解 $y_i(x)$ 有 $y_1(x)\leqslant y_2(x)$(当 $(x,y_i(x))\in(a,b]\times[c,d]$ 时).
14. 讨论三次系统 $\dot{x}=xy+ax^3+bxy^2, \dot{y}=-y+cx^2+dx^2y$ 在原点的稳定性.
15. 设 ε 为小参数,试分析方程 $\dot{x}=\varepsilon x-x^2+2xy, \dot{y}=(\varepsilon-1)y+y^2+xy$ 在原点附近奇点的分支.
16. 考虑 T 周期系统 $\dot{x}=[A+\varepsilon B(t)]x, x\in R^n$,其中 A 的特征值均有负实部,证明当 $|\varepsilon|$ 充分小时该系统的一切解都正向趋于零.
17. 画出下列 Hamilton 系统的相图:
    (1) $\dot{x}=y, \dot{y}=-x(x^2-1)$,
    (2) $\dot{x}=y, \dot{y}=-x(1-x^2)$,
    (3) $\dot{x}=y-y^2, \dot{y}=-x+ax^2$.
18 (Cetaev). 设 U 为原点的某邻域,$f:U\to R^2$ 为 C^1 函数,如果存在开集 D 及 C^1 函数 $V:\bar{D}\to R$,满足:(1)原点是 D 的边界点;(2)对位于 U 中的每个边界点有 $V(x)=0$;(3)对一切 $x\in D\cap U$ 有 $V(x)>0, \dot{V}_{(5.2)}(x)>0$,证明原点是(5.2)的不稳定奇点.
19. 利用上题证明原点是方程 $\dot{x}=x^3+x^2y, \dot{y}=-y+x^2$ 的不稳定奇点 $\left(\text{提示:取 } v=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2\right)$.
20. 证明椭圆 $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}y^2=\frac{1}{9}$ 包含在方程 $\dot{x}=-x+y^2, \dot{y}=-2y+3x^2$ 在原点的吸引域中.
21 (沈伯骞对 Filippov 结果的推广). 考虑标量微分方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=az^{\frac{p}{p+1}}-h_0(y), z\geqslant 0,$$

其中 $h_0(y)=|y|^p\operatorname{sgn}y, p>0, a\in R$,记

$$b(p)=(p+1)\left[\frac{p+1}{p}\right]^{\frac{p+1}{p}},L=\left\{(z,y)\middle|h_0(y)=az^{\frac{p+1}{p}},z>0\right\},$$

试证,若 $a<b(p)(a>-b(p))$,则所述方程过 L 上任一点的积分曲线比分别交正、负 y 轴于点 A,B 且 $y_A\geqslant0,y_B<0(y_A>0,y_B\leqslant0)$(参考[65]或[106]).

22. 证明:若 $h_0(y)=|y|^p\mathrm{sgn}y[1+o(1)]$(当 $|y|\ll1$ 时),则上题的结论在原点附近成立.进一步证明,设存在 $p>0$ 使得当 $|y|\ll1$ 时,

(1) $yh(y)>0,|h(y)|\geqslant|y|^p$,或

(2) $h_0(y)=|y|^p\mathrm{sgn}y[1+o(1)]$,

令 $Q(x)=F(x)[G(x)]^{\frac{-p}{p+1}}$,则对方程 $\dot{x}=h(y)-F(x),\dot{y}=-g(x)$(其中 $F(0)=h(0)=0$,对 $|x|\ll1$ 有 $xg(x)>0,F,g,h$ 连续,且 F,h 分别对 $x\neq0$ 与 $y\neq0$ 为 C^1 的)有下述结论:(i)若 $\limsup\limits_{x\to0^+}Q(x)<b(p)$,则在原点附近从正 y 轴上点出发的正半轴必与负 y 轴相交且不在第一象限趋于原点;(ii)若 $\liminf\limits_{x\to0^-}Q(x)>-b(p)$,则在原点附近从负 y 轴上点出发的正半轴必与正 y 轴相交且不在第三象限趋于原点(韩茂安).

23. 设存在 $p>0,\varepsilon>0$ 使当 $|y|\ll1$ 时 $yh(y)>0,|h(y)|\leqslant|y|^p+|y|^{p+\varepsilon}$,试证明(1)若当 $0<x\ll1$ 时 $F(x)\geqslant b(p)[G(x)]^{\frac{p}{p+1}}-G^q(x)$,$q>\dfrac{p}{p+1}$,则上题中的方程在原点附近从正 y 轴上点出发的正半轨必在第一象限进入原点;(2)若当 $0<-x\ll1$ 时 $F(x)\leqslant-b(p)[G(x)]^{\frac{p}{p+1}}-G^q(x),q>\dfrac{p}{p+1}$,则上题中的方程在原点附近从负 y 轴上点出发的正半轴必在第三象限进入原点(韩茂安).

24. 试画出下列方程的全局相图:

(1) $\dot{x}=x^2+y^2-1,\dot{y}=5(xy-1)$,

(2) $\dot{x}=y-ax^2,\dot{y}=-x$,

(3) $\dot{x}=y-ax^2,\dot{y}=-x^3$.

25. 设 F 与 g 为连续函数且当 $g(x)\neq0$ 时 F 与 g 在 x 为局部 Lipschitz 连续的.试证方程(4.5)过平面上任一常点都有惟一轨线通过.

26. 证明命题 6.6.

第二章　Poincaré 映射与周期解

本章我们对一般的高维自治与周期系统引入 Poincaré 映射，并以此为工具利用压缩映射原理与隐函数定理等分析方法来研究局部与非局部周期解的分支.

§1　双曲闭轨与曲线坐标

1.1　闭轨的稳定流形定理

考虑 n 维 C^r 自治系统

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.1}$$

其中 $f: R^n \to R^n$ 为 C^r 函数，$r \geqslant 1$. 设(1.1)有一周期轨线 $L: x = u(t), 0 \leqslant t \leqslant T$，$T$ 为 L 的周期. 由于(1.1)在 L 上无奇点，对任意点 $p \in L$，存在过 p 的 $n-1$ 维超平面 H 及 p 在 H 中的邻域 $U \subset H$，使得对 $x \in U$ 有 $f(x) \cdot \alpha \neq 0$，此处 α 表示 H 的单位法向量，例如，可取 $\alpha = f(p)/|f(p)|$. 进一步不妨设 $p = u(0)$，则 $u(t) = \varphi(t, p)$. 由解对初值的连续性知存在点 p 在 H 中的邻域 $V \subset U$，使得对 $x \in V$，存在最小正数 $\tau(x)$ 使 $\varphi(\tau(x), x) \in U$，其中 $\varphi(t, x)$ 表(1.1)的流，如图 1.1 所示.

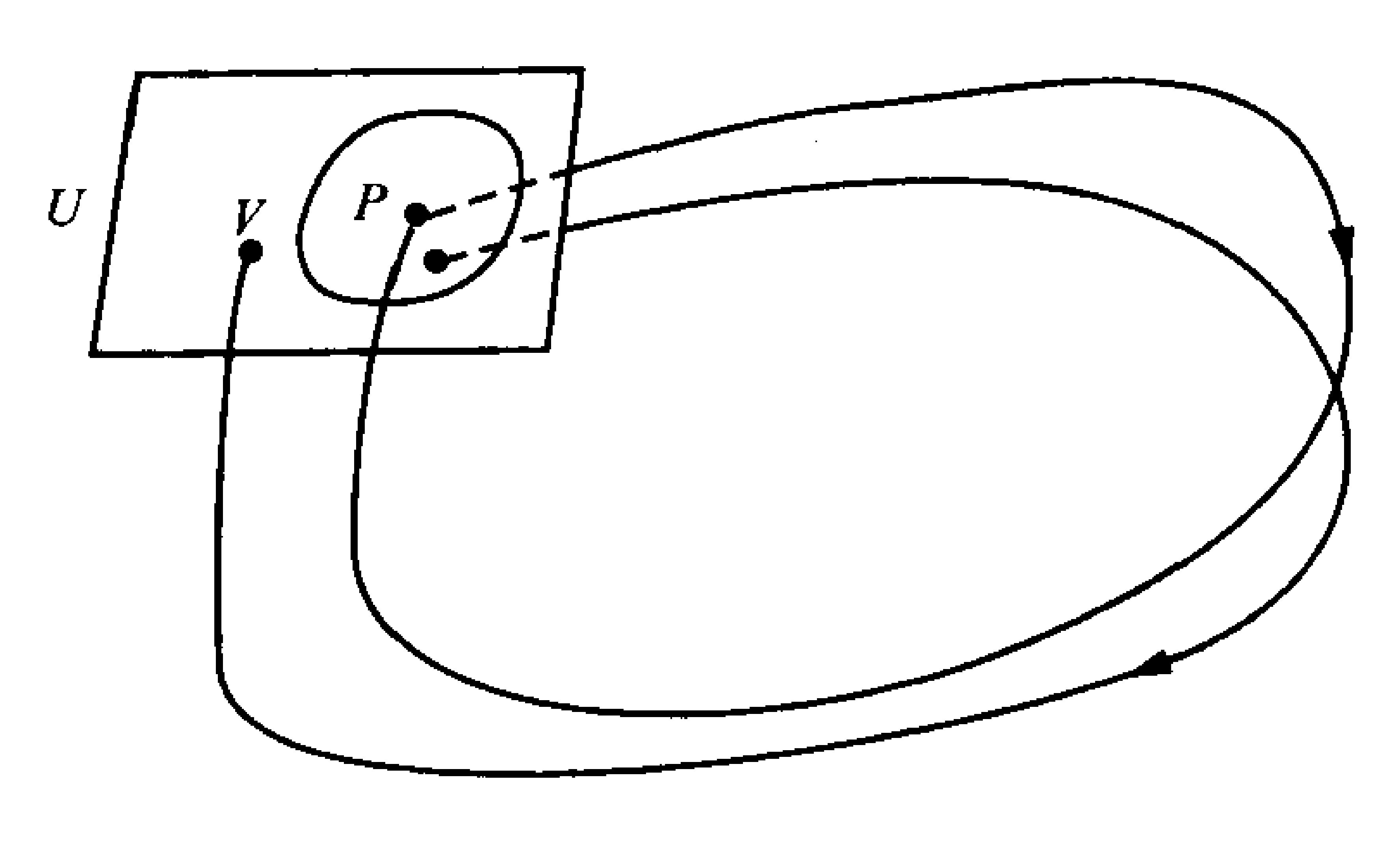


图 1.1

定义 1.1　令 $P(x)=\varphi(\tau(x),\ x)$，称 $P: V\to U$ 为(1.1)在 L 附近的 Poincaré 映射或回归映射，称 U 为(1.1)在点 p 的局部截面.

超平面 H 的方程可写为 $h(x)\equiv(x-p)\cdot\alpha=0$，令 $G(t,\ x)=h(\varphi(t,\ x))$，则由 $p=\varphi(T,\ p)$ 及 $f(p)\cdot\alpha\neq 0$ 知

$$G(T,\ p)=0,\ G_t(T,\ p)=f(p)\cdot\alpha\neq 0,$$

于是由隐函数定理，方程 $G(t,\ x)=0$ 确定惟一解 $t=\tau(x)$，且使得 $P(x)=\varphi(\tau(x),\ x)\in H$，此外，$\tau(x)$ 与(1.1)中的 f 有相同的光滑性，因此 P 为 C^r 映射，令

$$C=\varphi_x(t,\ x)\big|_{t=T,\ x=p},\tag{1.2}$$

则 C 为 n 阶矩阵. 因为 $\varphi(t,\ \varphi(s,\ x))=\varphi(t+s,\ x)$，两边对 s 求导并令 $s=0$ 可得

$$\varphi_x(t,\ x)f(x)=f(\varphi(t,\ x)),$$

再令 $t=T,\ x=p$，上式成为

$$Cf(p)=f(p),\tag{1.3}$$

该式说明矩阵 C 以 1 为特征值，相应的特征向量为 $f(p)$，因此 C 的特征值可设为 $1,\ \lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_{n-1}$，可证(请读者自证) $\lambda_j(1\leqslant j\leqslant n-1)$ 与点 p 和超平面 H 的选取无关.

定义 1.2　特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ 称为闭轨线 L 的特征乘数. 如果 $|\lambda_j|\neq 1, j=1,\ \cdots,\ n-1$，则称 L 为(1.1)的双曲闭轨. 若进一步有 $|\lambda_j|<1(>1), j=1,\ \cdots,\ n-1$，则称 L 为吸引的(排斥的). 非吸引也非排斥的双曲闭轨称为鞍型闭轨.

下面我们在 L 附近建立局部坐标，并由此给出 Poincaré 映射 P 的坐标表示. 设 $v_1,\ \cdots,\ v_{n-1}$ 为线性无关的向量，且与超平面 H 平行，因此这 $n-1$ 个向量可取为 H 的一组基，于是有非奇异矩阵 $Q=(v_1,\ \cdots,\ v_{n-1},\ f(p))$(视 v_j 为列向量)，截面 U 上任一

点 x 可表示为

$$x = x_1 v_1 + \cdots + x_{n-1} v_{n-1} + p$$
$$= (v_1, \cdots, v_{n-1})(x_1, \cdots, x_{n-1})^T + p, \qquad (1.4)$$

由于 $P(x) \in U$，因此 $P(x)$ 可表示为

$$P(x) = (v_1, \cdots, v_{n-1})(P_1, \cdots, P_{n-1})^T + p,$$

其中 $P_j = P_j(x)$，$j = 1, \cdots, n-1$，令

$$\overline{P}(x_1, \cdots, x_{n-1}) = (P_1, \cdots, P_{n-1})^T \Big|_{x = x_1 v_1 + \cdots + x_{n-1} v_{n-1} + p},$$

称 $\overline{P}$ 为 P 的坐标表示. 由 P 的定义可知

$$(v_1, \cdots, v_{n-1})\overline{P}(x_1, \cdots, x_{n-1}) + p$$
$$= \varphi(\tau^*(x_1, \cdots, x_{n-1}), x), \qquad (1.5)$$

其中 $x \in V$ 满足(1.4)，且 $\tau^*(x_1, \cdots, x_{n-1}) = \tau(x)$，对(1.5)两边关于$(x_1, \cdots, x_{n-1})$求微分，并利用(1.4)，然后令 $x_j = 0$，$j = 1, \cdots, n-1$，可得

$$(v_1, \cdots, v_{n-1})D\overline{P}(0) = \varphi_x(T, p)(v_1, \cdots, v_{n-1}) + f(p)D\tau^*(0)$$
$$= C(v_1, \cdots, v_{n-1}) + f(p)D\tau^*(0), \quad (1.6)$$

设矩阵 S 满足 $QS = (v_1, \cdots, v_{n-1})$，利用待定系数法(将 S 的各列元素写出并代入上式)并注意到 $v_1, \cdots, v_{n-1}$，$f(p)$ 为线性无关组可知

$$S = \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}_{n \times (n-1)},$$

故

$$Q^{-1}(v_1, \cdots, v_{n-1}) = \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

同理知

$$Q^{-1}f(p) = (0, \cdots, 0, 1)^T.$$

于是(1.6)两边左乘 Q^{-1} 可得

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} D\bar{P}(0) = Q^{-1}CQQ^{-1}(v_1, \cdots, v_{n-1}) + Q^{-1}f(p)D\tau^*(0)$$

$$= Q^{-1}CQ\begin{pmatrix} I_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

又由(1.3)知 $CQ = (Cv_1, \cdots, Cv_{n-1}, f(p))$,从而

$$\begin{aligned} Q^{-1}CQ &= (Q^{-1}Cv_1, \cdots, Q^{-1}Cv_{n-1}, Q^{-1}f(p)) \\ &= (Q^{-1}Cv_1, \cdots, Q^{-1}Cv_{n-1}, (0, \cdots, 0, 1)^T) \\ &= \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_2 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

将上式代入(1.7)可得

$$D\bar{P}(0) = C_1 \tag{1.9}$$

式(1.8)与(1.9)说明矩阵 C 的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ 即为 Poincaré 映射 P 的坐标表示 $\bar{P}$ 在原点的导数矩阵的特征值. 由此可证若 $|\lambda_j| < 1$, $j = 1, \cdots, n-1$, 则存在 p 的邻域 $V_0 \subset V$, 使对 $x \in V_0$, 点 $\varphi(t, x)$ 到 L 的距离具有性质

$$d(\varphi(t, x), L) \to 0 \quad (\text{当 } t \to +\infty),$$

我们称这样的 L 为轨道渐近稳定的.

下列两定理描述了(1.1)在 L 附近的轨线性态.

定理 1.1(闭轨的稳定流形定理) 设存在 $0 \leqslant k \leqslant n-1$,使 $|\lambda_j| < 1$, $j = 1, \cdots, k$, $|\lambda_j| > 1$, $j = k+1, \cdots, n-1$, 则存在点 p 的邻域 $N \subset R^n$ 使集合

$$S_L = \{x \in N \mid d(\varphi(t, x), L) \to 0, t \to +\infty\}$$

是 $k+1$ 维 C^r 正向不变流形，而集合

$$U_L = \{x \in N | d(\varphi(t, x), L) \to 0, t \to -\infty\}$$

是 $n-k$ 维 C^r 负向不变流形. 此外，$S_L \cap U_L = L$.

定理 1.2 设定理 1.1 的条件成立，则存在 $\beta>0, k>0$，使

(i) $\forall x \in S_L$，存在 $t_0 \in R$ 使

$$|\varphi(t, x) - \varphi(t-t_0, p)| < Ke^{-\beta t}, \ t \geqslant 0,$$

(ii) $\forall x \in U_L$，存在 $t_0 \in R$ 使

$$|\varphi(t, x) - \varphi(t-t_0, p)| < Ke^{\beta t}, \ t \leqslant 0.$$

集合 S_L 与 U_L 分别为正向、负向不变的，即它们分别由(1.1)的正半轨、负半轨组成，分别称为(1.1)在 L 的(局部)稳定与不稳定流形. 上述两定理的证明可在[68]或[159]等书中找到.

注 1.1 如果矩阵 C 的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ 中有满足 $|\lambda_j| = 1$ 者，则闭轨 L 不是双曲的，且(1.1)在 L 附近存在局部不变的 C^r 中心流形.

例 1.1 考虑三维系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x(x^2+y^2-1), \\ \dot{y} &= x - y(x^2+y^2-1), \ \dot{z} = az, \end{aligned} \tag{1.10}$$

其中 $a \in R$. 易知利用柱坐标，(1.10)可写为

$$\dot{r} = r(1-r^2), \ \dot{\theta} = 1, \ \dot{z} = az,$$

易求得上方程的流为 $\psi(t, r, \theta, z) = ((1+(r^{-2}-1)e^{-2t}, t+\theta, e^{at}z) \equiv (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$. 取截面 U 为 $U = \{(r, \theta, z) | r>0, \theta=0, z \in R$，注意到(1.10)的流 $\varphi(t, x, y, z)$ 为

$$\varphi = (\psi_1 \cos\psi_2, \psi_1 \sin\psi_2, \psi_3), \ (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta),$$

可知 $\tau(x, y, z) = 2\pi$，因此(1.10)的 Poincaré 映射 $P: U \to U$ 为

$$P(r, 0, z) = \varphi(2\pi, r, 0, z) = ((1 + (r^{-2} - 1)e^{-4\pi})^{-\frac{1}{2}}, e^{2\pi a}z),$$

映射 P 有不动点$(r, 0, z)=(1, 0, 0)$, (1.10)过该点的轨线为闭轨 L: $x^2+y^2=1$, $z=0$, 映射 P 的坐标表示为

$$\bar{P}(r, z) = ((1 + (r^{-2} - 1)e^{-4\pi})^{-\frac{1}{2}}, e^{2\pi a}z),$$

因此

$$D\bar{P}(1, 0) = \begin{pmatrix} e^{-4\pi} & 0 \\ 0 & e^{2\pi a} \end{pmatrix},$$

于是,若 $a\neq 0$, 则 L 为双曲的,且 $a<0$ 时 L 为吸引的,其(全局)稳定流形为 $S_L = R^3 - \{0\}$; 当 $a>0$ 时 L 为鞍型闭轨,其稳定与不稳定流形分别为

$$S_L = \{(x, y, z) \mid z = 0, x^2 + y^2 > 0\},$$

$$U_L = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z \in R\}.$$

如果 $a=0$,则 L 不是双曲闭轨,此时 L 的稳定流形与 $a>0$ 时相同,且还有二维中心流形

$$M_c = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z \in R\},$$

且 M_c 上每条轨线都是闭轨. 当 $a>0$ 时(1.10)的相图如图 1.2 所示.

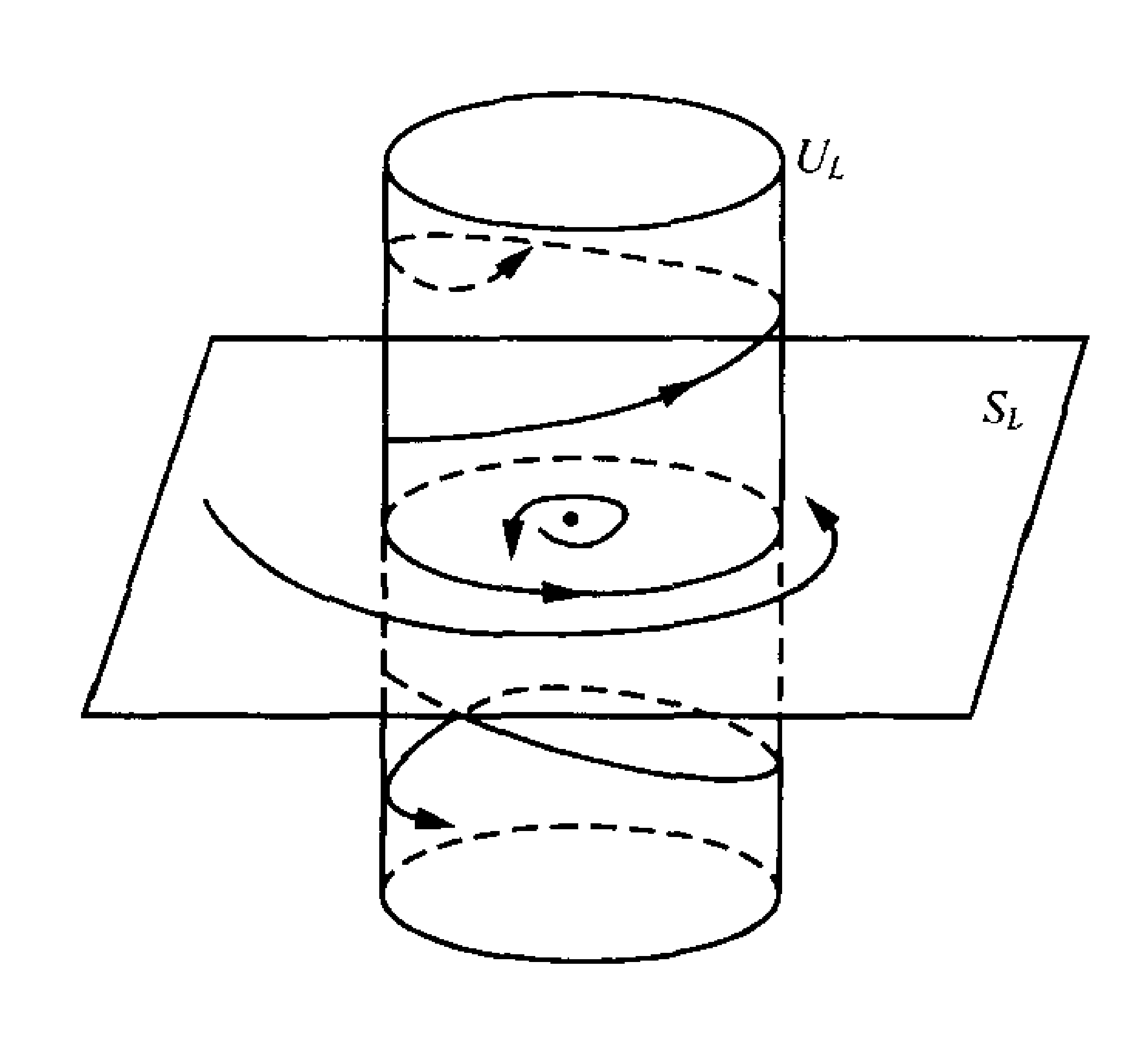


图 1.2

1.2 闭轨附近的曲线坐标

由定理 1.1 及隐函数定理可证(证明在后面给出),如果 L 为双曲闭轨,则(1.1)的任何自治扰动系统在 L 邻域内也有惟一的双曲闭轨,且稳定与不稳定流形的性质不改变.如果 L 为非双曲的,则在研究 L 的扰动分支时需要知道 Poincaré 映射较多的信息.为此,下面我们在 L 上建立曲线坐标.

如前设 $x=u(t)(0\leqslant t\leqslant T)$ 为 L 的参数表示,则对 L 上任一点 p 必存在 $\theta\in[0, T)$ 使 $u(\theta)=p$. 令 $v(\theta)=u'(\theta)/|(u'(\theta)|$,取(1.1)在点 p 的截面 U^{θ},与 $v(\theta)$ 垂直,则可证下面定理(其证明见[65]).

定理 1.3 存在 C^r 的 T 周期单位向量 $\xi_j(\theta)$, $j=2, \cdots, n$,使 $\{v(\theta), \xi_2(\theta), \cdots, \xi_n(\theta)\}$ 为一组正交基,而 $\{\xi_2(\theta), \cdots, \xi_n(\theta)\}$ 为 U^{θ} 的正交基.

我们称 $\{v(\theta), \xi_2(\theta), \cdots, \xi_n(\theta)\}$ 为(1.1)在 L 上的曲线坐标系.一般来说 $\xi_j(\theta)(2\leqslant j\leqslant n)$ 是难以明显写出的,但如果 $n=2$,则可取 $\xi_2(\theta)$ 为闭轨 L 在点 $u(\theta)$ 的单位法向量.

以向量 $\xi_2(\theta), \cdots, \xi_n(\theta)$ 为列构成一个 $n\times(n-1)$ 阶矩阵 $Z(\theta)=[\xi_2(\theta), \cdots, \xi(\theta)]$.考虑下述曲线坐标变换:

$$x = u(\theta) + Z(\theta)h,\ 0\leqslant\theta\leqslant T,\ h\in R^{n-1}, \tag{1.11}$$

及(1.1)的下述扰动系统:

$$\dot{x} = f(x) + F(x, \mu), \tag{1.12}$$

其中 $\mu\in R^m$, $F(x, 0)=0$, 我们有下述定理.

定理 1.4 存在 $b>0$, $n-1$ 维向量 $f_2(\theta, h)$, n 维行向量 $E(\theta, h)$,标量 $f_1(\theta, h)$, $n-1$ 阶矩阵 $A(\theta)$及$(n-1)\times n$ 矩阵 $B(\theta, h)$, 这些函数关于 θ 为 T 周期的,且当 $|h|<b$, $0\leqslant\theta\leqslant T$ 时关于 h 为 C^r 的,关于 θ 为 C^{r-1} 的,且满足

$$A(\theta) = Z^T(\theta)\left[-\frac{dZ}{d\theta} + f_x(u(\theta))Z(\theta)\right],$$

$$f_1(\theta, 0) = 0,\ f_2(\theta, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial h}(\theta, 0) = 0,\ E(\theta, 0) = u^T(\theta),\ B(\theta, 0) = Z^T(\theta),$$

使得变换(1.11)把方程(1.12)变成

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= 1 + f_1(\theta, h) + E(\theta, h)F(u(\theta) + Z(\theta)h, \mu), \\ \dot{h} &= A(\theta)h + f_2(\theta, h) + B(\theta, h)F(u(\theta) + Z(\theta)h, \mu), \end{aligned} \tag{1.13}$$

证明 由(1.11)与(1.12)得

$$(u'(\theta) + Z'(\theta)h)\dot{\theta} + Z(\theta)\dot{h}$$
$$= f(u + Zh) + F(u + Zh, \mu). \tag{1.14}$$

我们要从(1.14)解出$(\dot{\theta}, \dot{h})$. 为此,先对(1.14)两边左乘 v 的转置 v^T, 并注意到

$$v^T f(u) = v^T u'(\theta) = |u'(\theta)|,\ v^T Z(\theta) = 0,$$

可得

$$\dot{\theta} = 1 + f_1(\theta, h) + E(\theta, h)F(u + Zh, \mu), \tag{1.15}$$

其中

$$E^T(\theta, h) = [\,|u'(\theta)| + v^T(\theta)Z'(\theta)h\,]^{-1} v(\theta),$$

$$\begin{aligned} f_1(\theta, h) &= E(\theta, h)f(u + Zh) - 1 \\ &= E(\theta, h)[f(u + Zh) - f(u) - Z'(\theta)h]. \end{aligned}$$

再用 $Z^T(\theta)$左乘(1.14)的两边,并利用(1.15)及

$$Z^T f(u) = Z^T u'(\theta) = 0,\ Z^T Z = I_{n-1},$$

可得

$$\dot{h} = A(\theta)h + f_2(\theta, h) + B(\theta, h)F(u + Zh, \mu),$$

其中

$$A(\theta)=Z^T(\theta)[-Z'(\theta)+f_x(u)Z(\theta)],$$

$$B(\theta,h)=Z^T(\theta)[I_n-Z'(\theta)hE(\theta,h)],$$

$$f_2(\theta,h)=-Z^T(\theta)Z'(\theta)hf_1(\theta,h)$$
$$+Z^T(\theta)[f(u+Zh)-f(u)-f_x(u)Zh],$$

即得定理结论. 证毕.

进一步可证

定理 1.5 闭轨 L 的特征乘数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ 是 $n-1$ 维 T 周期线性方程

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta}=A(\theta)h \tag{1.16}$$

的特征乘数,且

$$\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}=\exp\oint_L \mathrm{tr}f_x\mathrm{d}t. \tag{1.17}$$

证明 固定 $p=u(0)\in L$, 则有 $u(t)=\varphi(t,p)$, 易知 $X(t)=\varphi_x(t,p)$为(1.1)在 L 的线性化方程

$$\dot{y}=f_x(u(t))y$$

的基本解矩阵,从而由(1.2)知 $C=X(T)$,于是由第一章引理 1.4 即知(1.17)成立.

设 U 为(1.1)过点 p 的截面,由定理 1.3,$Z(0)$的 $n-1$ 个列向量构成 U 所在超平面的正交基,因此任一点 $x\in U$ 可写为

$$x=u(0)+Z(0)h_0,\ h_0\in R^{n-1},$$

于是流 φ 可表示为

$$\varphi(t,x)=u(\theta(t,0,h_0))+Z(\theta(t,0,h_0))h(t,0,h_0),$$

其中$(\theta(t, 0, h_0), h(t, 0, h_0))$为(1.13)$(\mu=0)$的解,且满足$\theta(0, 0, h_0)=0$, $h(0, 0, h_0)=h_0$. 用$t=t^*(\theta, h_0)$表示$\theta=\theta(t, 0, h_0)$的反函数,且$t^*(0, h_0)=0$, 则$\tau(x)=t^*(T, h_0)$. 令$h^*(\theta, h_0)=h(t^*(\theta, h_0), h_0)$, 则有

$$\varphi(\tau(x), x) = u(T) + Z(T)h^*(T, h_0),$$

即

$$P(x) = u(0) + Z(0)h^*(T, h_0) \equiv u(0) + Z(0)\bar{P}(h_0),$$

这表示$\bar{P}(h_0)=h^*(T, h_0)$为 Poincaré 映射 P 的坐标表示. 另一方面,当$\mu=0$时由(1.13)得

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta} = A(\theta)h + O(|h|^2),$$

直接验证可知$h^*(\theta, h_0)$即是该方程满足$h(0)=h_0$的解. 设

$$h^*(\theta, h_0) = Y(\theta)h_0 + O(|h_0|^2), \quad Y(0) = I_{n-1},$$

代入上面的T周期方程可知$Y(\theta)$为线性方程(1.16)的基本解矩阵,从而有

$$D\bar{P}(0) = \frac{\partial h^*}{\partial h_0}(T, 0) = Y(T).$$

从而由(1.8)与(1.9)知L的特征乘数是$Y(T)$的特征值. 因为$Y(T)$的特征值就是(1.16)的特征乘数,由此即知定理结论成立. 证毕.

由(1.9)与定理1.5即得

推论 1.1 设$n=2$,则$\bar{P}'(0)=e^{\sigma}$, 其中$\sigma=\oint_L \mathrm{tr} f_x \mathrm{d}t$,从而平面系统(1.1)的闭轨$L$为双曲的当且仅当$\sigma\neq 0$, 且当$\sigma<0$ (>0)时L为吸引(排斥)的.

定义 1.3 设$n=2$,且取$Z(\theta)=(-v_2(\theta), v_1(\theta))$,其中

$v(\theta)=(v_1(\theta),\ v_2(\theta))$. 如果存在 $k\geqslant 1$ 使 $\bar{P}(h_0)-h_0=a_k h_0^k+o(h_0^k)$, $a_k\neq 0$, 则称 L 为 C^r 系统(1.1)的 k 重极限环. 若当 $0<|h_0|\ll 1$ 时 $h_0[\bar{P}(h_0)-h_0]<0(>0)$, 则称 L 为稳定(不稳定)的极限环. 若当 $0<|h_0|\ll 1$ 时 $\bar{P}(h_0)-h_0<0(>0)$, 则称 L 为半稳定极限环.

易见,偶数重极限环必为半稳定极限环,而奇数重极限环为稳定(当 $a_k<0$ 时)或不稳定(当 $a_k>0$ 时)极限环.

例 1.2 考虑平面二次系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y(bx+1)-(x^2+y^2-1),\\ \dot{y} &= x(bx+1),\end{aligned}\tag{1.18}$$

其中 $0<b<1$. 易知圆周 $L: x^2+y^2=1$ 为(1.18)的极限环. 注意到(1.18)的发散量为 $-by-2x$, 于是

$$\sigma=\oint_L(-by-2x)\mathrm{d}t=\oint_L\left[-by\frac{\mathrm{d}x}{-y(bx+1)}-2x\frac{\mathrm{d}x}{x(bx+1)}\right]$$

$$=\oint_L\frac{-2\mathrm{d}y}{bx+1}=-2\left[\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}y}{b\sqrt{1-y^2}+1}+\int_{1}^{-1}\frac{\mathrm{d}y}{-b\sqrt{1-y^2}+1}\right]$$

$$=-2\int_{-1}^{1}\frac{-2b\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y}{(1+b\sqrt{1-y^2})(1-b\sqrt{1-y^2})}$$

$$=4b\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y}{1-b^2(1-y^2)}>0.$$

因此 L 为(1.18)的不稳定单重极限环.

§2 周期轨道的自治扰动

本节考虑含参数方程(1.12). 设(1.12)右端的函数 f 与 F 均为 C^r 的, $r\geqslant 1$, 且当 $\mu=0$ 时(1.12)有闭轨 $L: x=u(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$. 我们将讨论当 μ 充分小时(1.12)在 L 附近周期解的分支

问题.

2.1 双曲闭轨的扰动

前面我们已说过双曲闭轨在自治扰动下的性质不变,本段我们利用由(1.13)所得的周期系统等来证明这一结论,即有

定理 2.1 设 L 为双曲闭轨,则存在 $b>0$ 使当 $|\mu|<b$ 时(1.12)在 L 的邻域内有惟一闭轨 L_μ,且 L_μ 也是双曲的,并与 L 有相同的稳定性.

证明 固定 $p=u(0)\in L$,取(1.1)过点 p 的截面 U,则与(1.1)类似可定义(1.12)的 Poincaré 映射 $P(x,\mu)$,$P(\cdot,\mu):V\to U$,其中 $V\subset U$ 为 p 的某邻域. 另一方面,利用定理 1.4,由(1.13)可得 T 周期方程

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta}=A(\theta)h+Z^T(\theta)F(u(\theta),\mu)+R(\theta,h,\mu),\qquad(2.1)$$

其中 $R=O(|h,\mu|^2)$. 设(2.1)的满足 $h(0)=h_0$ 的解为 $h^*(\theta,h_0,\mu)$,则由定理 1.5 的证明易知映射 $P(x,\mu)$的坐标表示为 $\overline{P}(h_0,\mu)=h^*(T,h_0,\mu)$. 易见(1.12)在 L 附近有闭轨当且仅当$P(x,\mu)$在 $x=p$ 附近有不动点,后者等价于 $\overline{P}(h_0,\mu)$在 $h_0=0$ 附近有不动点. 设

$$h^*(\theta,h_0,\mu)=Y(\theta)h_0+C(\theta)\mu+O(|h_0,\mu|^2),$$

$$Y(0)=I_{n-1},\ C(0)=0,$$

代入(2.1)中可得

$$Y'(\theta)=A(\theta)Y(\theta),$$

$$C'(\theta)=A(\theta)C(\theta)+Z^T(\theta)F_\mu(u,0).$$

因为 $Y(\theta)$为线性方程(1.16)的基本解矩阵,由常数变易公式知

$$C(\theta)=Y(\theta)\int_0^T Y^{-1}(s)Z^T(s)F_\mu(u(s),0)\mathrm{d}s,$$

因此

$$\overline{P}(h_0,\ \mu) = Y(T)h_0 + Y(T)\int_0^T Y^{-1}(\theta)Z^T(\theta)F_\mu(u(\theta),\ 0)\mathrm{d}\theta\mu$$
$$+ O(|h_0,\ \mu|^2), \tag{2.2}$$

由于 L 为双曲的,由定理1.5知 $Y(T)$的特征值的模不为1,因此由(2.2)及隐函数定理知 $\overline{P}(h_0,\ \mu)$有惟一不动点 $h_0^*(\mu) = O(\mu)$,且

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial h_0}(h_0^*,\ \mu) = Y(T) + O(|h_0^*,\ \mu|) = Y(T) + O(\mu),$$

因此当$|\mu|$充分小时$\frac{\partial \overline{P}}{\partial h_0}(h_0^*,\ \mu)$的特征值的模都不为1,且由定理1.1知,(1.12)的与 h_0^* 相应的闭轨 L_μ 与 L 的稳定流形、不稳定流形有相同的维数,即表示 L_μ 与 L 有相同的稳定性. 证毕.

注2.1 由定理2.1的证明知,如果 L 的任一特征乘数都不为1,则 $\det(Y(T) - I_{n-1}) \neq 0$,因而当$|\mu|$充分小时(1.12)在 L 附近必有惟一闭轨L_μ,但当 L 为非双曲时L_μ 与L 未必有相同的稳定性,且(1.12)在 L 附近可能出现不变环面等.

下面对二维与三维系统的非双曲闭轨的扰动分支做进一步的讨论.

2.2 二维系统的闭轨分支

设(1.12)为二维 C^r 系统,$r \geqslant 2$. 我们有

定理2.2 考虑二维 C^r 系统(1.12). (i) 如果 L 为(1.1)的二重极限环,则存在 C^r 函数 $\Delta(\mu) = O(\mu)$,使对充分小的$|\mu|$,当$\Delta(\mu) < 0(=0,\ >0)$时(1.12)在 L 附近没有闭轨(恰有二重环,恰有两个单重环);(ii) 如果 L 为(1.1)的 k 重环,$3 \leqslant k \leqslant r$,则当$|\mu|$充分小时(1.12)在 L 附近至多有k 个环,且当 k 为奇数时至少有一个环.

证明 设 L 为(1.1)的二重环,则由定理1.5及定义1.3知

$Y(T)=1$，从而函数(2.2)可写为

$$\bar{P}(h_0,\ \mu) = h_0 + a_0(\mu) + a_1(\mu)h_0 + a_2(\mu)h_0^2(1 + o(1)),$$

其中 $a_0(0)=a_1(0)=0$，$a_2(0)\neq 0$，令 $G(h_0,\ \mu)=\bar{P}(h_0,\ \mu)-h_0$，称 G 为(1.12)的后继函数. 由隐函数定理，存在函数 $b(\mu)=O(\mu)$ 使 $\frac{\partial G}{\partial h_0}(b(\mu),\mu)=0$，于是由 Taylor 公式及 $a_2(0)\neq 0$ 知

$$\begin{aligned} G(h_0,\ \mu) &= G(b(\mu),\ \mu) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial h_0^2}(b(\mu),\ \mu) \\ &\quad \cdot (h_0 - b(\mu))^2(1 + o(1)) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial h_0^2}(b(\mu),\ \mu)(1 + o(1))[(h_0 - b(\mu))^2 - \Delta(\mu)], \end{aligned}$$

其中

$$\Delta(\mu) = 2G(b(\mu),\ \mu)\Big/\Big[\frac{\partial^2}{\partial h_0^2}(1 + o(1))\Big] = O(\mu),$$

由此即知结论(i)成立. 利用 Rolle 定理及连续函数的性质易知结论(ii)成立. 证毕.

在 μ 所在的参数空间内，由 $\Delta(\mu)=0$ 给出的曲线称为半稳定环分支曲线或曲面，这一分支现象有时也称为极限环的鞍结点型分支.

对于平面系统，定理 1.4 可进一步改述如下.

引理 2.1 设 $n=2$，又记

$$v(\theta) = \frac{u'(\theta)}{|u'(\theta)|} = (v_1(\theta),\ v_2(\theta))^T,$$

$$Z(\theta) = (-v_2(\theta),\ v_1(\theta))^T,$$

则(1.13)成为

$$\dot{\theta} = 1 + f_1(\theta, h) + E(\theta, h)F(u + Zh, \mu),$$
$$\dot{h} = A(\theta)h + f_2(\theta, h) + Z^T(\theta)F(u + Zh, \mu), \tag{2.3}$$

其中

$$A(\theta) = \mathrm{tr} f_x(u) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln|f(u)|,$$

$$E(\theta, h) = (|f(u)| + v^T Z'(\theta)h)^{-1} v^T(\theta),$$

$$f_1(\theta, h) = E(\theta, h)[f(u + Zh) - f(u) - Z'(\theta)h],$$

$$f_2(\theta, h) = Z^T[f(u + Zh) - f(u) - f_x(u)Zh].$$

证明 由 $|v| = v_1^2 + v_2^2 = 1$,可知 $v_1 v_1' + v_2 v_2' = 0$,即 $Z^T(\theta)\cdot Z'(\theta) = 0$,因此由定理 1.4 的证明中 A 与 B 的表达式知

$$A(\theta) = Z^T(\theta)f_x(u)Z(\theta),\ B(\theta, h) = Z^T(\theta),$$

从而由定理 1.4,只须证

$$Z^T(\theta)f_x(u)Z(\theta) = \mathrm{tr} f_x(u) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln|f(u)|.$$

将二阶矩阵 $f_x(u)$和二维向量 $Z(\theta)$的元素写出来,经简单运算不难证明上式. 证毕.

应用引理 2.1,韩茂安与朱德明([65])证明了下述结果.

定理 2.3 设(1.12)为二维解析系统,且 $\mu \in R$. 又设

$$M \equiv \int_0^T e^{-\int_0^\theta \mathrm{tr} f_x(u(s))\mathrm{d}s} f(u(\theta)) \wedge F_\mu(u(\theta), 0)\mathrm{d}\theta \neq 0, \tag{2.4}$$

其中 $x \wedge y = x_1 y_2 - x_2 y_1$,则存在 $b > 0$ 及 L 的邻域 U 使

(i) 若 L 为奇重环,则当 $0 < |\mu| < b$ 时(1.12)在 U 中有惟一极限环且为双曲的;

(ii) 若 L 为偶重环,则对 $0 < |\mu| < b$,当 μ 在 $\mu = 0$ 某侧时

(1.12)在 U 中恰有两个极限环且均为双曲的，当 μ 在 $\mu=0$ 另一侧时(1.12)在 U 中无环；

(iii) 若 L 为非孤立的闭轨(即(1.1)的闭轨充满 L 的某邻域)，则当 $0<|\mu|<b$ 时(112)在 U 中没有闭轨.

证明 设 $f^{\perp}(u)=(-f_2(u), f_1(u))$，则由 $Z(\theta)$ 的取法知

$$Z^T(\theta)F_u(u, 0) = \frac{1}{|f(u)|}f^{\perp}(u)F_u(u, 0),$$

又易知

$$Y(\theta) = \exp\int_0^{\theta}A(s)\mathrm{d}s.$$

注意到由定理 2.1，不妨设 L 为非双曲闭轨，因此由引理 2.1 及(2.2)与(2.4)知

$$\begin{aligned}\overline{P}(h_0, \mu) - h_0 &= \frac{\mu M}{|f(u(0)|} + O(|h_0, \mu|^2)\\ &= G(h_0, \mu),\end{aligned} \tag{2.5}$$

因为 $M\neq 0$，由隐函数定理，存在惟一函数 $\mu=\mu(h_0)=O(h_0^2)$ 使 $G(h_0, \mu(h_0))=0$. 因为(1.12)为解析系统，可知 G 与 $\mu(h_0)$ 均为解析函数. 若 $\mu(h_0)\equiv 0$，则 $G(h_0, 0)=0$，这表示(1.1)在 L 附近的一切轨线都是闭轨，即 L 为非孤立的，此时由(2.5)知

$$G(h_0, \mu) = \mu\left[\frac{M}{|f(u(0))|} + O(h_0)\right],$$

从而当 $\mu\neq 0$ 时 $G\neq 0$，即当 $\mu\neq 0$ 充分小时(1.12)在 L 附近没有闭轨.

若 $\mu(h_0)\not\equiv 0$，则存在 $a_k\neq 0$ 使

$$\mu(h_0) = a_k h_0^k + O(h_0^{k+1}), \ k\geqslant 2,$$

由(2.5)有

$$G(h_0, \mu) = \frac{M}{|f(u(0))|}(\mu - a_k h_0^k) + O(|\mu h_0| + |h_0|^{k+1}),$$

从而

$$G(h_0, 0) = -\frac{M a_k h_0^k}{|f(u(0))|} + O(|h_0|^{k+1}), \tag{2.6}$$

这表示 L 为(1.1)的 k 重极限. 若 k 为奇数,则 $\mu = \mu(h_0)$有惟一反函数

$$h_0 = \left(\frac{\mu}{a_k}\right)^{\frac{1}{k}}(1 + o(1)) \equiv h_0(\mu),$$

由此即知当 $|\mu|$ 充分小时(1.12)在 L 附近有惟一极限环. 由于当 $|\mu| > 0$ 充分小时 $\frac{\partial G}{\partial h_0}(h_0(\mu), \mu) \neq 0$,因此该环是双曲的. 如果 k 为偶数,则 $\mu = \mu(h_0)$有两个反函数

$$h_0 = \left(\frac{\mu}{a_k}\right)^{\frac{1}{k}}(\pm 1 + o(1)),$$

其定义域为 $\mu a_k > 0$,因此当 $\mu a_k > 0(< 0)$时(1.12)在 L 附近恰有两个极限环(无环),且同上可证当 $\mu a_k > 0$ 时此两环是双曲的. 证毕.

例 2.1 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(x^2 + y^2 - 1)^2 + \mu x f(x, y), \\ \dot{y} &= x + y(x^2 + y^2 - 1)^2 + \mu y f(x, y), \end{aligned} \tag{2.7}$$

其中 f 为 x, y 的多项式. 当 $\mu = 0$ 时(2.7)有惟一极限环

$$L: x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

作变换 $x = (1-h)\cos\theta, y = (1-h)\sin\theta$,(2.7)成为

$$\dot{\theta} = 1,$$

$$\dot{h} = -(1-h)[(h^2 - 2h)^2$$

$$+\mu f((1-h)\cos\theta,\ (1-h)\sin\theta)].$$

当 $\mu=0$ 时由上式得

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta}=-4h^2(1+O(h)),$$

该方程满足 $h(0,\ h_0)=h_0$ 的解具有形式 $h(\theta,\ h_0)=h_0-4h_0^2\theta+O(|h_0|^3)$，于是

$$G(h_0,\ 0)=h(2\pi,\ h_0)-h_0=-8\pi h_0^2+O(|h_0|^3),$$

这说明 L 为二重环. 由(2.4)又知 $M=-\int_0^{2\pi}f(\cos\theta,\ \sin\theta)\mathrm{d}\theta$，且由(2.6)知，当 $M\neq0$ 时 $a_2=\frac{8\pi}{M}$. 从而由定理 2.3 知对充分小的 $|\mu|>0$，当 $\mu M>0(<0)$时(2.7)在 L 附近恰有两个单重环(无环). 例如，若取

$$f(x,\ y)=a(x^2+y^2)+bxy+c(x+y)+d,$$

则 $M=-2\pi(a+d)$，于是若 $|\mu|$ 充分小且 $\mu(a+d)<0(>0)$，则(2.7)在 L 附近恰有两个单重环(无环). 如果 $a=-d=1$，且取 $b=c=0$，则易知对一切充分小的 $\mu\neq0$，(2.7)在 L 附近恒有两个极限环. 这表明若 $M=0$，则定理 2.3 不再成立.

我们指出，定理 2.1～2.3 对柱面系统的第二类闭轨仍成立. 考虑柱面系统

$$\begin{aligned}\dot{\theta}&=S(\theta,\ r)+S_1(\theta,\ r,\ \mu),\\ \dot{r}&=R(\theta,\ r)+R_1(\theta,\ r,\ \mu),\end{aligned}\tag{2.8}$$

其中 $\mu\in R^m$，S,S_1，R 与 R_1 均为 C^k 函数，$k\geqslant1$，且关于 θ 为 2π 周期的，而且 $S_1(\theta,\ r,\ 0)=R_1(\theta,\ r,\ 0)=0$. 设当 $\mu=0$ 时(2.8)有一第二类闭轨

$$L:\theta=\theta(t),\ r=r(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,$$

这里 L 为第二类闭轨的含义是指存在 $T>0$ 使 $\theta(T)-\theta(0)=2\pi$ 且 $r(T)=r(0)$(由解的存在惟一性定理,这意味着对一切 $t\in R$ 有 $\theta(t+T)-\theta(t)=2\pi$, $r(t+T)=r(t)$). 易见,必存在 $0\leqslant t_0\leqslant T$,使 $R(\theta(t_0), r(t_0))=0$. 对 θ 作平移并注意到(2.8)为自治系统,可设 $t_0=0$, $\theta(0)=0$, 于是 $\theta(T)=2\pi$,且 L 在点$(0, r(0))$与 θ 轴相切. 令 $x=(\theta, r)$,$u(t)=(\theta(t), r(t))$,对(2.8)引入形如(1.11)的曲线坐标变换,可得一类似于(2.1)的 T 周期方程,从而可得形如(2.2)的 Poincaré 映像. 仿定义 1.3 可定义第二类闭轨 L 的重数,又可仿定理 2.1~2.3 来讨论(2.8)在 L 附近的第二类闭轨的分支(由于类似性,我们不在此列出这些定理). 特别地,L 是双曲的稳定(不稳定)闭轨当且仅当

$$\sigma=\oint_L(S_\theta+R_r)\mathrm{d}t<0(>0).$$

进一步,若沿 L 有

$$(-1)^iS(\theta, r)>0,\quad i=0\text{ 或 }1,$$

则 $\theta=\theta(t)$有反函数 $t=t(\theta)$,令 $r^*(\theta)=r(t(\theta))$, 则

$$\sigma=(-1)^i\int_0^{2\pi}\frac{(S_\theta+R_r)(\theta, r^*(\theta))}{S(\theta, r^*(\theta))}\mathrm{d}\theta,\tag{2.9}$$

且函数 $r=r^*(\theta)$为 2π 周期方程

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\frac{R(\theta, r)}{S(\theta, r)}\tag{2.10}$$

的 2π 周期解. 反之,上述方程的任何 2π 周期解必对应着(2.8)$(\mu=0)$的第二类闭轨. 此外,由定理 1.5 或定理 2.1 的证明知,方程(2.8)$(\mu=0)$在 L 附近的 Poincaré 映射的坐标表示 $\bar{P}(r_0)$即等于 $r(2\pi, r_0)$,其中 $r(\theta, r_0)$为(2.10)的满足 $r(0, r_0)=r_0$ 的解,且 r_0 在 $r^*(0)$附近变化. 因此称 $\bar{P}(r_0)=r(2\pi, r_0)$为(2.10)的 Poincaré 映射.

例 2.2 考虑下列形式的柱面方程

$$\dot{\theta} = S_0(\theta) + rS_1(\theta, r),$$

$$\dot{r} = r^k[R_0(\theta) + rR_1(\theta, r)], \tag{2.11}$$

其中 S_0, S_1, R_0 与 R_1 均为连续可微函数,且关于 θ 为 2π 周期的,$k \geqslant 1$ 为自然数.易见,如果对一切 θ 有 $S_0(\theta) > 0$,则(2.11)有下述周期轨线:

$$L: r = 0, \theta = \theta(t), 0 \leqslant t \leqslant T,$$

其中 $\theta(t)$与 T 满足

$$t = \int_0^{\theta(t)} \frac{\mathrm{d}\theta}{S_0(\theta)}, \quad T = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{S_0(\theta)}.$$

我们证明 L 为 k 重闭轨当且仅当 $a_k \equiv \int_0^{2\pi} \frac{R_0(\theta)}{S_0(\theta)} \mathrm{d}\theta \neq 0$.

事实上,由(2.11)可得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{R_0(\theta)}{S_0(\theta)} r^k + O(r^{k+1}),$$

设该方程满足 $r(0, r_0) = r_0$ 的解为

$$r(\theta, r_0) = r_0 r_1(\theta) + \cdots + r_0^k r_k(\theta) + O(r_0^{k+1}),$$

代入上方程可求得

$$r_1(\theta) = \exp\int_0^{\theta} \frac{R_0}{S_0} \mathrm{d}\theta \quad (\text{若 } k = 1),$$

或

$$r_1(\theta) = 1, \; r_2(\theta) = \cdots = r_{k-1}(\theta) = 0,$$

$$r_k(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{R_0}{S_0} \mathrm{d}\theta \quad (\text{若 } k > 1),$$

于是

$$r(2\pi,\ r_0)-r_0=\begin{cases}(e^{a_1}-1)r_0+O(r_0^2), & 若\ k=1,\\ a_k r_0^k+O(r_0^{k+1}), & 若\ k>1.\end{cases}$$

由此即得结论成立. 此外,由(2.9)知当 $k=1$ 时(2.11)的发散量 $S'_0(\theta)+R_0(\theta)$沿 L 的积分等于a_1.

2.3 三维系统的闭轨分支

现设(1.12)为三维系统,则矩阵 $Y(T)$为二阶可逆矩阵. 设 L 为非双曲闭轨,则 $Y(T)$有模为 1 的特征值. 设它有惟一的模为 1 的特征值且为单重的(即 L 是最简单的非双曲闭轨). 由于 $Y(T)$ 为实的,且对一切 θ 有 $\det Y(\theta)>0$,可知 $Y(T)$的 Jordan 标准型具有形式 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2)$,其中 $|\lambda_1|=1$, $|\lambda_2|\neq 1$, $\lambda_1\lambda_2>0$, 由 Floquet 理论,存在二阶矩阵 B 使 $Y(T)=e^{BT}$,于是若 $\lambda_1=1$, $\lambda_2>0$, $\lambda_2\neq 1$, 则 BT 的标准型为实矩阵 $\mathrm{diag}(0,\ \ln|\lambda_2|)$. 若 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2<0$, $\lambda_2\neq -1$, 则 BT 的标准型为复矩阵,此时若设 S 满足$Y^2(T)=Y(2T)e^{2ST}$,则 ST 的标准型为 $\mathrm{diag}(0,\ \ln|\lambda_2|)$. 以下先讨论 $\lambda_1=1$ 的情况.

设 $\mu\in R$,记 $F_0(x)=F_\mu(x,\ 0)$,则由(2.2)知,当 $\mu\in R$ 小时(1.12)在 L 附近有闭轨当且仅当存在h_0 充分小使

$$Eh_0+\mu K+F_2(h_0,\ \mu)=0, \tag{2.12}$$

其中

$$\begin{aligned} K&=\int_0^T Y(T)Y^{-1}(\theta)Z^T(\theta)F_0(u(\theta))\mathrm{d}\theta,\\ E&=Y(T)-I_2,\ F_2(h_0,\ \mu)=O(|h_0,\ \mu|^2), \end{aligned} \tag{2.13}$$

因为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2>0$,$\lambda_2\neq 1$,故矩阵 E 只有一个零特征值,因此可设

$$E=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\neq 0,\ ad=bc. \tag{2.14}$$

进一步设 $h_0=(h_1, h_2)^T$, $K=(K_1, K_2)^T$, 则(2.12)等价于

$$ah_1 + bh_2 + \mu K_1 + O(|h_2, \mu|^2) = 0, \tag{2.15}$$

$$ch_1 + dh_2 + \mu K_2 + O(|h_0, \mu|^2) = 0. \tag{2.16}$$

若 $a \neq 0$,对(2.15)应用隐函数定理可得

$$\begin{aligned} h_1 &= -\frac{b}{a}h_2 - \frac{K_1}{a}\mu + O(|h_0, \mu|^2) \\ &\equiv R_1(h_2, \mu), \end{aligned} \tag{2.17}$$

将(2.17)代入(2.16),由(2.14)可得

$$\left(K_2 - \frac{c}{a}K_1\right)\mu + O(|h_2, \mu|^2) = 0, \tag{2.18}$$

假设

$$aK_2 - cK_1 \neq 0, \tag{2.19}$$

则从(2.18)可解出

$$\mu = R_2(h_2) = O(h_2^2). \tag{2.20}$$

完全类似地,若 $a=0, c\neq 0$, 且(2.19)成立,则可以从(2.15)与(2.16)解得形如(2.17)与(2.20)的函数. 同理,若 $|b| + |d| \neq 0$, 且 $bK_2 - dK_1 \neq 0$, 则可从(2.15)与(2.16)解得函数组 $h_2 = R_1(h_1, \mu)$, $\mu = R_2(h_1)$, 于是与定理 2.3 的证明类似可证下述定理成立.

定理 2.4 设(1.12)为三维解析系统, L 的特征乘数为 $\lambda_1 = 1$, $0<\lambda_2\neq 1$, 又设 $\mu \in R$. 如果由(2.13)中给出的量 E 与 K 满足

$$(K_2 - K_1)E = (K_2 a - K_1 c, K_2 b - K_1 d) \neq (0, 0),$$

则

(i) 若 L 为(1.1)的单参数闭轨族中的一员,那么当 $\mu \neq 0$ 充分小时(1.12)在 L 的邻域内没有闭轨.

(ii) 若 L 为(1.1)的孤立闭轨,那么(1.12)在 L 的小邻域内或对一切充分小的 $\mu\neq0$ 均有惟一闭轨或对位于 $\mu=0$ 某一侧(另一侧)的 μ 恰有两个闭轨(没有闭轨). 此外,若设 $T^*(\mu)$ 为(1.12)在 L 附近的闭轨的周期,则 $T^*(0)=T$.

若(1.12)具有下述形式:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x)+\mu F(x, y),\\ \dot{y} &= yg(x, y)+\mu G(x, y),\end{aligned}\tag{2.21}$$

其中 $x\in R^2, y\in R$, 且当 $\mu=0$ 时(2.21)有闭轨 L: $x=x(t)$, $y=0$, $0\leqslant t\leqslant T$,则可给出量 E 与 K 的计算公式. 事实上,可取

$$v(\theta)=\begin{pmatrix}\dfrac{f(x(\theta))}{|f(x(\theta))|}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1(\theta)\\ v_2(\theta)\\ 0\end{pmatrix},\ Z(\theta)=\begin{pmatrix}-v_2(\theta) & 0\\ v_1(\theta) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

则有

$$A(\theta)=\begin{pmatrix}a(\theta) & 0\\ 0 & g(x(\theta), 0)\end{pmatrix},\ Y(\theta)=\begin{pmatrix}e^{\int_0^\theta a(s)\mathrm{d}s} & 0\\ 0 & e^{\int_0^\theta g(x(s), 0)\mathrm{d}s}\end{pmatrix},$$

其中

$$a(\theta)=\mathrm{tr}f_x(x(\theta))-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln|f(x(\theta))|,$$

从而, 注意到(2.13)可知

$$E=Y(T)-I_2=\begin{pmatrix}e^{\sigma_1}-1 & 0\\ 0 & e^{\sigma_2}-1\end{pmatrix},$$

$$K=\left(\frac{e^{\sigma_1}}{|f(x(0))|}K_1{}',\ e^{\sigma_2}K_2{}'\right)^T,$$

其中

$$\sigma_1 = \oint_L \mathrm{tr} f_x \mathrm{d}t,\ K_1' = \oint_L \exp(-\int_0^t \mathrm{tr} f_x \mathrm{d}t) f \wedge F \mathrm{d}t,$$

$$\sigma_2 = \oint_L g \mathrm{d}t,\ K_2' = \oint_L \exp(-\int_0^t g \mathrm{d}t) G \mathrm{d}t.$$

以上公式的推导详见[38].

次设 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_2 \neq -1$, 则(2.12)中 E 满足 $\det E \neq 0$,因此由隐函数定理,(2.12)有惟一解 $h_0 = h_0^*(\mu) = O(\mu)$,这对应(1.12)在 L 附近的惟一的周期接近 T 的闭轨 L_μ.

设 Q 满足

$$Q^{-1} Y(T) Q = \mathrm{diag}(-1, \lambda_2) \equiv J,$$

令

$$r = Q^{-1}(h_0 - h_0^*(\mu)) \equiv R(h_0),$$

$$P^*(r, \mu) = Q^{-1}[\bar{P}(Qr + h_0^*, \mu) - h_0^*],$$

则

$$P^* \circ R = R \circ \bar{P}, \tag{2.22}$$

且由(2.2)知

$$P^*(r, \mu) = Jr + O(r|r, \mu|), \tag{2.23}$$

利用(2.23)知

$$\begin{aligned}(P^* \circ P^*)(r, \mu) &= J^2 r + G(r, \mu) \\ &= \mathrm{diag}(1, \lambda_2^2) r + G(r, \mu),\end{aligned}$$

其中 $G(r, \mu) = O(r|r, \mu|) = (G_1(r, \mu), G_2(r, \mu))^T$, 点 $r = (r_1, r_2)^T$ 为 $P^* \circ P^*$ 的不动点当且仅当

$$G_1(r, \mu) = 0,\ (\lambda_2^2 - 1) r_2 + G_2(r, \mu) = 0,$$

从上述第二式可解得 $r_2 = R_2(r_1, \mu) = O(r|r, \mu|)$. 令

$r_1F(r_1, \mu)=G_1(r_1, R(r, \mu), \mu)$,则 F 关于 r_1 的根的个数与 P^* 的 2 周期点(即 $P^*\circ P^*$ 的不动点且非 P^* 的不动点)的个数是一一对应的.又由(2.22)知 P^* 的周期点的个数与 $\bar{P}$ 的周期点的个数相等,而 $\bar{P}$ 的 2 周期点对应于(1.12)在 L 附近的周期接近 $2T$ 的闭轨,因此通过讨论 F 的根可获得(1.12)在 L 附近接近 $2T$ 的周期的闭轨.又注意到(1.12),在 L 附近接近 $2T$ 的闭轨与(1.1)在 $u(0)$的截面恰有两个交点(此两交点均为 $\bar{P}$ 的 2 周期点),因此,由 $G(r, 0)=O(|r|^2)$知必有 $F(r_1, 0)=O(|r_1|^2)$,于是可设

$$F(r_1, \mu) = ar_1^2 + b\mu + \cdots. \tag{2.24}$$

如果 $ab\neq 0$,则当 $ab\mu<0$ 时 F 有两个根

$$r_1 = \sqrt{-\frac{b\mu}{a}}(\pm 1 + o(1)),$$

此两根对应于(1.12)的同一个闭轨.综上所述,可得以下结果.

定理 2.5 设(1.12)为 C^r 系统,$r\geqslant 3$,设 L 的特征乘数为 $\lambda_1=-1$, $0>\lambda_2\neq -1$,又设(2.24)中系数 a, b 均不等于零,则对充分小的 $\mu\neq 0$,当 $ab\mu>0$ 时(1.12)在 L 附近恰有一个闭轨,其周期接近 T,当 $ab\mu<0$ 时(1.12)在 L 附近恰有两个闭轨,其周期分别接近 T 与 $2T$.

上述定理所描述的分支现象常称为闭轨的倍周期分支.

注 2.2 由于 $|\lambda_1|=1$, $|\lambda_2|\neq 1$, 因此 L 有一局部二维中心流形 M_c,当 $\lambda_1=1$ 时 M_c 为一拓扑圆柱面, 其边界由两个圆周组成,当 $\lambda_1=-1$ 时 M_c 为一拓扑 Möbius 带, 其边界为单个圆周.而含参数 μ 的扰动系统(1.12)也有含参数的中心流形 $M_c^*(\mu)$,且 $M_c^*(0)=M_c$, 在定理 2.4 与 2.5 中所描述的分支现象均发生在 $M_c^*(\mu)$上.

从本节讨论可以看出,在研究周期轨道的扰动分支时曲线坐标是一个有力的工具.对二维系统极限环的分支,在定理 2.2 与

2.3 中所描述的分支现象是最基本的，定理 2.4 是由韩茂安([38])给出的，该定理可认为是定理 2.3 对三维系统的推广，而且也易推广至更高维系统. 对高维系统来说，定理 2.4 与 2.5 所描述的分支现像是最基本且简单的. 另一种较基本的分支现象是：非双曲的吸引或排斥的空间闭轨经扰动后可以改变稳定性且同时产生二维不变环面，这一现象的理论分析可在文献[110]及[82]等中找到.

§3 周期系统的周期解

本节研究周期扰动系统，我们首先引入 Poincaré 映像的定义，其次对几类非线性周期扰动系统通过分析 Poincaré 映像的性质，利用隐函数定理与压缩映像原理等研究调和解与次调和解的分支.

3.1 调和解与次调和解

设有周期系统

$$\dot{x} = f(t, x), \ x \in R^n, \tag{3.1}$$

其中 $f: R \times R^n \to R^n$ 为连续函数且关于 x 为 C^r 函数，$r \geqslant 1$，又对每个 $x \in R^n$，f 关于 t 为 T 周期的. 任取 $x_0 \in R^n$，(3.1)存在以 x_0 为初值($t=0$ 时)的解 $x(t, x_0)$. 由于 f 关于 t 为 T 周期的，由解的惟一性知解 $x(t, x_0)$为 T 周期的当且仅当$x(T, x_0) = x(0, x_0) = x_0$. 令 $P(x_0) = x(T, x_0)$，则 $x(t, x_0)$为 T 周期的当且仅当 x_0 为映像 $P: R^n \to R^n$ 的不动点. 又由解对初值的可微性知 $P \in C^r$，我们称 P 为(3.1)的 Poincaré 映像，而称 $F(x_0) = P(x_0) - x_0$为(3.1)的后继函数. 易知

$$P^2(x_0) = (P \circ P)(x_0) = x(T, P(x_0)) = x(2T, x_0),$$

一般地，用 P^k 表示P 自身的k 次复合，则

$$P^k(x_0) = P(P^{k-1}(x_0)) = x(kT, x_0), \ k \geqslant 2.$$

如果存在 $k\geqslant 2$ 使 x_0 为 P 的 k 周期点,即 $P^k(x_0)=x_0$, $P^j(x_0)\neq x_0$, $j=1,\cdots,k-1$, 则称 $x(t,x_0)$为(3.1)的 k 阶次调和解(或 k 次亚调和解).易见 k 阶次调和解的周期为kT.方程(3.1)的 T 周期解又称为调和解.

设 $x(t,x_0)$为(3.1)的调和解(或 k 阶次调和解),若 T 周期(或 kT 周期)线性方程

$$\dot{y}=f_x(t,x(t,x_0))y$$

的零解是双曲的,则称 $x(t,x_0)$为(3.1)的双曲调和解(或双曲 k 阶次调和解),由 Floquet 理论及定理 1.5 的证明易知 $x(t,x_0)$为双曲调和解(或双曲次调和解)当且仅当 $DP(x_0)$(或 $DP^k(x_0)$)的特征值的模均不等于 1.

若在(t,x)空间引入等价关系"$\propto$"如下:$(t,x)\propto(t',x')$当且仅当 $x=x'$且 $t-t'$为 T 的整数倍,则商空间 $R\times R^n/\propto$为 $S^1\times R^n$,且称该空间为(3.1)的相空间.(3.1)的 k 阶次调和解在相空间 $S^1\times R^n$ 中的轨线为绕 S^1 转 k 周的闭曲线.

例 3.1 考虑二阶线性方程

$$\ddot{x}+b^2x=a\cos\omega t,\ b>0,\ \omega>0,$$

该方程等价于下述平面周期方程

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-b^2x+a\cos\omega t, \tag{3.2}$$

设 $\omega\neq b$,不难求得(3.2)满足 $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$ 的解为

$$\begin{aligned} x(t)&=(x_0-A)\cos bt+\frac{y_0}{b}\sin bt+A\cos\omega t,\\ y(t)&=x'(t),\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 $A=a/(b^2-\omega^2)$.于是(3.2)的 Poincaré 映像 $P:R^2\to R^2$ 可求出如下

$$P(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \cos bT & \frac{1}{b}\sin bT \\ -b\sin bT & \cos bT \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A(1-\cos bT) \\ bA\sin bT \end{pmatrix},$$

其中 $T=\frac{2\pi}{\omega}$. 易见 $(x_0, y_0)=(A, 0)$ 恒为 P 的不动点，对应的周期解为调和解 $(x^*(t), y^*(t))=(A\cos\omega t, -\omega A\sin\omega t)$，与其所对应的闭轨在相空间 $S^1\times R^2$ 沿 S^1 转一周，且闭轨在 R^2 上的投影绕原点也转一周. 为研究其他解的性质，以下就 ω 与 b 的关系分四种情况来讨论.

(1) $\omega = mb$, $m>1$（m 阶次调和响应）.

由(3.3)知对任意点 $(x_0, y_0)\neq(A, 0)$，相应的解都是 mT 周期的，在相空间 $S^1\times R^2$ 中所对应的闭轨沿 S^1 转 m 周，其在 R^2 上的投影绕原点只转一周.

(2) $n\omega = b$, $n>1$（n 阶超调和响应）.

同样，由(3.3)知一切解都是 T 周期的，但除了前面给出的调和解 (x^*, y^*) 外，其他解所对应的闭轨沿 S^1 转一周，而它们的投影在 R^2 上转 n 周.

(3) $n\omega = mb$, $m, n>1$, $(m, n)=1$（m/n 阶次超调和响应）.

同上，除 (x^*, y^*) 外，其他解都是 mT 周期解，这些解所对应的闭轨沿 S^1 转 m 周，在 R^2 上的投影转 n 周，这种周期解称为 (m, n) 型次超调和解.

(4) ω/b 为无理数（拟周期响应）.

我们证明对任意 $(x_0, y_0)\neq(A, 0)$，相应的轨线在 $S^1\times R^2$ 中的闭包是一个二维环面，或等价地，(x_0, y_0) 在映像 P 下的轨道 $\{P^k(x_0, y_0), k=0, \pm1, \cdots\}$ 的闭包是 R^2 中的一闭曲线.

事实上，对 $(x_0, y_0)\neq(A, 0)$，式(3.3)可写为

$$x(t) = \bar{A}\cos(bt+\varphi) + A\cos\omega t,$$

$$y(t) = -b\bar{A}\sin(bt+\varphi) - \omega A\sin\omega t,$$

其中 φ, $\bar{A}\in R$, $\bar{A}\neq 0$, 因此

$$P^k(x_0,\ y_0)=\begin{pmatrix}x(kT)\\ y(kT)\end{pmatrix}=\bar{A}\begin{pmatrix}\cos(kTb+\phi)\\ -b\sin(kTb+\phi)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A\\ 0\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\end{pmatrix},$$

易见点列$\{(x_k,\ y_k)\}$满足椭圆曲线方程

$$L:(x-A)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\bar{A}^2,$$

注意到

$$x_k-A+iy_k/b=\bar{A}e^{2kib\pi/\omega},\ i=\sqrt{-1},$$

而椭圆 L 的复表示为

$$x-A+iy/b=\bar{A}e^{2i\pi\theta},\ 0\leqslant\theta\leqslant 1,$$

故只须证可列无穷集 $S=\{\theta_k=kb/\omega(\text{mod }1),\ k=0,\ \pm1,\ \cdots\}$在区间[0, 1]上处处稠密. 将[0,1]分成 k 个等长的半开半闭小区间,任取 S 中$k+1$ 个点,则至少有两个属于同一个小区间,记它们是$\dfrac{pb}{\omega}$ 与 $\dfrac{qb}{\omega}$,且 $p>q$,于是

$$(p-q)\frac{b}{\omega}\equiv m\frac{b}{\omega}<\frac{1}{k}(\text{mod }1),$$

由此知集合

$$S_0=\left\{\frac{mb}{\omega},\ \frac{2mb}{\omega},\ \frac{3mb}{\omega},\cdots\right\}$$

中任两个相邻点的距离都相等而且小于$\dfrac{1}{k}$,于是任取 $\theta_0\in(0,\ 1)$,及 $\varepsilon>0$ 任意小,可取 k 适当大,使$\dfrac{1}{k}<\varepsilon$,则 S_0 中必有点落在 θ_0 的ε - 邻域内. 由于 S_0 为 S 的子集,即得结论.

例 3.2 考虑柱面方程

$$\dot{\theta} = r,\ \dot{r} = -g(\theta) - f(\theta)r, \tag{3.4}$$

其中 f, g 为连续的 2π 周期函数. 可证若 $g(\theta)$为定号函数，则当

$$A \equiv \int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta \neq 0 (= 0)$$

时(3.4)恰有一个第二类闭轨(没有第二类闭轨)([72]).

为证明这一结论，不妨设 $g(\theta) < 0$(否则可在(3.4)中改变(θ, r)的符号)，于是由(3.4)有

$$r\dot{\theta} = r^2 \geqslant 0,\ \dot{r}|_{r=0} = -g(\theta) > 0, \tag{3.5}$$

因此，从 θ 轴中的区间 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 中任一点出发的正(负)半轨恒位于区域 $r > 0 (r < 0)$中(参考图(3.1)). 又注意到存在常数 $M > 0$，使当$|r| \geqslant 1$ 时沿(3.4)的轨线有

$$\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right| = \left|f(\theta) + \frac{g(\theta)}{r}\right| \leqslant M, \tag{3.6}$$

于是对任一点$(0, r_0)$，(3.4)从该点出发的正半轨(当 $r_0 > 0$ 时)或负半轨(当 $r_0 < 0$ 时)必与直线 $\theta = 2\pi$ 相交. 这段轨线可表示为 $r = R(\theta, r_0),\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ r_0 \neq 0$. 由(3.5)知

当 $0 < |r_0| \ll 1$ 时，

$$(\mathrm{sgn} r_0)[R(2\pi, r_0) - r_0] > 0, \tag{3.7}$$

而由(3.6)及比较定理易知

$$\lim_{|r_0| \to \infty} R(\theta, r_0) = \infty, \tag{3.8}$$

由于函数 $r = R(\theta, r_0)$满足方程

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -f(\theta) - \frac{g(\theta)}{r},$$

对上方程两边积分得

$$R(\theta, r_0) - r_0 = -F(\theta) - G(\theta, r_0), \tag{3.9}$$

其中

$$F(\theta)=\int_0^\theta f(u)\mathrm{d}u,\ G(\theta,\ r_0)=\int_0^\theta \frac{g(u)\mathrm{d}u}{R(u,\ r_0)}.$$

我们已证当 $r_0\neq 0$ 时 $r_0R(\theta,\ r_0)>0$,且由轨线的不相交性知 $R(\theta,\ r_0)$关于 r_0 为严格单调的,故由 g 定号知当 $r_0\neq r_0'$时, $G(2\pi,\ r_0)\neq G(2\pi,\ r_0')$,由此及(3.9)知

$$\text{当 } r_0\neq r_0' \text{ 时}, R(2\pi,\ r_0)-r_0\neq R(2\pi,\ r_0)'-r_0',$$

这表示后继函数 $R(2\pi,\ r_0)-r_0$ 至多有一个根,即(3.4)至多有一个第二类闭轨. 往证

$$\lim_{|r_0|\to\infty}[R(2\pi,\ r_0)-r_0]=-A,$$

$$\lim_{|r_0|\to\infty}[R^2(2\pi,\ r_0)-r_0^2-2r_0A]=A^2-2\int_0^{2\pi}g(\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{3.10}$$

首先,由(3.8)与(3.9)即得(3.10)第一式. 其次由(3.4)知函数 $r=R(\theta,\ r_0)$满足方程

$$r\mathrm{d}r=-f(\theta)r\mathrm{d}\theta-g(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}[R^2(\theta,\ r_0)-r_0^2]=-\int_0^\theta f(u)R(u,\ r_0)\mathrm{d}u-\int_0^\theta g(u)\mathrm{d}u,$$

将(3.9)代入上式可得

$$R^2(\theta,\ r_0)-r_0^2=F^2(\theta)-2r_0F(\theta)-2\int_0^\theta g(u)\mathrm{d}u$$
$$+2\int_0^\theta f(u)G(u,\ r_0)\mathrm{d}u,$$

令 $\theta=2\pi$, $|r_0|\to\infty$并利用(3.8)由上式即得(3.10)第二式.

由(3.10)第一式知,若 $A\neq 0$,则当 $|r_0|\gg 1$ 时 $(\mathrm{sng}A)[R(2\pi,\ r_0)-r_0]<0$, 由此及(3.7)知必存在 r_0^* (与 A 同号)使

$R(2\pi, r_0^*) = r_0^*$,于是当 $A \neq 0$ 时(3.4)必存在第二类闭轨.若 $A=0$,由(3.10)第二式知

$$\text{当} |r_0| \gg 1 \text{时} (\text{sgn} r_0)[R(2\pi, r_0) - r_0] > 0,$$

由此及(3.7)知后继函数 $R(2\pi, r_0) - r_0$ 若有零点,必有偶数个(包括重根),但已证(3.4)至多有一个闭轨,于是当 $A=0$ 时(3.4)没有闭轨.结论得证.

由以上讨论易给出(3.4)的相图如图 3.1 所示.

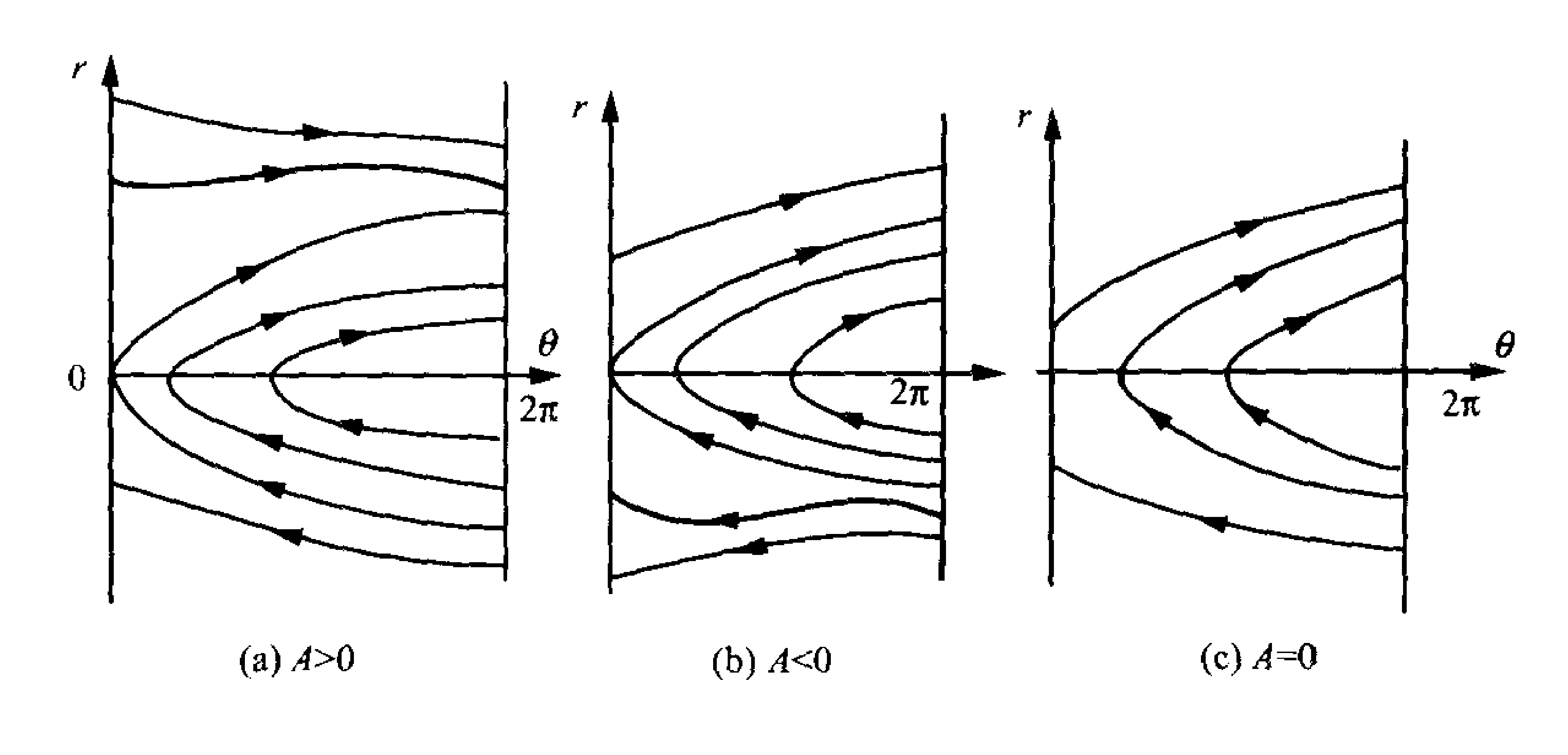


图 3.1

上述对(3.4)的论证方法取自[54],当 $g(\theta)$ 有零点时仍可讨论(3.4)的第二类闭轨的存在性与惟一性,有兴趣的读者可参考[54].

3.2 压缩映像原理方法

本小节考虑含参数的周期系统

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \varepsilon), \quad x \in R^n, \tag{3.11}$$

其中 $\varepsilon \in R^m$ 为小参数,$A(t)$ 为连续的 T 周期矩阵,$f: R \times R^n \times R^m \to R^n$ 连续,关于 t 为 T 周期的,且关于 x 为 C^1 的,设线性方程 $\dot{x} = A(t)x$ 的基本解矩阵为 $X(t)$,$X(0) = I_n$.令

$$M = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \int_0^T |X(t)(X^{-1}(T) - I_n)^{-1} X^{-1}(s+t)| \mathrm{d}s, \tag{3.12}$$

由第一章§1知，如果 $X(T)-I_n$ 为可逆矩阵，则存在有界线性算子 $K: P_T \to P_T$ 且 $|Kg| \leqslant M|g|$，使得 Kg 为线性周期方程

$$\dot{x} = A(t)x + g(t)$$

的惟一 T 周期解，其中 P_T 为由 n 维连续 T 周期向量函数所成的 Banach 空间.

对非线性方程(3.11)，利用压缩映像原理可证

定理 3.1 设 $X(T)-I_n$ 可逆，如果存在 $\varepsilon_0>0$, $N(\varepsilon)>0$, $L(\varepsilon)>0$, $B(\varepsilon)>0$，使得对 $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ 有

(i) 对一切 t 有 $|f(t, 0, \varepsilon)| \leqslant N(\varepsilon)$；对 $|x|$, $|y| \leqslant B(\varepsilon)$ 有

$$|f(t, x, \varepsilon) - f(t, y, \varepsilon)| \leqslant L(\varepsilon)|x-y|;$$

(ii) $M[L(\varepsilon)B(\varepsilon) + N(\varepsilon)] \leqslant B(\varepsilon)$，其中 M 由(3.12)给出，

则对 $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$，方程(3.11)有满足 $|x(t)| \leqslant B(\varepsilon)$ 的惟一调和解.

证明 任取向量函数 $x \in P_T$，令 $g(t) = f(t, x(t), \varepsilon)$，则 $(Kg)(t)$ 为线性方程 $\dot{x} = A(t)x + g(t)$ 的惟一周期解. 因为 g 与 x 有关，令

$$(Kg)(t) = (K^* x)(t),$$

这样定义了一个非线性算子 $K^*: P_T \to P_T$. 由条件(i)与(ii)知，当 $|x|$, $|y| \leqslant B$ 时有

$$|K^* x| \leqslant M \max_{0 \leqslant t \leqslant T} |f(t, x(t), \varepsilon)|$$

$$\leqslant M[L(\varepsilon)|x| + N(\varepsilon)]$$

$$\leqslant M[LB+N]\leqslant B,$$

$$|K^*x-K^*y| = |K(f(\cdot,x(\cdot),\varepsilon)-f(\cdot,y(\cdot),\varepsilon))|$$

$$\leqslant M\max_{0\leqslant t\leqslant T}|f(t,\ x(t),\ \varepsilon)-f(t,\ y(t),\ \varepsilon)|$$

$$\leqslant ML(\varepsilon)|x-y|,$$

于是,若令

$$P_{T,B} = \{f|f\in P_T, |f|\leqslant B(\varepsilon)\},$$

则由条件(ii)知对一切$|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$,有 $ML<1$,从而 K^* 为 $P_{T,B}$上的压缩算子,故 K^* 在 $P_{T,B}$中存在惟一不动点x_ε,即 $K^*x_\varepsilon=x_\varepsilon$,于是由 K^* 的定义知 T 周期函数$x_\varepsilon(t)$是线性方程

$$\dot{x} = A(t)x+f(t,\ x_\varepsilon(t),\ \varepsilon)$$

的惟一周期解,从而 $x_\varepsilon(t)$是(3.11)的调和解.进一步,由第一章§1知(3.11)的调和解必是 K^* 的不动点,从而由不动点的惟一性知 $x_\varepsilon(t)$是(3.11)在 $P_{T,B}$中的惟一解.证毕.

推论 3.1 设 $X(T)-I_n$ 可逆,若

$$\sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant T\\ x\in R^n}}|f_x(t,\ x,\ \varepsilon)|<M^{-1}, \tag{3.13}$$

或

$$\lim_{B\to\infty}B(1-M\sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant T\\ |x|\leqslant B}}f_x(t,\ x,\ \varepsilon)|)>M\sup_t|f(t,\ 0,\ \varepsilon)|, \tag{3.14}$$

则方程(3.11)有惟一调和解.

证明 若(3.13)成立,由微分中值定理知,若取

$$L(\varepsilon) = \sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant T\\ x\in R^n}}|f_x(t,\ x,\ \varepsilon)|,$$

则 $ML(\varepsilon)<1$,从而对一切充分大的 B,定理 3.1 的条件(i)与(ii)

成立.若(3.14)成立,令

$$L(\varepsilon)=\sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant T\\|x|\leqslant B}}|f_x(t,x,\varepsilon)|,$$

则对一切充分大的 B 有 $B(1-ML)>M\sup\limits_t|f(t,0,\varepsilon)|\equiv MN(\varepsilon)$,因此定理 3.1 的条件(i)与(ii)也成立.于是由定理 3.1 及 B 的任意性即知结论成立.

例 3.3 考虑标量周期方程

$$\dot{x}=h(x)+g(t), \tag{3.15}$$

其中 $g(t)$ 为连续 2π 周期函数,$h(x)$ 由下式给出

$$h(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^\alpha},\ \alpha\in R.$$

可证若 $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$,则(3.15)有惟一调和解,若 $\alpha>\frac{1}{2}$,则当 $g(t)\geqslant h(+\infty)$ 或 $g(t)\leqslant h(-\infty)$ 时(3.15)没有调和解.

事实上,方程(3.15)可写为

$$\dot{x}=x+f(t,x),\ f(t,x)=-x+h(x)+g(t),$$

由(3.12)易知 $M=1$,又知

$$|f_x|=1-\frac{1}{(1+x^2)^\alpha}\leqslant1-\frac{1}{(1+B^2)^\alpha}\ (\text{当}\ |x|\leqslant B\ \text{时}).$$

若 $\alpha<\frac{1}{2}$ 或 $\alpha=\frac{1}{2}$ 且 $|g(t)|<1$,则式(3.14)成立,从而由推论 3.1 知结论成立.若 $\alpha=\frac{1}{2}$ 且存在 t 使 $|g(t)|>1$ 或 $\alpha>\frac{1}{2}$,则式(3.14)不成立,因此不能利用推论 3.1 来判定(3.15)是否有周期解.注意到当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时有 $h(\pm\infty)=\pm\infty$,因此把(3.15)看成柱面方程,利用 Poincaré 映像可证(3.15)必存在周期解,又由于 $h'(x)>0$,若(3.15)有两个周期解 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$,不妨设 $x_1(t)>$

$x_2(t)$,则由(3.15)知

$$x_1'(t) - x_2'(t) = h(x_1(t)) - h(x_2(t)) > 0,$$

在区间$[0, 2\pi]$上积分可得 $x_1(2\pi) - x_2(2\pi) > x_1(0) - x_2(0)$, 从而

$$0 = x_1(2\pi) - x_1(0) > x_2(2\pi) - x_2(0) = 0,$$

矛盾.于是得证当 $\alpha = \dfrac{1}{2}$时(3.15)有惟一调和解.

若 $\alpha > \dfrac{1}{2}$,则 $h(\pm\infty)$为有限数,且由(3.15)知当 $g(t) \geqslant h(+\infty)$($g(t) \leqslant h(-\infty)$)时有

$$\dot{x} \geqslant h(+\infty) + h(x) > 0 \ (\dot{x} \leqslant h(-\infty) + h(x) < 0),$$

故(3.15)必没有周期解.

上例说明条件(3.14)对一类方程来说是相当精细的.对一些具体方程,利用定理 3.1 或推论 3.1 还可确定使周期解存在的 ε 的变化范围.

例 3.4 考虑下述二阶周期方程

$$\ddot{x} + x = f_0(t) + \varepsilon f_1(t, x, \dot{x}), \tag{3.16}$$

其中 $f_0(t)$为连续的 T 周期函数,f_1 连续,关于 t 为T 周期的,且关于$(x, \dot{x})$为 C^1 的.(3.16)等价于平面周期系统,

$$\dot{x} = y, \ \dot{y} = -x - f_0(t) - \varepsilon f_1(t, x, y),$$

易知相应的线性齐次系统的基本解矩阵为

$$X(t) = e^{\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

因为 $\det(X(T) - I_2) = 2(1 - \cos T)$, 于是 $X(T) - I_2$ 可逆当且仅当 $T \neq 2k\pi$, $k = 1, 2, \cdots$.下设这一条件成立, 则

$$(X^{-1}(T)-I_2)^{-1}=\frac{1}{2(1-\cos T)}\begin{pmatrix}\cos T-1 & \sin T\\ -\sin T & \cos T-1\end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned}
&X(t)(X^{-1}(T)-I_2)^{-1}X^{-1}(s+t)\\
&=\frac{1}{2(1-\cos T)}\begin{pmatrix}\cos T-1 & \sin T\\ -\sin T & \cos T-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos s & -\sin s\\ \sin s & \cos s\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{2(1-\cos T)}\begin{pmatrix}\cos(T-s)-\cos s & \sin(T-s)+\sin s\\ -\sin(T-s)-\sin s & \cos(T-s)-\cos s\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

于是由(3.12)及第一章§1所取的矩阵范数知

$$\begin{aligned}
M&=\frac{1}{2(1-\cos T)}\int_0^T(|\cos(T-s)-\cos s|+|\sin(T-s)+\sin s|)\mathrm{d}s\\
&=\frac{1}{1-\cos T}\int_0^T\left[\left|\sin\frac{T}{2}\sin\left(\frac{T}{2}-s\right)\right|+\left|\sin\frac{T}{2}\cos\left(\frac{T}{2}-s\right)\right|\right]\mathrm{d}s\\
&=\frac{\sin\frac{T}{2}}{1-\cos T}\int_0^T\left(\left|\sin\left(\frac{T}{2}-s\right)\right|+\left|\cos\left(\frac{T}{2}-s\right)\right|\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

若设 f_1 满足 $\left|\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|\leqslant K$,则由推论3.1知当 $|\varepsilon|\leqslant\frac{1}{MK}$ 时方程(3.16)有惟一调和解. 特别,若取 $T=\pi$,则易知 $M=2$,又取 $f_0(t)=\cos^2 t$, $f_1(t,x,y)=x\sin^2 t$,则当 $|\varepsilon|<\frac{1}{2}$ 时方程

$$\ddot{x}+x=\cos^2 t+\varepsilon x\sin^2 t$$

有惟一的 π 周期解.

若设 f_1 满足

$$\text{当}\ |x|+|y|\leqslant B\ \text{时}\ \left|\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|\leqslant K(B),$$

则由定理 3.1 知,如果 $M[\varepsilon K(B)+N_0+\varepsilon N_1]\leqslant B$, 其中 $N_0=\max|f_0(t)|$, $N_1=\max|f_1(t,0,0)|$,那么(3.16)有满足 $|x(t)|+|x'(t)|\leqslant B$ 的惟一调和解. 特别,取 $B=4$ 可知方程

$$\ddot{x}+x=\cos^2 t+\varepsilon x^2$$

当 $|\varepsilon|\leqslant\frac{1}{16}$ 时有满足 $|x(t)|+|x'(t)|\leqslant 4$ 的惟一 π 周期解.

推论 3.1 的结果是全局性的,下列推论的结果则是局部的.

推论 3.2 设 $X(T)-I_n$ 可逆,又设 $f(t,0,0)=0$, $f_x(t,0,0)=0$,则存在 $\varepsilon_0>0$,使对 $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$,(3.11)有满足 $x(t,0)=0$ 的惟一调和解 $x(t,\varepsilon)$.

证明 设 $\sigma>0$ 适当小. 令 $L(\varepsilon,\sigma)=\max\{|f_x(t,x,\varepsilon)|:0\leqslant t\leqslant T,|x|\leqslant\sigma\}$, $N(\varepsilon)=\max\{|f(t,0,\varepsilon)|:0\leqslant t\leqslant T\}$, 则 $L(0,0)=0$, $N(0)=0$,因此存在 $\varepsilon_0>0$, $\sigma>0$,使当 $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ 有 $ML(\varepsilon,\sigma)<1$, $M[L(\varepsilon,\sigma)\sigma+N(\varepsilon)]\leqslant\sigma$, 从而由定理 3.1, (3.11)有满足 $|x|\leqslant\sigma$ 的惟一调和解 $x(t,\varepsilon)$,且该解关于 ε 为连续可微的,如果特别取 $\sigma=2MN(\varepsilon)$,则当 $|\varepsilon|$ 充分小时 $1-ML\geqslant\frac{1}{2}$,从而 $|x(t,\varepsilon)\leqslant 2MN(\varepsilon)$,于是 $x(t,0)=0$. 证毕.

注 3.1 若 $A(t)=A$ 为常矩阵,则利用 Jordan 标准型定理易证 $X(T)-I_n=e^{AT}-I_n$ 是可逆矩阵当且仅当 A 的任何特征值 λ 满足 $\lambda T\neq 2\pi ik$, $k=0,\pm 1,\cdots$.

压缩映像原理是讨论常微分方程周期解的存在惟一性的常用方法. 尽管定理 3.1 的证明方法是普通而常规的,但其叙述在形式上与以往不同,这使得我们可以导出像推论 3.1 那样全局性的结论,从而可以确定给定系统存在惟一周期解的参数范围. 这一思想在以后将不止一次地用到.

压缩映像原理方法也是讨论拟周期解及积分流形的强有力工具,在此不作讨论,有兴趣的读者可参阅[15], [12],[37],[39]和[43]等.

3.3 隐函数定理方法

本节对两类线性系统的周期扰动系统，利用 Poincaré 映像与隐函数定理讨论周期解的存在性与惟一性等.

首先考虑下述周期系统

$$\dot{x}=f(t,x,y,\varepsilon),\ \dot{y}=By+g(t,x,y,\varepsilon),\tag{3.17}$$

其中 $\varepsilon\in R$, $x\in R^n$, $y\in R^m$, f, g 为连续函数，且关于 t 为 T 周期的，关于 (ε,x,y) 为 C^r 的，$r\geqslant 1$, B 为 m 阶矩阵且使 $e^{BT}-I_m$ 可逆. 设

$$f(t,x,y,0)=O(|y|),\ g(t,x,y,0)=o(|y|),$$

于是可进一步设

$$\begin{aligned}f(t,x,y,\varepsilon)&=f_0(t,x,y)+\varepsilon f_1(t,x,y)+o(\varepsilon),\\ g(t,x,y,\varepsilon)&=g_0(t,x,y)+\varepsilon g_1(t,x,y)+o(\varepsilon),\end{aligned}\tag{3.18}$$

其中

$$\begin{aligned}f_0(t,x,y)&=O(|y|),\\ g_0(t,x,y)&=o(|y|),\end{aligned}\tag{3.19}$$

方程(3.17)以 (x_0,y_0) 为初值的解可写为

$$\begin{aligned}x(t,x_0,y_0,\varepsilon)&=x_1(t,x_0,y_0)+\varepsilon x_2(t,x_0,y_0)+o(\varepsilon),\\ y(t,x_0,y_0,\varepsilon)&=y_1(t,x_0,y_0)+\varepsilon y_2(t,x_0,y_0)+o(\varepsilon),\end{aligned}\tag{3.20}$$

其中

$$\begin{aligned}&x_1(0,x_0,y_0)=x_0,\quad y_1(0,x_0,y_0)=y_0,\\ &x_2(0,x_0,y_0)=0,\quad y_2(0,x_0,y_0)=0.\end{aligned}\tag{3.21}$$

将(3.18)与(3.20)代入(3.17)并比较等式两边关于 ε 展式的常数项与一次项的系数,可得

$$\dot{x}_1 = f_0(t, x_1, y_1), \ \dot{y}_1 = By_1 + g_0(t, x_1, y_1),$$

$$\dot{x}_2 = f_1(t, x_1, y_1) + f_{0x}(t, x_1, y_1)x_2 + f_{0y}(t, x_1, y_1)y_2,$$

$$\dot{y}_2 = By_2 + g_1(t, x_1, y_1) + g_{0x}(t, x_1, y_1)x_2 + g_{0y}(t, x_1, y_1)y_2.$$

于是利用初值条件(3.21)及常数变易公式可得

$$x_1(t) = x_1(t, x_0, y_0) = x_0 + \int_0^t f_0(s, x_1(s), y_1(s))\mathrm{d}s,$$

$$y_1(t) = y_1(t, x_0, y_0) = e^{Bt}y_0 + \int_0^t e^{B(t-s)}g_0(s, x_1(s), y_1(s))\mathrm{d}s,$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_2(t, x_0, y_0) \\ &= \int_0^t [f_1(s, x_1(s), y_1(s)) + f_{0x}(s, x_1(s), y_1(s))x_2(s) \\ &\quad + f_{0y}(s, x_1(s), y_1(s))y_2(s)]\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= y_2(t, x_0, y_0) \\ &= \int_0^t e^{B(t-s)}[g_1(s, x_1(s), y_1(s)) + g_{0x}(s, x_1(s), \\ &\quad y_1(s))x_2(s) + g_{0y}(s, x_1(s), y_1(s))y_2(s)]\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

由此并利用(3.19)易得

$$y_1(t, x_0, y_0) = e^{Bt}y_0 + o(|y_0|),$$

$$x_1(t, x_0, y_0) = x_0 + \int_0^t f_{0y}(s, x_0, 0)e^{Bs}y_0\mathrm{d}s + o(|y_0|),$$

$$y_2(t, x_0, y_0) = \int_0^t e^{B(t-s)}g_1(s, x_0, 0) + O(|y_0|),$$

$$x_2(t, x_0, y_0) = \int_0^t [f_1(s, x_0, 0)$$

$$+ f_{0y}(s, x_0, 0) y_2(s, x_0, 0)] \mathrm{d}s + O(|y_0|). \tag{3.22}$$

方程(3.17)的 Poincaré 映像为

$$P(x_0, y_0, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x_1(T, x_0, y_0) + \varepsilon x_2(T, x_0, y_0) + o(\varepsilon) \\ y_1(T, x_0, y_0) + \varepsilon y_2(T, x_0, y_0) + o(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} P_1(x_0, y_0, \varepsilon) \\ P_2(x_0, y_0, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

因此由(3.22)可知

$$P_2(x_0, y_0, \varepsilon) - y_0 = (e^{BT} - I_m) y_0$$

$$+ \varepsilon y_2(T, x_0, 0) + o(|y_0| + |\varepsilon|).$$

因为$(e^{BT} - I_m)^{-1}$存在,由隐函数定理知方程 $P_2(x_0, y_0, \varepsilon) - y_0 = 0$ 有惟一解

$$y_0 = -\varepsilon (e^{BT} - I_m)^{-1} y_2(T, x_0, 0) + o(\varepsilon) \equiv y_0^*(x_0, \varepsilon),$$

于是由(3.22)知

$$P_1(x_0, y_0^*, \varepsilon) - x_0 = \varepsilon G(x_0) + o(\varepsilon), \tag{3.23}$$

其中

$$G(x_0) = \int_0^T f_1(t, x_0, 0) \mathrm{d}t + \int_0^T f_{0y}(t, x_0, 0) e^{Bt} h_1(t) \mathrm{d}t,$$

$$h_1(t) = -(I_m - e^{-BT})^{-1} \int_0^T e^{-Bt} g_1(t, x_0, 0) \mathrm{d}t$$

$$+ \int_0^t e^{-Bs} g_1(s, x_0, 0) \mathrm{d}s.$$

于是对(3.23)应用隐函数定理即得

定理 3.2 设(3.18)与(3.19)成立. 如果存在 $x_0^* \in R^n$ 使 $G(x_0^*)=0$, $\det\frac{\partial G}{\partial x_0}(x_0^*)\neq 0$, 则当 $|\varepsilon|$ 充分小时方程(3.17)有满足 $(x^*(t), y^*(t))=(x_0^*, 0)+O(\varepsilon)$ 的周期解 $(x^*(t), y^*(t))$.

注 3.2 若在(3.17)中变量 y 不出现,则(3.23)中的函数 $G(x_0)$ 成为

$$G(x_0)=\int_0^T f_1(t, x_0)\mathrm{d}t.$$

注 3.3 对于比(3.17)形式上更一般的方程

$$\dot{x}=f_0(t)+f(t, x, y, \varepsilon),\ \dot{y}=By+g_0(t)+g(t, x, y, \varepsilon),$$

当 $\int_0^T f_0(t)\mathrm{d}t=0$ 时可通过周期线性变换化为(3.17) 的形式.

再考虑下述形式的 T 周期系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+h(t)+f(t, x, y, \varepsilon),\\ \dot{y}&=By+g(t, x, y, \varepsilon),\end{aligned}\tag{3.24}$$

其中 $\varepsilon\in R$, $x\in R^2$, $y\in R^m$, f, g 为连续函数,且关于 t 为 T 周期的, 关于 (x, y, ε) 为 C^1 的. 同前,设(3.18)与(3.19)成立,且 $e^{BT}-I_m$ 可逆, A 具有下述形式

$$A=\begin{pmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{pmatrix},\ \omega\neq 0.$$

如前,设(3.24)以 (x_0, y_0) 为初值的解有展式(3.20),则类似有

$$\dot{x}_1=Ax_1+h(t)+f_0(t, x_1, y_1),$$

$$\dot{y}_1=By_1+g_0(t, x_1, y_1),$$

$$\dot{x}_2=Ax_2+f_1(t, x_1, y_1)+f_{0x}(t, x_1, y_1)x_2$$

$$+ f_{0y}(t, x_1, y_1)y_2,$$

$$\dot{y}_2 = By_2 + g_1(t, x_1, y_1) + g_{0x}(t, x_1, y_1)x_2$$

$$+ g_{0y}(t, x_1, y_1)y_2,$$

与(3.22)类似有

$$y_1(t, x_0, y_0) = e^{Bt}y_0 + o(|y_0|),$$

$$x_1(t, x_0, y_0) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}[h(s) + f_0(s, x_1, y_1)]ds$$

$$= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}[h(s)$$

$$+ f_{0y}(s, u(s, x_0), 0)e^{Bs}y_0]ds + o(|y_0|),$$

$$y_2(t, x_0, y_0) = \int_0^t e^{B(t-s)}g_1(s, u(s, x_0), 0) + O(|y_0|),$$

$$x_2(t, x_0, y_0) = \int_0^t e^{A(t-s)}[f_{0y}(s, u(s, x_0), 0)y_2(s, x_0, 0)$$

$$+ f_1(s, u(s, x_0), 0)]ds + O(|y_0|), \tag{3.25}$$

其中

$$u(t, x_0) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}h(s)ds. \tag{3.26}$$

设(3.24)的 Poincaré 映像为 $P(x_0, y_0, \varepsilon) = (P_1(x_0, y_0, \varepsilon), P_2(x_0, y_0, \varepsilon))$, 则有

$$P_2(x_0, y_0, \varepsilon) - y_0$$

$$= (e^{BT} - I_m)y_0 + \varepsilon y_2(T, x_0, 0) + o(|y_0| + |\varepsilon|),$$

因此 $P_2(x_0, y_0, \varepsilon) - y_0 = 0$ 有惟一解

$$y_0 = -\varepsilon(e^{BT} - I_m)^{-1}y_2(T, x_0, 0) + o(\varepsilon) \equiv y_0^*(x_0, \varepsilon).$$

于是由(3.25)知

$$P_1(x_0, y_0^*, \varepsilon) - x_0 = (e^{AT} - I_2)x_0 + \int_0^T e^{A(T-t)}h(t)\mathrm{d}t$$
$$+ \varepsilon\int_0^T e^{A(T-t)}N(t)\mathrm{d}t + o(|\varepsilon|), \quad (3.27)$$

其中

$$N(t) = f_1(t, u(t, x_0), 0) + f_{0y}(t, u(t, x_0), 0)e^{Bt}h_1^*(t),$$
$$h_1^*(t) = -(I_m - e^{-BT})^{-1}\int_0^T e^{-Bt}g_1(t, u(t, x_0), 0)\mathrm{d}t$$
$$+ \int_0^t e^{-Bs}g_1(t, u(s, x_0), 0)\mathrm{d}s.$$

注意到 $\det(e^{AT} - I_2) = 2(1 - \cos\omega T)$，由(3.27)即得

定理 3.3 设$\left|\frac{\omega T}{2\pi}\right|$不是自然数,则当$|\varepsilon|$充分小时(3.24)有满足 $x^*(t, \varepsilon) = e^{At}[-(I_2 - e^{-AT})^{-1}\int_0^T e^{-At}h(t)\mathrm{d}t + \int_0^t e^{-As}h(s)\mathrm{d}s] + O(\varepsilon)$，$y^*(t, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ 的惟一调和解.

为进一步讨论(3.24)的次调和解的存在性,设

$$\left|\frac{\omega T}{2\pi}\right| = \frac{n}{k}, (k, n) = 1, k \geqslant 1, \quad (3.28)$$

易知(3.24)的 Poincaré 映像的 k 次复合为

$$P^k(x_0, y_0, \varepsilon) = (x(kT, x_0, y_0, \varepsilon), y(kT, x_0, y_0, \varepsilon))$$
$$\equiv (P_1^k(x_0, y_0, \varepsilon), P_2^k(x_0, y_0, \varepsilon)).$$

仿前有

$$P_2^k(x_0, y_0, \varepsilon) - y_0$$
$$= (e^{kBT} - I_m)y_0 + \varepsilon y_2(kT, x_0, 0) + o(|y_0| + |\varepsilon|),$$

设 $e^{kBT} - I_m$ 可逆,则 $P_2^k(x_0, y_0, \varepsilon) - y_0 = 0$ 有惟一解

$$y_0 = -\varepsilon(e^{kBT} - I_m)^{-1}\int_0^{kT} e^{B(kT-t)} g_1(t, u(t, x_0), 0)\mathrm{d}t + o(\varepsilon)$$

$$\equiv y_0^{**}(x_0, \varepsilon),$$

由(3.28)知 $e^{kAT} - I_2 = 0$，因此与(3.27)类似可得

$$P_1^k(x_0, y_0^{**}, \varepsilon) - x_0 = \int_0^{kT} e^{-At}h(t)\mathrm{d}t + \varepsilon\overline{G}(x_0) + o(\varepsilon), \tag{3.29}$$

其中

$$\overline{G}(x_0) = \int_0^{kT} e^{-At}[f_1(t, u(t, x_0), 0) + f_{0y}(t, u(t, x_0), 0)e^{Bt}h_k^*(t)]\mathrm{d}t,$$

$$h_k^*(t) = -(I_m - e^{-kBT})^{-1}\int_0^{kT} e^{-Bt}g_1(t, u(t, x_0), 0)\mathrm{d}t + \int_0^t e^{-Bs}g_1(s, u(s, x_0), 0)\mathrm{d}s.$$

利用(3.29)可证

定理 3.4 设(3.28)成立且 $e^{kBT} - I_m$ 可逆.

(i) 设 $k = 1$，若 $h_0 \equiv \int_0^T e^{-At}h(t)\mathrm{d}t \neq 0$，则当 ε 充分小时(3.24)没有(关于 ε 有界的)调和解与次调和解；若 $h_0 = 0$ 且存在 x_0 使 $\overline{G}(x_0) = 0$，$\det\frac{\partial\overline{G}}{\partial x_0}(x_0) \neq 0$，则当 ε 充分小时(3.24)有调和解 $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) = (u(t, x_0), 0) + O(\varepsilon)$.

(ii) 设 $k \geqslant 2$，若对 $x_0^* \equiv (e^{-AT} - I_2)^{-1}\int_0^T e^{-At}h(t)\mathrm{d}t$，有 $\det\frac{\partial\overline{G}}{\partial x_0}(x_0^*) \neq 0$，且当 $x_0 \neq x_0^*$ 时 $\overline{G}(x_0) \neq 0$，则当 ε 充分小时(3.24)没有 k 阶次调和解(但定理 3.3 中的调和解仍存在).

(iii) 设 $k \geqslant 2$,若存在 $x_0 \neq x_0^*$ 使 $\overline{G}(x_0) = 0$, $\det \frac{\partial \overline{G}}{\partial x_0}(x_0) \neq 0$, 则当 ε 充分小时(3.24) 有 k 阶次调和解 $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) = (u(t, x_0), 0) + O(\varepsilon)$.

证明 由(3.25)、(3.26)及(3.29)即知结论(i)成立. 设 $k \geqslant 2$,由定理 3.3 知 $(x^*(0, \varepsilon), y^*(0, \varepsilon)) = (x_0^*, 0) + O(\varepsilon)$ 是映像 $P(x_0, y_0, \varepsilon)$ 的不动点,从而它也是 $P^k(x_0, y_0, \varepsilon)$ 的不动点,且由于 $\det \frac{\partial \overline{G}}{\partial x_0}(x_0^*) \neq 0$, 该不动点是孤立的. 于是由(3.29) 知必有

$$\int_0^{kT} e^{-At} h(t) \mathrm{d}t = 0, \ \overline{G}(x_0^*) = 0,$$

因此,如果当 $x_0 \neq x_0^*$ 时 $\overline{G}(x_0) \neq 0$,则(3.24)必没有 k 阶次调和解,即得结论(ii). 由(3.29)易知结论(iii)成立. 证毕.

注 3.4 如果变量 y 不出现,则(3.24)成为

$$\dot{x} = Ax + h(t) + f(t, x, \varepsilon),$$

其中 $f(t, x, \varepsilon) = \varepsilon f_1(t, x) + O(\varepsilon^2)$. 此时函数 $\overline{G}$ 成为

$$\overline{G}(x_0) = \int_0^{kT} e^{-At} f_1(t, u(t, x_0)) \mathrm{d}t. \tag{3.30}$$

注 3.5 由于当 j/k 不是自然数时 $e^{jAT} - I_2$ 为可逆矩阵,易知在定理 3.4 的条件(ii)下(3.24)没有任何阶的次调和解,而只有一个调和解.

本小节讨论周期解所用的将解按参数 ε 展开,然后求出 Poincaré 映像的主项并应用隐函数定理来决定周期解的方法是起源于 Poincaré 的. 以上只不过将这一方法用于形式上较一般的方程(3.17)与(3.24)并导出定理 3.2～3.4. 实际上这些结果利用后面 §4 将要介绍的平均方法也可以获得. 此外,平均法还包含了对方程进行规范化处理的思想(即变换方程到较规范的形式). 易见,

由于(3.17)与(3.24)为周期系统,由定理3.2～3.4的证明知这些定理一般不能用来发现自治系统的周期解,这是因为(非线性)自治系统的周期解的周期不是已知的.一维与二维自治系统在周期扰动下周期解的简单分支将在§4讨论,而一般自治系统的闭轨族在自治与周期扰动下周期解的分支问题将在§5介绍.

例3.5 考虑二阶方程

$$\ddot{y}+y=\cos 2t+\varepsilon(y^3-ay-b\dot{y}\cos 2t),\qquad (3.31)$$

其中 $\varepsilon>0$ 充分小为参数,a,b 为实数.(3.31)等价于二维周期系统

$$\dot{x}_1=x_2,$$

$$\dot{x}_2=-x_1+\cos 2t+\varepsilon(x_1^3-ax_1-bx_2\cos 2t).$$

我们证明,(3.31)总有惟一周期解,且当 $\frac{1}{6}-a>\frac{1}{2}|b|$ 时没有次调和解,当 $\left|a-\frac{1}{6}\right|<\frac{1}{2}|b|$ 时有两个二阶次调和解,当 $a-\frac{1}{6}>\frac{1}{2}|b|>0$ 时有4个二阶次调和解,如图3.2所示.

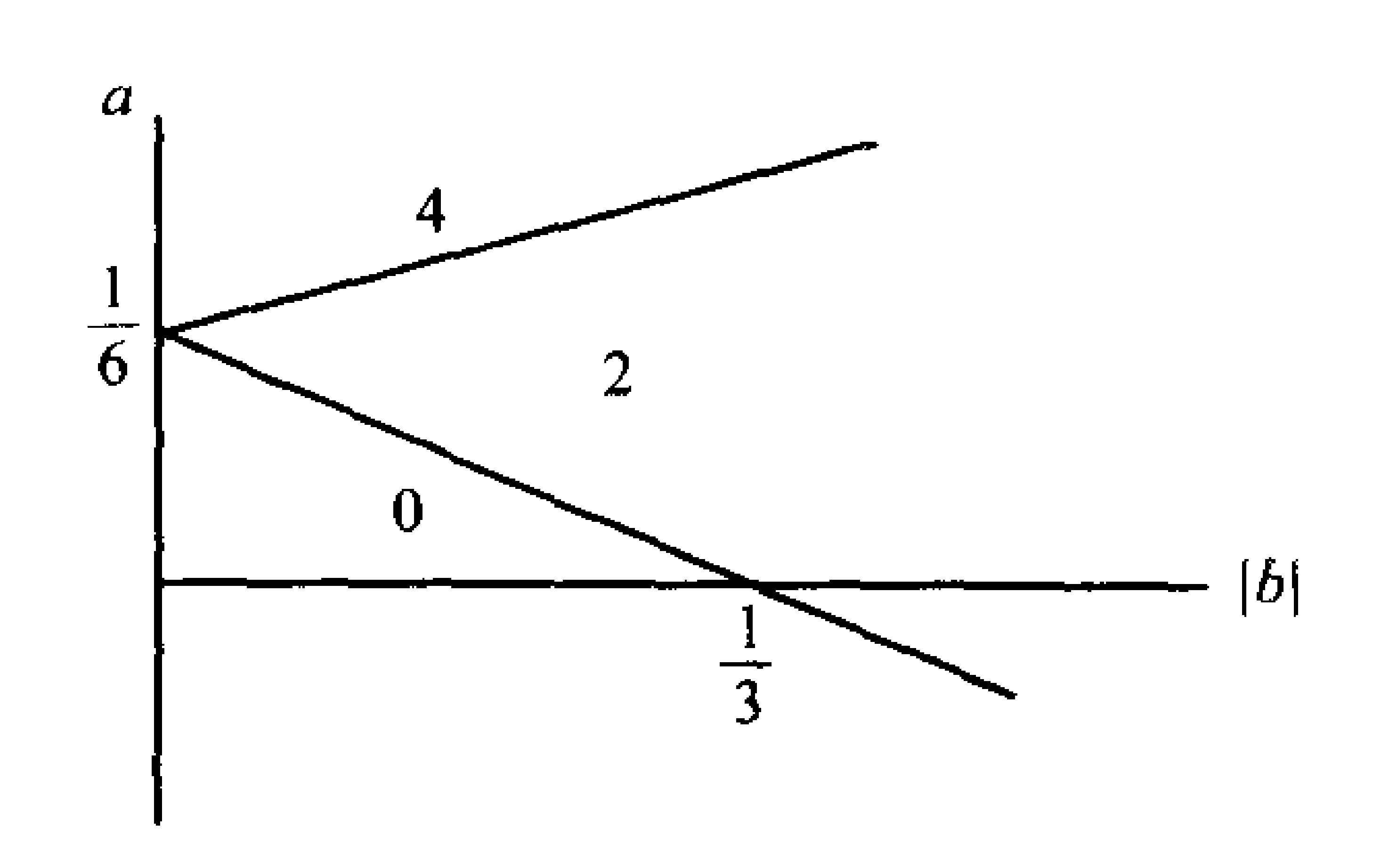


图3.2

事实上,我们有 $\omega=1$, $n=1$, $k=2$, $T=\pi$.由(3.26)知

$$u(t,x_0)=e^{At}\left[x_0+\int_0^t e^{-As}\begin{pmatrix}0\\ \cos 2s\end{pmatrix}\mathrm{d}s\right]=e^{At}\left(x_0+\frac{1}{2}v(t)\right),$$

其中，

$$v(t)=\left(\frac{2}{3}-\cos t+\frac{1}{3}\cos 3t,\ \sin t+\frac{1}{3}\sin 3t\right)^T$$

$$\equiv (v_1(t),\ v_2(t))^T.$$

令 $x_0=(x_{01},\ x_{02})^T, u(t,\ x_0)=(u_1(t,\ x_0),\ u_2(t,\ x_0))^T$，则易知

$$u_1(t,\ x_0)=(x_{01}+\frac{v_1}{2})\cos t+(x_{02}+\frac{v_2}{2})\sin t$$

$$=\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)\cos t-\frac{1}{3}\cos 2t+x_{02}\sin t, \quad (3.32)$$

同理，

$$u_2(t,\ x_0)=-\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)\sin t+x_{02}\cos t+\frac{2}{3}\sin 2t. \quad (3.33)$$

由(3.30)知

$$\overline{G}(x_0)=\begin{pmatrix}-\int_0^{2\pi}\sin t(u_1^3-au_1-bu_2\cos 2t)\mathrm{d}t\\ \int_0^{2\pi}\cos t(u_1^3-au_1-bu_2\cos 2t)\mathrm{d}t\end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

由(3.32)、(3.33)及三角函数公式我们有

$$u_1\sin t=\frac{1}{2}x_{02}(1-\cos 2t)+\frac{1}{2}\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)\sin 2t+\frac{1}{6}\sin t-\frac{1}{6}\sin 3t,$$

$$u_1\cos t=\frac{1}{2}\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)(1+\cos 2t)-\frac{1}{6}\cos t-\frac{1}{6}\cos 3t+\frac{1}{2}x_{02}\sin 2t,$$

$$u_1^2=\frac{1}{2}\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{18}+\frac{1}{2}x_{02}^2-\frac{1}{3}\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)\cos t+\frac{1}{3}x_{02}\sin t$$

$$+\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)x_{02}\sin 2t+\left[\frac{1}{2}\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{2}x_{02}^2\right]\cos 2t$$

$$-\frac{1}{3}\left(x_{02}+\frac{1}{3}\right)\cos 3t-\frac{1}{3}x_{02}\sin 3t+\frac{1}{18}\cos 4t,$$

从而可知

$$\begin{aligned}\sin t u_1(u_1^2-a)=&\frac{1}{2}x_{01}\left[\frac{1}{2}\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{18}+\frac{1}{2}x_{02}^2-a\right]\\&+\frac{1}{18}x_{02}\sin^2 t-\frac{1}{4}x_{02}\left[\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)^2-x_{02}^2\right]\cos^2 2t\\&+\frac{1}{2}\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)^2x_{02}\sin^2 2t+\frac{1}{18}x_{02}\sin^2 3t+\overline{u}_1(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos t u_1(u_1^2-a)=&\frac{1}{2}\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)\left[\frac{1}{2}\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{18}+\frac{1}{2}x_{02}^2-a\right]\\&+\frac{1}{18}\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)\cos^2 t+\frac{1}{4}\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)\\&\cdot\left[\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)^2-x_{02}^2\right]\cos^2 2t+\frac{1}{2}\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)x_{02}^2\sin^2 2t\\&+\frac{1}{18}\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)\cos^2 3t+\overline{u}_2(t),\end{aligned}$$

$$b\sin t\cos 2t\cdot u_2=\frac{1}{2}b\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)\sin^2 t+\overline{u}_3(t),$$

$$-b\cos t\sin 2t\cdot u_2=-\frac{1}{2}bx_{02}\cos^2 t+\overline{u}_4(t),$$

其中 $\overline{u}_i(t)$，$i=1, 2, 3, 4$，为在$[0, 2\pi]$上平均值为零的周期函数. 将以上四式代入(3.34)可得

$$\overline{G}(x_0)=\pi\begin{pmatrix}\frac{1}{2}b\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)-x_{02}\left(\frac{3}{4}\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{3}{4}x_{02}^2+\frac{1}{6}-a\right)\\-\frac{1}{2}bx_{02}+\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{3}{4}x_{02}^2+\frac{1}{6}-a\right)\end{pmatrix},$$

于是由定理 3.3 与 3.4(ii)知，若 $b=0, a<\frac{1}{6}$，则当 ε 充分小时(3.31)有惟一调和解，而没有次调和解. 设 $b\neq 0$，易知当 $x_0\neq$

$\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$时 $\overline{G}(x_0)=0$ 等价于

$$N(x_0) = \frac{1}{2}b,\ x_{02} = x_{01} + \frac{1}{3}, \tag{3.35}$$

或

$$N(x_0) = -\frac{1}{2}b,\ x_{02} = -\left(x_{01} + \frac{1}{3}\right), \tag{3.36}$$

其中 $N(x_0)=\frac{3}{4}\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{3}{4}x_{02}^2+\frac{1}{6}-a$. 易见当 $a\pm\frac{1}{2}b>\frac{1}{6}$时(3.35)与(3.36)各有两个解，当 $a+\frac{b}{2}>\frac{1}{6}\left(\text{或 } a-\frac{b}{2}>\frac{1}{6}\right)$时方程(3.35)(或(3.36))有两个解，当 $a\pm\frac{1}{2}b<\frac{1}{6}$时(3.35)与(3.36)均无解. 由此利用定理 3.4 即知结论成立.

§4 平均方法与周期解的简单分支

本节首先利用压缩映射原理证明平均定理，这一定理涉及一类周期扰动系统周期解的存在性，其本质仍是寻求被转化后的方程的 Poincaré 映射的不动点，然后对自治系统的二重鞍结点与双曲极限环的周期扰动，通过分析 Poincaré 映射的性质来讨论周期解的分支.

4.1 平均方法

考虑含参数的方程

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon), \tag{4.1}$$

其中 $\varepsilon\in R$ 为小参数，$x\in R^n$，f: $R\times R^n\times R\mapsto R^n$ 为连续函数，且关于 t 为 T 周期的，关于 x 为C^r 的，$r\geq1$，且

$f(t, x, \varepsilon)$

$$= f_1(t, x) + |\varepsilon|^p f_2(t, x, \varepsilon), \ p > 0. \tag{4.2}$$

易见方程(4.1)为(3.17)的特殊情况,因此由定理 3.2 与注 3.2,可给出(4.1)存在调和解的条件.然而从定理 3.2 等本身无法知道对如何小的 $|\varepsilon|$,调和解一定存在,本节就针对这一问题展开一些讨论,并给出例子,以说明确定使周期解存在的 ε 的范围的方法.

首先对(4.1)引入"近恒等"变换 $x = y + \varepsilon W(t, y)$,其中 W 为待定函数,我们要求 W 关于 t 为周期的,于是(4.1)成为

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (I + \varepsilon W_y)^{-1}\varepsilon[f(t, y + \varepsilon W, \varepsilon) - W_t] \\ &= \varepsilon[f_1(t, y) - W_t + F(t, y, \varepsilon)], \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中

$$\begin{aligned} F(t, y, \varepsilon) &= (I + \varepsilon W_y)^{-1}[f(t, y + \varepsilon W, \varepsilon) - W_t] \\ &\quad - f_1(t, y) + W_t \\ &= (I + \varepsilon W_y)^{-1}[f(t, y + \varepsilon W, \varepsilon) \\ &\quad - (I + \varepsilon W_y) f_1(t, y) + \varepsilon W_t W_y] \end{aligned} \tag{4.4}$$

设 $|\varepsilon| \cdot |W_y| < 1$,则矩阵 $I + \varepsilon W_y$ 必可逆,令

$$\bar{f}_1(y) = \frac{1}{T}\int_0^T f_1(t, y)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(t, y, 0)\mathrm{d}t,$$

则可取 $W(t, y)$满足等式

$$f_1(t, y) - \bar{f}_1(y) = W_t, \int_0^T W(t, y)\mathrm{d}t = 0. \tag{4.5}$$

于是(4.3)成为下列 T 周期系统

$$\dot{y} = \varepsilon[\bar{f}_1(y) + F(t, y, \varepsilon)]. \tag{4.6}$$

注意到 $F(t, y, 0) = 0$,我们称自治系统

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{f}_1(y) \tag{4.7}$$

为(4.1)的(一次)平均方程.

如果在(4.2)中 $p=1$,则由(4.4)、(4.5)与(4.2)及

$$(I+\varepsilon W_y)^{-1}=1-\varepsilon W_y+O(\varepsilon^2),$$

知

$$F(t,\ y,\ \varepsilon)=\varepsilon[\mathrm{sgn}\varepsilon f_2(t,\ y,\ 0)+f_{1x}(t,\ y)W$$
$$-W_y\bar{f}_1(y)]+o(\varepsilon).$$

令

$$\bar{f}_2(y)=\frac{1}{T}\int_0^T[\mathrm{sgn}\varepsilon f_2(t,\ y,\ 0)+f_{1x}(t,\ y)W-W_y\bar{f}_1(y)]\mathrm{d}t,$$

则对(4.6)进一步引入形如 $y=z+\varepsilon^2\tilde{W}(t,\ z)$的近恒等变换,可把(4.6)化为

$$\dot{z}=\varepsilon\bar{f}_1(z)+\varepsilon^2\bar{f}_2(z)+\varepsilon^2F^*(t,\ z,\ \varepsilon),$$

其中 F^* 为关于 t 为 T 周期的,且 $F^*(t,\ z,\ 0)=0$. 此时我们称下列自治系统

$$\dot{z}=\varepsilon\bar{f}_1(z)+\varepsilon^2\bar{f}_2(z)$$

为(4.1)的二次平均方程. 易见,如果 f 关于 ε 有足够的光滑性(例如 C^∞),则这个过程可不断(任意有限次地)进行下去. 这种平均法的最初思想源于 Krylov 与 Bogoliubov,这种方法不仅适用于周期系统,也适用于拟周期系统,而且对比(4.1)形式更广的方程(3.17)也有效.

由于平均方程(4.7)是自治系统,其性质相对比(4.6)简单,因此我们可以首先分析(4.7)的定性性质,然后讨论当 ε 充分小时哪些性质可以在(4.6)中发现,并通过(4.7)来发现(4.6)(从而原方程(4.1))的定性性质. 例如,关于周期解的存在性, 我们有下述平均定理.

定理 4.1 设 $W(t,\ y)$满足(4.5),又设存在 $y_0\in R^n$, $b>0$,

$L_1(\varepsilon, b)>0, L_2(b)>0, N(\varepsilon)>0$，使成立

(i) $\overline{f}_1(y_0)=0$，$\det A\neq 0$，$A=\overline{f}_{1y}(y_0)$，

(ii) 当 $|y-y_0|\leqslant b$ 时，$|\varepsilon|\cdot|W_y|<1$，$|\overline{f}_{1y}(y)-A|\leqslant L_2(b)$，

(iii) $|F(t, y_0, \varepsilon)|\leqslant N(\varepsilon)$，且当 $|y-y_0|\leqslant b$ 时 $|F_y(t, y, \varepsilon)|\leqslant L_1(\varepsilon, b)$，

(iv) $M(\varepsilon)[N(\varepsilon)+bL(\varepsilon, b)]\leqslant b$，

其中

$$L = L_1 + L_2,\ M(\varepsilon) = |\varepsilon|\int_0^T |(e^{-\varepsilon AT} - I_n)^{-1} e^{-\varepsilon At}| \mathrm{d}t,$$

则方程(4.6)必有满足 $|y(t)-y_0|\leqslant b$ 的惟一 T 周期解.

证明 令

$$G(t, y, \varepsilon) = F(t, y, \varepsilon) + \overline{f}_1(y) - A(y - y_0),$$

则(4.6)可写为

$$\dot{y} = \varepsilon[A(y - y_0) + G(t, y, \varepsilon)]. \qquad (4.8)$$

设 P_T 为由连续的 T 周期 n 维向量函数所成的 Banach 空间，定义

$$P_{T,b} = \{y \in P_T \,\big|\, |y - y_0| \leqslant b\},\ b > 0,$$

则 $P_{T,b}$ 为 P_T 的闭子集. 由第一章 §1 对(1.15)的讨论知，对任意 $f\in P_{T,b}$，方程

$$\dot{y} = \varepsilon[A(y - y_0) + f(t)]$$

有惟一解 $K_\varepsilon f\in P_T$，且 $|K_\varepsilon f|\leqslant M(\varepsilon)|f|$. 对任意 $y\in P_{T,b}$，令

$$(K^* y)(t) = (K_\varepsilon G(\cdot, y(\cdot)\varepsilon)(t)),$$

则由条件(i)～(iv)及微分中值定理知

$$|K^* y|\leqslant M(N + bL)\leqslant b,\ y \in P_{T,b},$$

$$|K^* y_1 - K^* y_2| \leqslant ML|y_1 - y_2|,\ y_i \in P_{T,b},\ i = 1, 2,$$

于是 K^* 为 $P_{T,b}$ 上的压缩映射,从而它有不动点 $y^* = y^*(t, \varepsilon)$. 由此,仿定理 3.1 可证 y^* 是(4.6)在 $P_{T,b}$ 中的惟一解. 证毕.

注意到 $L_1(0, b)=0$, $L_2(0)=0$, $N(0)=0$,如取 $b=2MN$,则当 ε 充分小时定理 4.1 的条件(ii)~(iv)自动成立,于是只要条件(i)成立,那么对充分小的 $\varepsilon \neq 0$,(4.6)就有 T 周期解. 这就是通常所说的(有关周期解存在的)平均定理. 此外,对 Poincaré 映射利用隐函数定理易证,如果 y_0 为(4.7)的双曲奇点,则(4.1)在 y_0 附近的周期解也是双曲的,且和 y_0 有相同的稳定性(这一结论也可仿定理 2.1 证之).

从形式上看,定理 4.1 的条件较多,但却包含了通常的平均定理所没有的信息. 利用这些条件可以粗略地估计使一些具体方程存在周期解的参数 ε 的变化范围. 在讨论具体例子之前,先给出定理 4.1 对一般周期线性方程的应用.

定理 4.2 考虑 n 维 T 周期线性系统

$$\dot{x} = \varepsilon[B(t)x + g(t)]. \tag{4.9}$$

设

(i) 常数矩阵 $A = \frac{1}{T}\int_0^T B(t)\mathrm{d}t$ 可逆,

(ii) $|B_0(t) - \overline{B}_0| \leqslant a_1$, $|B(t)(B_0(t) - \overline{B}_0) - (B_0(t) - \overline{B}_0)A| \leqslant a_2$,其中

$$B_0(t) = \int_0^t (B(s) - A)\mathrm{d}s,\ \overline{B}_0 = \frac{1}{T}\int_0^T B_0(t)\mathrm{d}t,$$

(iii) $0 < |\varepsilon| a_1 < 1$, $\frac{|\varepsilon| a_2}{1 - |\varepsilon| a_1} M(\varepsilon) < 1$,其中 M 如定理 4.1 中所给出,则方程(4.9)有惟一周期解.

证明 利用(4.5)易得 $W_y = B_0(t) - \overline{B}_0$,于是由(4.4)与(4.5)易知

$$F_y = (I + \varepsilon W_y)^{-1}\varepsilon[B(t)W_y - W_yA],$$

由条件(ii)知 $|W_y| \leqslant a_1$, $|BW_y - W_yB| \leqslant a_2$，于是利用 $|(I + \varepsilon W_y)^{-1}| \leqslant \dfrac{1}{1-|\varepsilon|a_1}$（见第一章§1）可得 $|F_y| \leqslant \dfrac{|\varepsilon|a_2}{1-|\varepsilon|a_1} \equiv L$，于是取充分大的 b，由定理 4.1 即得. 证毕.

由第一章§1知，若设 $\dot{x} = \varepsilon B(t)x$ 的基本解矩阵 $X(t)$ 满足 $X(0) = I_n$ 且 $\det(X(T) - I_n) \neq 0$，则(4.9)有惟一的 T 周期解. 然而一般情况下很难求出 $X(t)$，或根本求不出来，因此就无法断定 $X(t) - I_n$ 是否可逆，而定理 4.2 给出了变系数周期线性方程有惟一周期解的较易验证的充分条件. 此外，在定理 4.2 的条件(i)～(iii)下矩阵 $X(T) - I_n$ 必可逆.

例 4.1 考虑平面周期线性方程

$$\dot{x} = \varepsilon\left[\begin{pmatrix} 1+\cos t & \sin t \\ \cos t & 1+\sin t \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}\right], \qquad (4.10)$$

易知，对此方程成立 $T = 2\pi$, $A = I_2$, $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $M(\varepsilon) = 1$，于是定理 4.2 的条件(ii)成为 $|\varepsilon| < \dfrac{1}{2}$, $2|\varepsilon| < 1 - 2|\varepsilon|$，因此当 $0 < |\varepsilon| < \dfrac{1}{4}$ 时(4.10)恰有一个 2π 周期解.

作为定理 4.1 对非线性方程的应用，考虑下述周期标量方程

$$\dot{x} = \varepsilon[a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2], \qquad (4.11)$$

其中 a_i 为连续的 2π 周期函数，$i = 0, 1, 2$. 记

$$a_i^*(t) = \int_0^t (a_i(s) - \overline{a}_i)\mathrm{d}s - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^t (a_i(s) - \overline{a}_i)\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

$$\overline{a}_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_i(t)\mathrm{d}t, \ i = 0, 1, 2.$$

可取 $W(t, y) = a_0^* + a_1^* y + a_2^* y^2$，由(4.4)与(4.5)知

$$F(t,y,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon W_y)}[A_{10}(t)+[2A_{20}(t)$$

$$+(a_1-\overline{a}_1)a_1^*]y+[2A_{21}(t)+a_1a_2^*$$

$$-\overline{a}_2a_1^*]y^2+2(a_2-\overline{a}_2)a_2^*y^3+\varepsilon a_2W^2],$$

其中 $A_{ij}(t)=a_i(t)a_j^*(t)-\overline{a}_ja_i^*(t)$, $i,j=0,1,2$.若 $a_2=\overline{a}_2$,则 $a_2^*=0$,且直接计算可得

$$F_y=\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon W_y)}[b_0+\varepsilon b_1],\tag{4.12}$$

其中

$$b_0=2A_{20}(t)+(a_1-\overline{a}_1)a_1^*+2[2A_{21}(t)-\overline{a}_2a_1^*]y,$$

$$b_1=2a_2a_1^*W.\tag{4.13}$$

如果再有 $\overline{a}_0=0$,则 $y_0=0$,且

$$F(t,0,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon a_1^*}(a_1a_0^*+\varepsilon a_2(a_0^*)^2).\tag{4.14}$$

利用(4.12)~(4.14)可给出(4.11)有 2π 周期解的条件.

例 4.2 对下述具体的 2π 周期方程

$$\dot{x}=\varepsilon[\sin t+x(1+\cos t)+x^2],\tag{4.15}$$

我们有 $\overline{a}_0=0$, $\overline{a}_1=1$,$\overline{a}_2=a_2$, $a_0^*=-\cos t$, $a_1^*=\sin t$, $a_2^*=0$,从而 $W=-\cos t+y\sin t$,进一步由(4.13)知

$$b_0=\cos t(\sin t-2)+2y\sin t,\quad b_1=2W\sin t,$$

于是有

$$|W|\leqslant 1+|y|,\quad |W_y|\leqslant 1,$$

$$|b_0|\leqslant 2(3+|y|),\quad |b_1|\leqslant 1+2|y|,$$

设 $|y|\leqslant 1/4$,则 $|b_0|\leqslant 7$, $|b_1|\leqslant 3/2$,于是由(4.12)得

$$|F_y| \leqslant \frac{|\varepsilon|}{2(1-2|\varepsilon|)}(14+3|\varepsilon|) \equiv L_1.$$

由于 $A=1$,知 $L_2=1/8$,又由(4.14)知

$$|F(t,\ 0,\ \varepsilon)| \leqslant \frac{|\varepsilon|}{2(1-|\varepsilon|)}(1+2|\varepsilon|) \equiv N(\varepsilon).$$

又 $M(\varepsilon)=1$,于是由定理 4.1,取 $b=1/4$,只要 $|\varepsilon|<\frac{1}{12}$ 则有 $79|\varepsilon|+44\varepsilon^2 \leqslant 7$,或

$$\frac{|\varepsilon|(1+2|\varepsilon|)}{2(1-|\varepsilon|)}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{8}+\frac{|\varepsilon|}{2(1-|\varepsilon|)}(14+3|\varepsilon|)\right] \leqslant \frac{1}{4},$$

故当 $0<|\varepsilon| \leqslant \frac{1}{12}$ 时方程(4.15)必有 2π 周期解.

例 4.3 考虑环面方程

$$\dot{x} = \varepsilon[-\sin x+\cos t], \tag{4.16}$$

取 $L_1=N=\frac{|\varepsilon|}{1-|\varepsilon|}$, $L_2=b$, $M(\varepsilon)=\frac{2}{\sqrt{3}}$, 则利用定理 4.1 可得当 $0<|\varepsilon| \leqslant \frac{1}{3}$ 时(4.16)在环面上恰有两个 2π 周期解 $x_i(t)$, $i=1,\ 2$,且它们的值域为 $[0,\ 2\pi)$ 的真子集,而且当 $|\varepsilon|$ 充分小时有 $x_i(t)=\frac{1}{2}[1-(-1)^i]\pi+\varepsilon\sin t+O(\varepsilon^2)$, $i=1,\ 2$.

4.2 二重鞍结点与双曲极限环的周期扰动

设有一维自治系统

$$\dot{x} = f(x,\ \delta), \tag{4.17}$$

其中 $\delta \in R$, f: $R \times R \mapsto R$ 为 C^3 函数,设当 $\delta=0$ 时(4.17)在 $x=0$ 有二重鞍结点,即

$$f(0,\ 0)=0,\ f_x(0,\ 0)=0,\ a_{20}=f_{xx}(0,\ 0) \neq 0.$$

又设 $a_{01}=f_\delta(0,\ 0) \neq 0$,则 $\delta=0$ 为(4.17)的鞍结点分支值.事实

上由 Talor 公式可得

$$f(x, \delta) = a_0(\delta) + a_1(\delta)x + a_2(\delta)x^2 + O(x^3), \qquad (4.18)$$

其中

$$a_0(0) = a_1(0) = 0, \; a_{20} = a_2(0) \neq 0,$$
$$a_{01} = a_0'(0) \neq 0. \qquad (4.19)$$

于是当 $a_{01}a_{20}\delta<0(>0)$ 时(4.17)在 $x=0$ 附近有两个奇点(无奇点).

设有连续函数 $g(t, x, \varepsilon, \delta)$, 关于 t 为 T 周期的,关于 (x, ε, δ) 为 C^2 的,考虑(4.17)的 T 周期扰动系统

$$\dot{x} = f(x, \delta) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon, \delta), \qquad (4.20)$$

我们证明(4.20)的周期解与(4.17)在原点附近的奇点有完全类似的分支现象,即有:

定理 4.3 设(4.18)与(4.19)成立,则存在连续可微函数 $\delta=\delta(\varepsilon)=O(\varepsilon)$,使当 $a_{01}a_{20}(\delta-\delta(\varepsilon))<0(=0, >0)$ 时(4.20)在 $x=0$ 附近恰有两个周期解(一个鞍结点型周期解,没有周期解).

证明 记 $g_0(t)=g(t, 0, 0, 0)$,对(4.20)做尺度变换 $x=\sqrt{|\varepsilon|}y$, $\delta=|\varepsilon|\mu$,可得

$$\dot{y} = \sqrt{|\varepsilon|}\left[a_{01}\mu + a_{20}y^2 + (\mathrm{sgn}\varepsilon)g_0(t) + O(\sqrt{|\varepsilon|})\right].$$

由定理 3.2 及注 3.2,上述方程的 Poincaré 映射具有形式

$$P(y, \varepsilon) = y + \sqrt{|\varepsilon|}F(y, \varepsilon, \mu),$$

其中

$$F(y, \varepsilon, \mu) = a_{01}\mu + a_{20}y^2 + (\mathrm{sgn}\varepsilon)\bar{g}_0 + O(\sqrt{|\varepsilon|}),$$

$$\bar{g}_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \bar{g}_0(t)\mathrm{d}t.$$

由第一章定理 3.6 之前的论证知存在

$$\Delta = a_{20}F(y^*, \varepsilon, \mu) = a_{20}[a_{01}\mu + (\mathrm{sgn}\varepsilon)\bar{g}_0 + O(\sqrt{|\varepsilon|})]$$

(其中 $y^* = O(\sqrt{|\varepsilon|})$满足 $F_y(y^*, \varepsilon, \mu)=0$),使当 $\Delta<0(=0, >0)$时 F 关于 y 有两个单根(一个二重根,无根).而当 $a_{01}\neq 0$ 时存在函数 $\mu=\mu(\varepsilon)=-\dfrac{\bar{g}_0}{a_{01}}\mathrm{sgn}\varepsilon+O(|\varepsilon|^{\frac{1}{2}})$, 使 Δ 与 $a_{01}a_{20}(\mu-\mu(\varepsilon))$同号.令 $\delta(\varepsilon)=|\varepsilon|\mu(\varepsilon)$, 则 $\delta(\varepsilon)=-\dfrac{\bar{g}_0}{a_{01}}\varepsilon+O(|\varepsilon|^{\frac{3}{2}})$, 且

$$a_{20}a_{01}(\mu-\mu(\varepsilon))|\varepsilon| = a_{20}a_{01}(\delta-\delta(\varepsilon)).$$

证毕.

注 4.1 上述定理对 n 维系统也成立.设有 n 维系统

$$\dot{x} = f(x, \delta), (x, \delta) \in R^n \times R, \tag{4.21}$$

及其周期扰动系统

$$\dot{x} = \varepsilon^p[f(x, \delta) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon, \delta)], \tag{4.22}$$

其中 $p=0$ 或 1. 设 $f_x(0, 0)$有一零特征值,其余 $n-1$ 个特征值均具非零实部,则可证若(4.21)在其含参数的中心流形上的约简方程满足诸如(4.18)与(4.19)的条件,则(4.22)存在二重鞍结点分支曲线 $\delta=\delta(\varepsilon)$,即在$(\varepsilon, \delta)$平面上原点附近该曲线的某一侧(另一侧)(4.22)有两个周期解(无周期解).

在下一章我们将利用分支函数对周期解的局部分支做进一步的探讨.

再考虑二维 C^3 系统

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon, \delta), \tag{4.23}$$

其中 $\varepsilon\in R$, $\delta\in R^n$,且 g 关于 t 为 T 周期的.设对 $\varepsilon=0$,(4.23)有以某 $T_0>0$ 为周期的极限环 $L_0: x=u(t), 0\leqslant t\leqslant T_0$, 且设 T_0/T 为有理数:

$$T_0/T = m/k,\ (m,\ k) = 1. \tag{4.24}$$

注意到(4.23)的相空间为 $S^1 \times R^2$,当 $\varepsilon=0$ 时(4.23)有不变环面 $S^1 \times L_0$.进一步由(4.24)知,(4.23)($\varepsilon=0$)在该环面上的轨线

$$\tilde{L}_\theta = \{(t,\ u(t+\theta)) \mid 0 \leqslant t \leqslant mT\},\ 0 \leqslant \theta \leqslant T_0$$

均为闭轨,其周期为 $mT(=kT_0)$,如图 4.1 所示(其中 $m=2$, $k=3$).

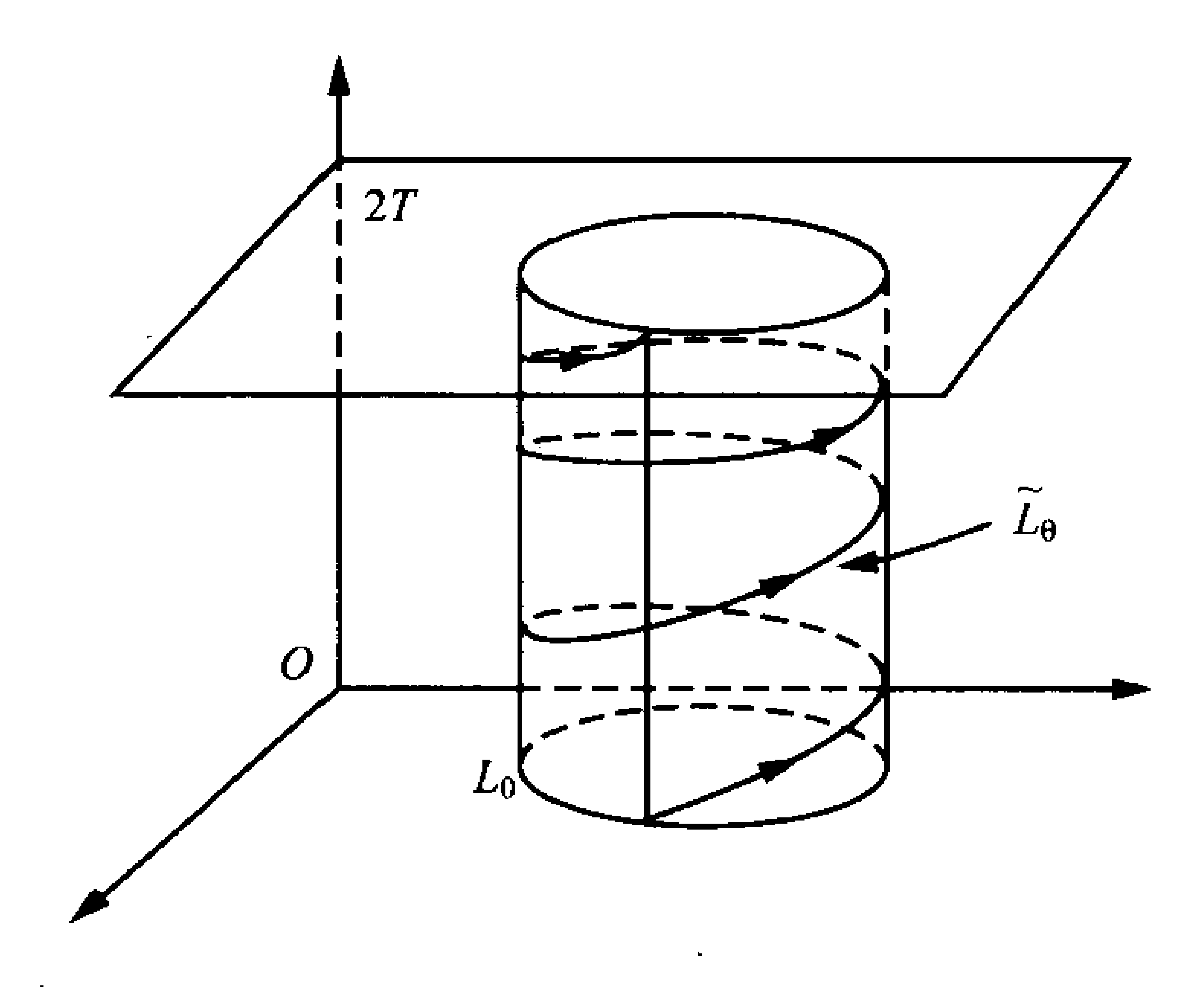


图 4.1

易见对每个 $\theta \in [0,\ T_0)$, $\tilde{L}_\theta$ 沿 L_0 方向转了 k 圈,而沿 S^1 方向转了 m 圈.我们的问题是要研究环面上这族闭轨在小扰动下何时产生(4.23)的 m 阶次调和解(当 $m>1$ 时)或调和解(当 $m=1$ 时).我们考虑一种最简单的情况,即设 L_0 为双曲的极限环,于是有

$$I_0 = \frac{1}{T_0}\oint_{L_0} \mathrm{tr} f_x \mathrm{d}t \neq 0. \tag{4.25}$$

由第 2 节的引理 2.1 知,变换

$$x = u(\theta) - Jv(\theta)h, \ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ v(\theta) = \frac{f(u(\theta))}{|f(u(\theta))|},$$

把(4.3)化为柱面周期系统

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= 1 + S_1(\theta)h + \varepsilon E(\theta)g_0(t, \theta, \delta) + O(|h, \varepsilon|^2), \\ \dot{h} &= A(\theta)h + \varepsilon v^T(\theta)Jg_0(t, \theta, \delta) + O(|h, \varepsilon|^2), \end{aligned} \tag{4.26}$$

其中

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \mathrm{tr} f_x(u(\theta)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln|f(u(\theta))|, \\ g_0(t, \theta, \delta) &= g(t, u(\theta), 0, \delta), \\ E(\theta) &= |f(u(\theta))|^{-1} v^T(\theta), \\ S_1(\theta) &= E(\theta)[Jv'(\theta) - f_x(u(\theta))Jv(\theta)]. \end{aligned} \tag{4.27}$$

对(4.26)做尺度变换 $h = \varepsilon r$ 可得

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= 1 + \varepsilon[S_1(\theta)r + E(\theta)g_0(t, \theta, \delta)] + O(\varepsilon^2), \\ \dot{r} &= A(\theta)r + v^T(\theta)Jg_0(t, \theta, \delta) + O(\varepsilon). \end{aligned} \tag{4.28}$$

设当 $t=0$ 时(4.28)的以(θ_0, r_0)为初值的解为

$$\theta(t, \theta_0, r_0) = \theta_0 + t + \varepsilon\theta_1(t, \theta_0, r_0) + O(\varepsilon^2),$$

$$r(t, \theta_0, r_0) = r_1(t, \theta_0, r_0) + O(\varepsilon),$$

其中 $\theta_1(0, \theta_0, r_0) = 0, r_1(0, \theta_0, r_0) = r_0$，将上列式子代入(4.28)可得

$$\dot{\theta}_1 = S_1(\theta_0 + t)r_1(t, \theta_0, r_0) + E(\theta_0 + t)g_0(t, \theta_0 + t, \delta),$$

$$\dot{r}_1 = A(\theta_0 + t)r_1 + v^T(\theta_0 + t)Jg_0(t, \theta_0 + t, \delta).$$

注意到，由(4.27)第一式有

$$\exp\int_0^t A(\theta_0 + s)\mathrm{d}s = \frac{|f(u(\theta_0))|}{|f(u(\theta_0 + t))|}\exp\int_0^t \mathrm{tr} f_x(u(\theta_0 + s))\mathrm{d}s,$$

从上面微分方程可解得

$$r_1(t, \theta_0, r_0) = \frac{1}{|f(u(\theta_0 + t))|}[|f(u(\theta_0))| r_0$$

$$+ R(t, \theta_0)]\exp\int_0^t \mathrm{tr} f_x(u(\theta_0 + s))\mathrm{d}s,$$

$$\theta_1(t, \theta_0, r_0) = \int_0^t [S_1(\theta_0 + s) r_1(s, \theta_0, r_0) + E(\theta_0$$

$$+ s) g_0(s, \theta_0 + s, \delta)]\mathrm{d}s, \tag{4.29}$$

其中

$$R(t, \theta_0) = \int_0^t \exp[-\int_0^s \mathrm{tr} f_x(u(\theta_0 + z)\mathrm{d}z] f(u(\theta_0$$

$$+ s)) \wedge g(s, u(\theta_0 + s), 0, \delta)\mathrm{d}s, \tag{4.30}$$

设(4.28)的 Poincaré 映射为 $P(\theta_0, r_0, \varepsilon, \delta)$,则其 m 次复合为

$$P^m(\theta_0, r_0, \varepsilon, \delta) = (\theta(mT, \theta_0, r_0), r(mT, \theta_0, r_0))^T$$

$$= (P_1^m(\theta_0, r_0, \varepsilon, \delta), P_2^m(\theta_0, r_0, \varepsilon, \delta))^T.$$

由(4.29)第一式知

$$P_2^m(\theta_0, r_0, \varepsilon, \delta) - r_0 = (N_0 - 1) r_0 + \frac{N_0 R(mT, \theta_0)}{|f(u(\theta_0))|} + O(\varepsilon),$$

$$N_0 = e^{kT_0 I_0}.$$

因为 $I_0 \neq 0$,由隐函数定理知方程 $P_2^m(\theta_0, r_0, \varepsilon, \delta) - r_0 = 0$ 有根

$$r_0 = \frac{N_0 R(mT, \theta_0)}{(1 - N_0)|f(u(\theta_0))|} + O(\varepsilon) \equiv r_0^*(\theta_0, \varepsilon),$$

代入到(4.29)第二式可得

$$\theta_1(mT, \theta_0, r_0^*)|_{\varepsilon=0} = \int_0^{mT} [S_1(\theta_0 + t) r_1(t, \theta_0, r_0^*(\theta_0, 0)) + E(\theta_0 + t) g(t, u(\theta_0 + t), 0, \delta)] \mathrm{d}t.$$

易证

$$v'(\theta) = f_x(u(\theta)) v(\theta) - [v^T(\theta) f_x^T(u(\theta)) v(\theta)] v(\theta),$$

$$v^T J v = 0,$$

由(4.27)知

$$S_1(\theta) = |f(u(\theta))|^{-1} v^T(\theta)[J f_x(u(\theta)) - f_x(u(\theta)) J] v(\theta) = |f(u(\theta))| V(\theta),$$

其中

$$V(\theta) = \frac{1}{|f(u(\theta))|^4} f^T(u(\theta))[J f_x(u(\theta)) - f_x(u(\theta)) J] f(u(\theta)). \tag{4.31}$$

又由(4.29)第一式知

$$r_1(t, \theta_0, r_0^*(\theta_0, 0)) = |f(u(\theta_0 + t))|^{-1} Q(t, \theta),$$

其中

$$Q(t, \theta_0) = \left[\frac{N_0 R(mT, \theta_0)}{1 - N_0} + R(t, \theta_0)\right] \cdot \exp\int_0^t \mathrm{tr} f_x(u(\theta_0 + s)) \mathrm{d}s, \tag{4.32}$$

于是

$$\theta_1(mT, \theta_0, r_0^*)|_{\varepsilon=0} = \int_0^{mT} [V(\theta_0 + t) Q(t, \theta_0) + K(t, \theta_0)] \mathrm{d}t \equiv W(\theta_0, \delta), \tag{4.33}$$

其中

$$K(t, \theta_0) = |f(u(\theta_0 + t))|^{-2} f^T(u(\theta_0 + t)) \cdot g(t, u(\theta_0 + t), 0, \delta), \tag{4.34}$$

从而

$$P_1^m(\theta_0, r_0^*, \varepsilon, \delta) = \theta_0 + mT + \varepsilon[W(\theta_0, \delta) + O(\varepsilon)].$$

若 $W(\theta_0, \delta)$关于 θ_0 有单根 $\bar{\theta}_0$,则存在函数 $\theta_0^*(\varepsilon) = \bar{\theta}_0 + O(\varepsilon)$使

$$P_1^m(\theta_0^*, r_0^*, \varepsilon, \delta) = \theta_0^* + mT = \theta_0^* (\mathrm{mod} T),$$

于是柱面周期方程(4.28)有 m 阶次调和解$(\theta(t, \theta_0^*, r_0^*), r(t, \theta_0^*, r_0^*))$, 由此可得(4.23)的 m 阶次调和解

$$x^*(t, \varepsilon, \delta) = u(\theta(t, \theta_0^*, r_0^*)) - Jv(\theta(t, \theta_0^*, r_0^*))r(t, \theta_0^*, r_0^*)\varepsilon.$$

又与定理 4.3 的证明类似,若函数 $W(\theta_0, \delta)$在某 $\delta = \delta_0$ 处有二重根分支,则(4.23)的 m 阶次调和解在δ_0 附近有鞍结点型分支,于是我们获得下述定理.

定理 4.4 设(4.24)与(4.25)成立.

(i) 设存在 $\bar{\theta}_0 \in [0, T_0)$, $\delta \in R^n$, 使 $W(\bar{\theta}_0, \delta) = 0$, $W_{\theta_0}(\bar{\theta}_0, \delta) \neq 0$,则当$|\varepsilon|$充分小时方程(4.23)存在 m 阶次调和解$x^*(t, \varepsilon, \delta) = u(\bar{\theta}_0 + t) + O(\varepsilon)$.

(ii) 如果存在 $\bar{\theta}_0 \in [0, T_0]$, $\delta_0 \in R$ 使

$$\begin{gathered} W(\bar{\theta}_0, \delta_0) = W_{\theta_0}(\bar{\theta}_0, \delta_0) = 0, \\ W_{\theta_0\theta_0}(\bar{\theta}_0, \delta_0) \neq 0, \ W_\delta(\bar{\theta}_0, \delta_0) \neq 0, \end{gathered} \tag{4.35}$$

则(4.23)的 m 阶次调和解存在鞍结点分支曲线$\delta = \delta(\varepsilon) = \delta_0 + O(\varepsilon)$.

注 4.2 因为方程(4.28)关于 θ 为 T_0 周期的，因此若对紧集中的 δ，$W(\theta_0, \delta)$在$[0, T_0)$中关于 θ_0 恰有 N 个单根，则当$|\varepsilon|$充分小是(4.23)在 L_0 的邻域内恰有 N 个(不同的)m 阶次调和解.同理，若对同一个 δ_0，$W(\theta_0, \delta_0)$在$[0, T_0)$中恰有 M 个$\bar{\theta}_0$ 使(4.35)成立，则(4.23)也恰有 M 个鞍结点型周期解，且对应的鞍结点分支值均在 δ_0 附近.

注 4.3 由于 L_0 为双曲极限环，利用积分流形理论可证当$|\varepsilon|$充分小时(4.23)在 $S^1 \times L_0$ 附近有双曲的不变环面，且当 $I_0<0(>0)$时该不变环面为吸引的(排斥的).由此知定理 4.4 中的 m 阶次调和解在(4.23)的相空间所对应的闭轨线必位于这一不变环面上，而且利用(4.28)的 Poincaré 映射可以确定闭轨的稳定性.定理 4.4 中的 m 阶次调和解的鞍结点对应于不变环面上的半稳定环分支.此外，我们指出不难把定理 4.4 推广到高维系统.

鞍结点分支现象已在前面多次论及，实际上，这种分支现象是最简单的，也是容易描述的.定理 4.4 中所描述的分支现象也应是很基本的.比定理 4.4 较为复杂的情况是半稳定环在周期扰动下调和解与不变环面的分支问题，对这一问题的讨论详见[42]或[106].

例 4.4 考虑

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{m}y + x(x^2 + y^2 - 1) + \varepsilon y[x^m \cos t + \delta], \\ \dot{y} &= -\frac{1}{m}x + y(x^2 + y^2 - 1) - \varepsilon x[x^m \cos t + \delta], \end{aligned} \tag{4.36}$$

其中 $m=1, 2$. 当 $\varepsilon=0$ 时(4.36)有双曲极限环 $L_0:(x, y)=\left(\sin\frac{t}{m}, \cos\frac{t}{m}\right)$, $0 \leqslant t \leqslant 2m\pi = T_0$, 由(4.36)的形式及(4.30), (4.32)知 $Q(t, \theta_0)=0$. 由(4.34)知

$$K(t, \theta_0) = m\left(\delta + \cos t \sin^m \frac{\theta_0 + t}{m}\right),$$

故由(4.33)知

$$W(\theta_0, \delta) = m^2\left[2\delta\pi + \int_0^{2\pi}\cos(m\phi - \theta_0)\sin^m\phi\mathrm{d}\phi\right],$$

即有

$$W(\theta_0, \delta) = \begin{cases}\pi[2\delta + \sin\theta_0], \text{若 } m = 1, \\ \pi[2\delta + \cos\theta_0], \text{若 } m = 2.\end{cases}$$

因此,由定理 4.4 知,对 $m=1$,存在两条鞍结点分支曲线 $\delta = \delta_i(\varepsilon) = \frac{1}{2}(-1)^i + O(\varepsilon)$, $i=1, 2$, 使当 $\delta_1(\varepsilon) < \delta < \delta_2(\varepsilon)$时,(4.36)有两个调和解,当 $\delta = \delta_i(\varepsilon)$($i=1$ 或 $i=2$)时(4.36)有鞍结点型退化调和解,当$|\delta|$有界且$\delta<\delta_1(\varepsilon)$或 $\delta>\delta_2(\varepsilon)$时(4.36)没有调和解.此时,在(4.36)的不变环面上分支现象如下:当 $\delta<\delta_1(\varepsilon)$时环面上无闭轨,当 $\delta=\delta_1(\varepsilon)$时出现一半稳定极限环(为(1, 1)型的闭曲线),当 δ 从$\delta_1(\varepsilon)$增加时半稳定环已分裂成两个极限环,当 δ 增至$\delta_2(\varepsilon)$时此两环在另一位置又合并成一新半稳定环,当 $\delta>\delta_2(\varepsilon)$时新半稳定环消失,环面上不再有任何闭轨.我们看到当 δ 取遍闭区间$[\delta_1(\varepsilon), \delta(\varepsilon)]$上所有值时极限环扫过了整个环面.

对 $m=2$,由注 4.2 知,存在四条鞍结点分支曲线 $\delta = \delta_{ij}(\varepsilon) = \frac{1}{4}(-1)^i + O(\varepsilon)$, $i, j=1, 2$. 相应的鞍结点型 2 阶次调和解为

$$u_{ij}(t, \varepsilon) = \left(\sin\frac{\theta_{ij}}{2}, \cos\frac{\theta_{ij}}{2}\right) + O(\varepsilon),$$

$$\theta_{1j} = (2 + (1-)^j)\pi, \ \theta_{2j} = (1 + (-1)^j)\pi.$$

因此 $\theta_{i2} - \theta_{i1} = 2\pi$, $i = 1, 2$, 从而 $\left(\sin\frac{\theta_{i1}}{2}, \cos\frac{\theta_{i1}}{2}\right) =$

$-\left(\sin\frac{\theta_{i2}}{2}, \cos\frac{\theta_{i2}}{2}\right)$, $i=1, 2$, 注意到(4.36)关于原点对称,故必有 $u_{i1}(t, \varepsilon) = -u_{i2}(t, \varepsilon)$, $i=1, 2$. 这说明 $\delta_{i1}(\varepsilon) = \delta_{i2}(\varepsilon) \equiv \delta_i(\varepsilon)$, $i=1, 2$. 于是当 $\delta_1(\varepsilon) < \delta < \delta_2(\varepsilon)$时,(4.36)有 4 个调和解,当 $\delta < \delta_1(\varepsilon)$或 $\delta > \delta_2(\varepsilon)$时没有次调和解. 仿上不难给出(4.36)在其不变环面上与二阶次调和解对应的闭轨线的分支现象.

§5 Poincaré 分支与 Melnikov 函数

在第二节与上一节我们已研究过一条孤立闭轨在自治与周期扰动下周期解的分支问题. 本节进一步研究一族闭轨的扰动分支,有时称这种分支为 Poincaré 分支. 我们已多次使用过曲线坐标,此处我们将利用首次积分引入另一种坐标变换,使得变换后的方程也是柱面系统,然后通过 Poincaré 映射的主项来导出所谓的 Melnikov 函数,这一函数是讨论周期解及其分支的重要工具.

5.1 基本假设与引理

设有 n 维自治系统

$$\dot{x} = f(x), \tag{5.1}$$

及其周期扰动系统

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon), \tag{5.2}$$

其中 $x \in R^n$, $\varepsilon \in R$, f, g 为C^r 函数, $r \geqslant 1$,且 g 为 t 的 T 周期函数. 假设(5.1)有一族充满 R^n 中某开集的闭轨,且这族闭轨由(5.1)的 $n-1$ 个首次积分来给出. 详之,我们做下述基本假设:

(A) 方程(5.1)存在 $n-1$ 个 C^{r+1} 首次积分 $H_i(x)$, $i=1, \cdots, n-1$, $x \in U$, $U \subset R^n$ 为开集,使得对一切 $x \in U$,梯度向量组 $DH_i(x)$, $i=1, \cdots, n-1$,为线性无关的.

(B) 存在开集 $V \subset R^{n-1}$,使对 $H(x) = (H_1(x), \cdots,$

$H_{n-1}(x))^T$, $h=(h_1, \cdots, h_{n-1})^T\in V$,集合 $L_h=\{x\in U \mid H(x)=h\}$为 U 的紧子集,且 L_h 不含(5.1)的奇点.

于是$\{L_h: h\in V\}$为(5.1)的含 $n-1$ 个独立参数 h 的闭轨族.设 L_h 有下列参数方程

$$L_h: x = q(t, h), 0\leqslant t\leqslant T(h),$$

其中 $T(h)$为 L_h 的周期.令

$$\Omega(h) = \frac{2\pi}{T(h)}, G(\theta, h) = q\left(\frac{\theta}{\Omega(h)}, h\right), 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

则 G 与 G_θ 为 C^r 函数且关于 θ 为 2π 周期的,且由 L_h 与 G 的定义知成立

$$H(G(\theta, h))\equiv h, \tag{5.3}$$

$$G_\theta(\theta, h) = f(G)/\Omega(h). \tag{5.4}$$

下列两个引理是基本的.

引理 5.1 存在惟一的 n 维行向量 $\alpha(\theta, h)$关于$(\theta, h)\in[0, 2\pi]\times V$ 为 C^r 的,关于 θ 为 2π 周期的,使得 $\alpha(\theta, h)G_h(\theta, h)=0$, $\alpha(\theta, h)G_\theta(\theta, h)=1$.

证明 设 S_1 表示由$(n-1)\times n$ 矩阵$DH(G)$的 $n-1$ 个行向量所张成的超平面,S_2 表示由 $n\times(n-1)$矩阵 G_h 的$n-1$ 个列向量所张成的超平面,由(5.3)知

$$DH(G)G_h = I_{n-1}, DH(G)G_\theta = 0. \tag{5.5}$$

由(5.5)第一式知 S_1 与 S_2 均为 $n-1$ 维的,由其第二式知列向量 G_θ 与S_1 正交.进一步可证 G_θ 不与S_2 平行.否则存在列向量 β 使有 $G_\theta=G_h\beta$,两边左乘 $DH(G)$,并利用(5.5)知 $\beta=0$,从而 $G_\theta=0$,于是由(5.4)知 $f(G)=0$,这与 L_h 为闭轨矛盾.因此 G_θ 不与 S_2 平行,于是超平面 S_1 与 S_2 之间的夹角 ϕ 满足 $0\leqslant\phi<\frac{\pi}{2}$.如果

$\phi=0$,则可取

$$\alpha(\theta, h) = (G_\theta)^T / |G_\theta|^2.$$

如果 $0<\phi<\frac{\pi}{2}$,记 $L=S_1\cap S_2$ 为 S_1 与 S_2 的交线,现绕直线 L 按角度 ϕ 旋转超平面 S_1,使旋转后的 S_1 到达 S_2 的原位置.设向量 G_θ 在旋转后成为 γ,则 γ 与 S_2 正交,且满足

$$\gamma \cdot G_\theta = |G_\theta|^2\cos\phi > 0.$$

令 $\alpha(\theta, h)=\dfrac{\gamma}{|G_\theta|^2\cos\phi}$,易知对这样选取的 α,引理结论成立.

引理 5.2 周期变换

$$x = G(\theta, h),\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ h\in V, \tag{5.6}$$

把方程(5.2)化为下列 C^r 系统

$$\begin{aligned} \dot\theta &= \Omega(h) + \varepsilon\alpha(\theta, h)g(t, G(\theta, h), \varepsilon), \\ \dot h &= \varepsilon DH(G(\theta, h))g(t, G(\theta, h), \varepsilon). \end{aligned} \tag{5.7}$$

证明 对(5.6)两边关于 t 求导,并利用(5.2)可得

$$G_\theta\dot\theta + G_h\dot h = f(G) + \varepsilon g(t, G, \varepsilon), \tag{5.8}$$

上式两端左乘 $DH(G)$且利用(5.4)与(5.5)即得(5.7)第二式.类似,用 $\alpha(\theta, h)$左乘(5.8)两端且利用引理 5.1 及(5.4)可得(5.7)第二式.证毕.

5.2 次调和解与次调和 Melnikov 函数

为利用(5.7)讨论(5.2)的次调和解,设存在 $h_0\in V$ 及互素自然数 m, k 使

$$\frac{2\pi}{\Omega(h_0)T} = \frac{T(h_0)}{T} = \frac{m}{k}, \tag{5.9}$$

又设 $\theta(t, \theta_0, r)$, $h(t, \theta_0, r)$为(5.7)的满足 $\theta(0, \theta_0, r)=\theta_0$,

$h(0, \theta_0, r) = r$ 的解,则可设

$$\theta(t, \theta_0, r) = \theta_0 + \Omega(r)t + \varepsilon\theta_1(t, \theta_0, r) + O(\varepsilon^2),$$

$$h(t, \theta_0, r) = r + \varepsilon h_1(t, \theta_0, r) + O(\varepsilon^2),$$

$$\theta_1(0, \theta_0, r) = 0, h_1(0, \theta_0, r) = 0. \tag{5.10}$$

利用 $\Omega(h) = \Omega(r) + D\Omega(r)(h - r) + O(|h - r|^2)$, 将(5.10)代入(5.7)可得

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= D\Omega(r)h_1 + \alpha(\theta_0 + \Omega(r)t, r)g(t, G(\theta_0 + \Omega(r)t, r), 0), \\ \dot{h}_1 &= DH(G(\theta_0 + \Omega(r)t, r))g(t, G(\theta_0 + \Omega(r)t, r), 0), \end{aligned} \tag{5.11}$$

因此可解得

$$h_1(t, \theta_0, r) = \int_0^t DH(G(\theta_0 + \Omega(r)s, r)) \cdot g(s, G(\theta_0 + \Omega(r)s, r), 0)\mathrm{d}s,$$

于是

$$\begin{aligned} & h_1(mT, \theta_0, r) \\ &= \int_0^{mT} DH(G(\theta_0 + \Omega(r)s, r))g(s, G(\theta_0 + \Omega(r)s, r), 0)\mathrm{d}s \\ &\equiv h_1^*(\theta_0, r). \end{aligned} \tag{5.12}$$

又令 $\theta_1^*(\theta_0, r) = \theta_1(mT, \theta_0, r)$, 则由(5.10)知(5.7)的 Poincaré 映射 $P(\theta_0, r, \varepsilon)$的 m 次复合为

$$\begin{aligned} P^m(\theta_0, r, \varepsilon) &= (\theta(mT, \theta_0, r), h(mT, \theta_0, r))^T \\ &= (\theta_0 + \Omega(r)mT, r)^T + \varepsilon(\theta_1^*(\theta_0, r), \\ &\quad h_1^*(\theta_0, r))^T + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

因为当 $r-h_0$ 充分小时有 $\Omega(r)=\Omega(h_0)+D\Omega(h_0)(r-h_0)+O(|r-h_0|^2)$，利用(5.9)可得

$$P^m(\theta_0, r, \varepsilon)-(\theta_0, r)^T$$
$$=(2k\pi, 0)^T+(F_1(\theta_0, r, \varepsilon), \varepsilon F_2(\theta_0, r, \varepsilon))^T, \quad (5.13)$$

其中

$$F_1(\theta_0, r, \varepsilon)=mT(\Omega(r)-\Omega(h_0))+\varepsilon\theta_1^*(\theta_0, r)+O(\varepsilon^2),$$
$$F_2(\theta_0, r, \varepsilon)=h_1^*(\theta_0, r)+O(\varepsilon). \quad (5.14)$$

令

$$M(t_0, h)=\int_0^{mT}DH(q(t+t_0, h))g(t, q(t+t_0, h), 0)\mathrm{d}t, \quad (5.15)$$

则由(5.12)易知

$$h_1^*(\theta_0, r)=M\left(\frac{\theta_0}{\Omega(r)}, r\right). \quad (5.16)$$

记 $M^{m/k}(t_0)=M(t_0, h_0)$，常称 $M^{m/k}$ 为方程(5.2)的 m 阶次调和 Melnikov 函数. 关于此函数的周期我们有下列引理.

引理 5.3 设(5.9)成立，则 $M^{m/k}$ 为周期函数，而且若它不是常数且其周期为 T_0，则存在自然数 $l\geqslant 1$ 使 $T(h_0)=mlT_0$，$T=klT_0$.

证明 由(5.12)知 h_1^* 关于 θ_0 为 2π 周期的，又由(5.15)及 $M^{m/k}$ 的定义知 $M^{m/k}$ 为 $T(h_0)$ 周期的. 另一方面，由(5.15)知

$$M^{m/k}(t_0)=\int_0^{mT}DH(q(t, h_0))g(t-t_0, q(t, h_0), 0)\mathrm{d}t, \quad (5.17)$$

因此这一函数又是 T 周期的，设它不是常数且 T_0 为其(最小)周

期，则 $T(h_0)$ 与 T 必均为 T_0 的整数倍，再由(5.9)及 m 与 k 的互素性即知结论成立.

关于(5.2)在 L_{h_0} 附近周期解的存在性，我们有下述定理.

定理 5.1 设基本假设(A)与(B)成立，又设(5.9)成立.

(i) 若对一切 $t_0\in[0,\ T]$ 有 $M^{m/k}(t_0)\neq 0$，则对充分小的 $|\varepsilon|>0$，(5.2)在 L_{h_0} 的邻域内没有任何调和解与次调和解.

(ii) 若存在 $t_0^*\in[0,\ T(h_0))$ 使

$$M^{m/k}(t_0^*)=0,\ I(t_0^*)\neq 0, \tag{5.18}$$

其中

$$I(t_0)=\begin{vmatrix} 0 & mT\dfrac{\partial\Omega}{\partial h} \\ \dfrac{1}{\Omega}\dfrac{\partial M}{\partial t_0} & \dfrac{\partial M}{\partial h}-\dfrac{t_0}{\Omega}\dfrac{\partial M}{\partial t_0}\dfrac{\partial\Omega}{\partial h}\end{vmatrix}_{(t_0,\ h_0)},$$

则对充分小的 $|\varepsilon|>0$，当 $m>1(=1)$ 时(5.2)存在 m 阶次调和解(调和解) $x(t,\ \varepsilon)=q(t+t_0^*,\ h_0)+O(\varepsilon)$.

证明 若当 $|\varepsilon|$ 充分小时(5.2)在 L_{h_0} 的邻域内有 l 阶次调和解 $x^*(t,\ \varepsilon)$，则当 $\varepsilon\to 0$ 时 x^* 必趋于 L_{h_0} 上某解，即存在 t_0^* 使成立

$$\lim_{\varepsilon\to 0}x^*(t,\ \varepsilon)=q(t+t_0,\ h_0),$$

因为 $T(h_0)$ 使 $q(t,\ h_0)$ 为(最小)周期，而上式说明 $q(t,\ h_0)$ 为 lT 周期的，故 lT 必是 m 的整数倍. 另一方面，由(5.12)，(5.15)与(5.16)知当 $|\varepsilon|+|r-h_0|$ 充分小时

$$F_2(\theta_0,\ r,\ \varepsilon)=M^{m/k}\left(\frac{\theta_0}{\Omega(h_0)}\right)+O(|\varepsilon|+|r-h_0|)\neq 0,$$

故由(5.13)知(5.2)在 L_{h_0} 附近必没有 $m,\ 2m,\ 3m,\ \cdots$ 阶的次调

和解，从而没有 l 阶的次调和解，矛盾. 于是结论(i)得证.

现设(5.18)成立，则由(5.16)知

$$\frac{\partial h_1^*}{\partial \theta_0}(\theta_0^*, h_0) = \frac{1}{\Omega(h_0)} \frac{\partial M}{\partial t_0}(t_0^*, h_0),$$

$$\frac{\partial h_1^*}{\partial r}(\theta_0^*, h_0) = \frac{\partial M}{\partial h}(t_0^*, h_0) - \frac{t_0^*}{\Omega(h_0)} \frac{\partial M}{\partial t_0}(t_0^*, h_0) D\Omega(h_0),$$

其中 $\theta_0^* = \Omega(h_0) t_0^*$. 因此由(5.14)知(5.18)等价于

$$F_i(\theta_0^*, h_0, 0) = 0,\ i = 1, 2,\ \det \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(\theta_0, r)}\bigg|_{(\theta_0^*, h_0, 0)} \neq 0,$$

于是由隐函数定理知存在惟一的 $(\theta_0(\varepsilon), r(\varepsilon)) = (\theta_0^*, h_0) + O(\varepsilon)$ 使

$$F_i(\theta_0(\varepsilon), r(\varepsilon), \varepsilon) = 0,\ i = 1, 2,$$

因此，由(5.13)知

$$P^m(\theta_0(\varepsilon), r(\varepsilon), \varepsilon) = (2k\pi + \theta_0(\varepsilon), r(\varepsilon))^T,$$

故 $\theta(t, \theta_0(\varepsilon), r(\varepsilon), h(t, \theta_0(\varepsilon), r(\varepsilon)))$ 为“超柱面”周期系统(5.7)的 mT 周期解. 最后由(5.6)知(5.2)有 mT 周期解 $x(t, \varepsilon) = G(\theta(t, \theta_0(\varepsilon), r(\varepsilon)), h(t, \theta_0(\varepsilon), r(\varepsilon))) = q(t + t_0^*, h_0) + O(\varepsilon)$. 证毕.

注 5.1 与注 4.2 类似，如果在区间 $[0, T(h_0))$ 上有 N 个不同的 t_0^* 使(5.18)成立，则相应的 θ_0^* 均位于区间 $[0, 2\pi)$ 中，因此可得(5.2)在 L_{h_0} 邻域内 N 个不同的 m 阶次调和解. 又若 $k = 1$，则 $T(h_0) = mT$，因此若对 $k = 1$，周期函数 $M^{m/k}$ 在 $[0, T)$ 上有 l 个根(l 一般为偶数)，则 $M^{m/k}$ 在区间 $[0, T(h_0))$ 上有 ml 个根.

若(5.1)与(5.2)为平面系统，且设(5.1)中 f 满足，

$$f(x) = JDH(x),\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.19}$$

则由(5.17)与(5.18)知

$$M^{m/k}(t_0) = \int_0^{m/T} f(q(t, h)) \wedge g(t - t_0, q(t, h_0), 0)\mathrm{d}t,$$

$$I(t_0) = -\frac{mT\Omega'(h_0)}{\Omega(h_0)}(M^{m/k})'(t_0^*).$$

于是由定理 5.1 即得.

推论 5.1 设(5.9)与(5.19)成立. 若 $\Omega'(h_0) \neq 0$ 且存在 $t_0^* \in [0, T(h_0))$,使

$$M^{m/k}(t_0^*) = 0,\ (M^{m/k})'(t_0^*) \neq 0,$$

则当 $|\varepsilon| > 0$ 充分小时平面周期系统(5.2)有 m 阶次调和解(对 $m > 1$)或调和解(对 $m = 1$) $x(t, \varepsilon) = q(t + t_0^*, h_0) + O(\varepsilon)$.

注 5.2 我们指出,如果 $k = 1$,则可证存在与 m 无关的一致常数 $\varepsilon_0 > 0$,使推论 5.1 的结论对一切 $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$ 一致成立(参考[29]中的定理 4.6.2).

如果 $n = 3$,则 $h = (h_1, h_2)^T$, $H(x) = (H_1(x), H_2(x))^T$,从而

$$DH(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial H_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial H_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial H_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial H_2}{\partial x_3} \end{pmatrix},$$

$$D\Omega(h) = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial h_1}, \frac{\partial \Omega}{\partial h_2}\right),\ M(t_0, h) = \begin{pmatrix} M_1(t_0, h) \\ M_2(t_0, h) \end{pmatrix},$$

且

$$I(t_0)=\begin{vmatrix} 0 & mT\dfrac{\partial\Omega}{\partial h_1} & mT\dfrac{\partial\Omega}{\partial h_2} \\ \dfrac{1}{\Omega}\dfrac{\partial M_1}{\partial t_0} & K_{11} & K_{12} \\ \dfrac{1}{\Omega}\dfrac{\partial M_2}{\partial t_0} & K_{21} & K_{22} \end{vmatrix}_{(t_0,\,h_0)}, \quad (5.20)$$

其中 $K_{ij}=\dfrac{\partial M_i}{\partial h_j}-\dfrac{t_0}{\Omega}\dfrac{\partial M_i}{\partial t_0}\dfrac{\partial\Omega}{\partial h_j}$, i, $j=1$, 2.

例 5.1 考虑三维系统

$$\dot{x}=yz,\ \dot{y}=-xz+\varepsilon y(a+\sin t),$$
$$\dot{z}=-\varepsilon(x^2+y^2-z). \quad (5.21)$$

当 $\varepsilon=0$ 时(5.21)有首次积分 $H_1(x, y, z)=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)z$, $H_2(x, y, z)=z$, 且有闭轨族

$$L_h: x^2+y^2=2h_1h_2^{-1},\ z=h_2,\ h_1>0,\ h_2>0,$$

其参数方程为

$$x=\sqrt{2h_1h_2^{-1}}\sin h_2t,\ y=\sqrt{2h_1h_2^{-1}}\cos h_2t,$$
$$z=h_2,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi h_2^{-1}\equiv T(h).$$

注意到 $T=2\pi$, $\Omega=h_2$, 若设(5.9)成立, 则 $h_0=\left(h_{10}, \dfrac{k}{m}\right)$, $h_{10}>0$. 对(5.21)套公式(5.15)可知

$$M_2(t_0, h)=mT(h_2-2h_1h_2^{-1}),$$
$$M_1(t_0, h)=2h_1K(t_0, h_2)+h_1h_2^{-1}M_2,$$

其中

$$K(t_0, h_2) = \int_0^{mT} (a + \sin t)\cos^2 h_2(t + t_0)\mathrm{d}t.$$

直接计算可知

$$K(t_0, h_2) = am\pi + \frac{1}{4}A(h_2)\cos 2h_2 t_0 + \frac{1}{4}B(h_2)\sin 2h_2 t_0,$$

$$A(h_2) = \int_0^{mT} [2a\cos 2h_2 t + \sin(1 - 2h_2)t + \sin(1 + 2h_2)t]\mathrm{d}t,$$

$$B(h_2) = \int_0^{mT} [-2a\sin 2h_2 t + \cos(1 + 2h_2)t - \cos(1 - 2h_2)t]\mathrm{d}t,$$

且当$(m, k) \neq (2, 1)$时有 $A\left(\frac{k}{m}\right) = B\left(\frac{k}{m}\right) = 0$,当 $m = 2, k = 1$ 时 $A\left(\frac{1}{2}\right) = 0, B\left(\frac{1}{2}\right) = -4\pi$. 由此可知,若$(m, k) \neq (2, 1)$,则当 $a \neq 0$ 时 $M^{m/k}(t_0)$为非零常数.若 $m = 2, k = 1$,则

$$M^{2/1}(t_0) = (2\pi h_{10}(2a - \sin t_0 + 2(1 - 8h_{10})), 2\pi(1 - 8h_{10}))^T,$$

因此,$M^{2/1}(t_0)$有根的必要条件是 $h_{10} = \frac{1}{8}$,且$|a| \leqslant \frac{1}{2}$. 由(5.20)又知对 $h_0 = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$有

$$I(t_0) = 8\pi \frac{\partial M_1}{\partial t_0} \frac{\partial M_2}{\partial h_1} = 32\pi^3 \cos t_0.$$

从而对$|a| < \frac{1}{2}$,存在 $t_i^* \in [0, 4\pi)$, $i = 1, 2, 3, 4$,使 $M^{2/1}(t_i^*) = 0$, $I(t_i^*) \neq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, 于是由定理 5.1 与注 5.1,对(5.21)成立下述结论:若 $a \neq 0$,则当$|\varepsilon| > 0$ 充分小时(5.21)只可能在 $L_{\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)} = L^*$ 附近有周期解,若$|a| > \frac{1}{2}$,则当$|\varepsilon| > 0$ 充分小时(5.21)在 L^* 附近无周期解,若$|a| < \frac{1}{2}$,则当$|\varepsilon| > 0$ 充分

小时(5.21)在 L^* 附近恰有 4 个周期解,且均为 2 阶次调和解. 注意到 L^* 的参数方程为 $q(t)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, 若记这四个周期解为 $q_i(t,\ \varepsilon)$, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$,则

$$q_i(t,\ \varepsilon)=q(t+t_i^*)+O(\varepsilon),\ 0\leqslant t_1^*<t_2^*<t_3^*<t_4^*<4\pi.$$

易见(参考图 5.1) $t_3^*=t_1^*+2\pi$, $t_4^*=t_2^*+2\pi$. 再注意到(5.21)在变换 $(x,\ y)\to(-x,\ -y)$ 下不变,可知解 $q_1(t,\ \varepsilon)$ 与 $q_3(t,\ \varepsilon)$ 关于 z 轴对称, $q_2(t,\ \varepsilon)$ 与 $q_4(t,\ \varepsilon)$ 关于 z 轴对称.

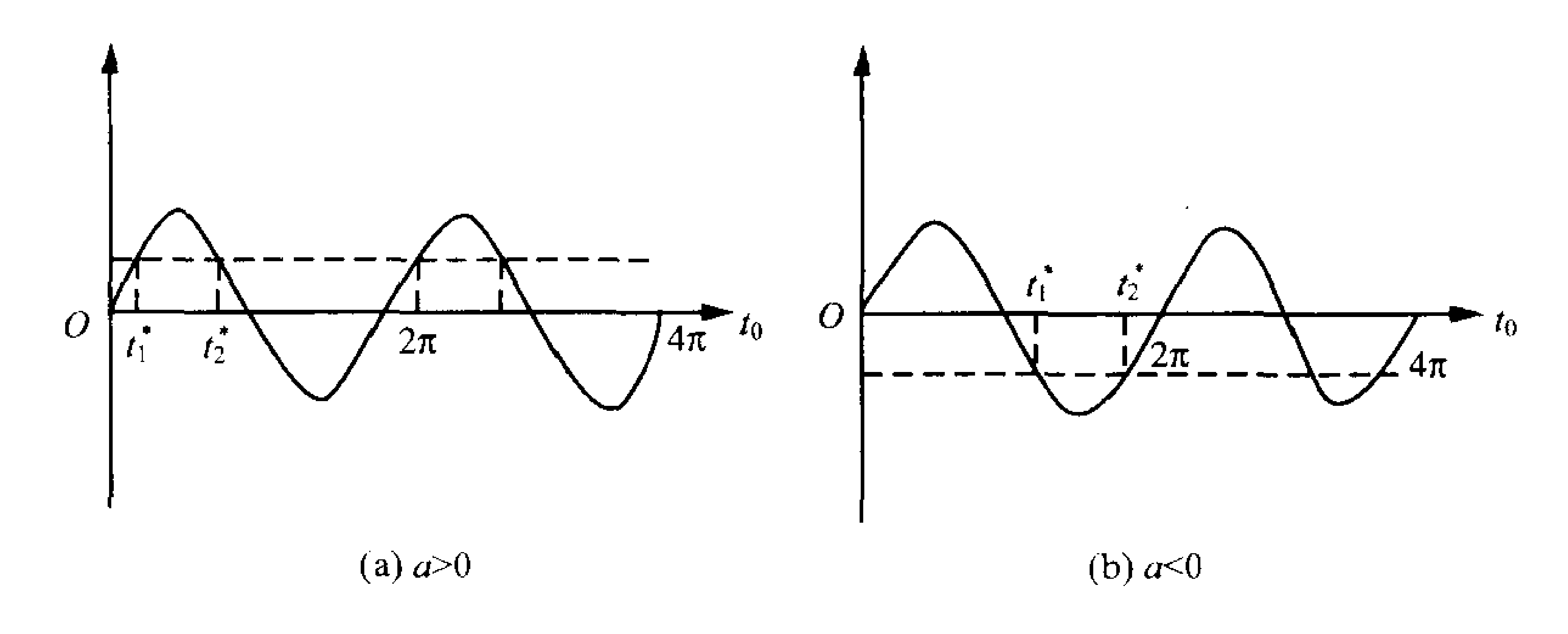


图 5.1

如果闭轨族 L_h 的周期为常数,即 $T(h)=T_0$,则有 $D\Omega(h)=0$,从而 $I(t_0)=0$,因此定理 5.1 不适用于这种特殊情形. 为给出(5.2)存在 m 阶次调和解的条件,首先利用(5.11)第一式可求得

$$\theta_1^*(\theta_0,\ r)=\int_0^{mT}\alpha(\theta_0+\Omega_0t,\ r)g(t,\ G(\theta_0+\Omega_0t,\ r),\ 0)\mathrm{d}t$$

$$=N\left(\frac{\theta_0}{\Omega_0},\ r\right),\Omega_0=\frac{2\pi}{T_0},$$

其中

$$N(t_0, h) = \int_0^{mT} \alpha(\Omega_0(t + t_0), h) g(t, q(t + t_0, h), 0) \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{mT} \alpha(\Omega_0 t, h) g(t - t_0, q(t, h), 0) \mathrm{d}t. \quad (5.22)$$

于是,利用(5.13)与(5.14),与定理 5.1 类似可证

定理 5.2 设基本假设(A)与(B)成立.又设对一切 $h \in V$,有

$$T(h) = T_0, \frac{T_0}{T} = \frac{m}{k}, \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

(i) 如果对 $h_0 \in V$,有$(M(t_0, h_0), N(t_0, h_0)) \neq (0, 0)$, $t_0 \in [0, T]$,则对充分小的$|\varepsilon|>0$,(5.2)在 L_{h_0} 的邻域内没有任何调和解与次调和解.

(ii) 如果存在 $h_0 \in V$, $t_0^* \in [0, T_0)$,使

$$M(t_0^*, h_0) = 0, N(t_0^*, h_0) = 0, \det \left.\frac{(M, N)}{\partial(t_0, h)}\right|_{(t_0^*, h_0)} \neq 0,$$

则对充分小的$|\varepsilon|>0$,当 $m>1(=1)$时(5.2)有 m 阶调和解(次调和解)$x(t, \varepsilon) = q(t + t_0^*, h_0) + O(\varepsilon)$.

例 5.2 考虑二阶方程

$$\ddot{y} + y = \cos 2t + \varepsilon(y^3 - b\dot{y}\cos 2t), \quad (5.23)$$

该方程是方程(3.31)当 $a=0$ 时的特例.由例 3.5 知,对$|\varepsilon|>0$充分小,当$|b|>\frac{1}{3}\left(<\frac{1}{3}\right)$时(5.23)有 2 个(没有)2 阶次调和解.下面我们利用定理 5.2 来获得这一结论.

首先,当 $\varepsilon=0$ 时(5.23)有调和解 $y_0(t) = -\frac{1}{3}\cos 2t$.令 $x_1 = y - y_0(t)$, $x_2 = \dot{y} - y'_0(t)$,易见(5.23)成为

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon\left[\left(x_1 - \frac{1}{3}\cos 2t\right)^3\right.$$

$$- b\left(x_2 + \frac{2}{3}\sin 2t\right)\cos 2t\Big], \tag{5.24}$$

当 $\varepsilon=0$ 时(5.24)有首次积分 $H(x_1, x_2)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$,相应的闭轨族为

$$L_h: q(t, h) = (\sqrt{2h}\sin t, \sqrt{2h}\cos t)^T, \ h > 0,$$

又由引理 5.1 知

$$\alpha(\theta, h) = \frac{1}{\sqrt{2h}}(\cos\theta, -\sin\theta),$$

对系统(5.24)套用公式(5.15)与(5.22),其中 $m=2$,则经简单计算可得

$$M(t_0, h) = - bh\pi\cos 2t_0, \ N(t_0, h) = \frac{\pi}{2}\left(3h + \frac{1}{3} - b\sin 2t_0\right).$$

若 $b=0$,则对一切 $h>0$ 有 $N(t_0, h)>0$.若 $b\neq 0$,则 $M(t_0, h)$ 关于 t_0 在$[0, 2\pi)$上恰有 4 个根 $t_{0i}=\frac{1}{4}(1+2i)\pi$, $i=0, 1, 2, 3$,在这些根处有 $\sin 2t_0=\pm 1$.易知不论 b 为正还是为负,当$|b|>\frac{1}{3}$时总有两个根 t_{0i},使方程 $N(t_{0i}, h)=0$ 关于 $h>0$ 有解,当$|b|<\frac{1}{3}$时则有 $N(t_{0i}, h)\neq 0$, $i=0, 1, 2, 3$.于是由定理 5.2 及注 5.1 即得所述结论.

注 5.3 如果(5.2)中的函数 g 含有另一个参数δ,则函数 M 与N 依赖于δ,即 $M=M(t_0, h, \delta)$, $N=N(t_0, h, \delta)$,利用这些函数,与定理 4.4(ii)类似可讨论调和解与次调和解的鞍结点型分支.详之,设(5.9)成立,如果向量函数

$$(\Omega(h)-\Omega(h_0), M(t_0, h, \delta)) \ (\text{当 } D\Omega(h_0)\neq 0 \text{ 时}),$$

或

$$(M(t_0, h, \delta), N(t_0, h, \delta))\ (当\ \Omega(h) = \Omega_0\ 时)$$

在某点(t_0^*, h_0, δ_0)关于$(t_0, h) \in [0, T(h_0)) \times V$有根的二重分支,则(5.2)在$q(t+t_0^*, h_0)$附近有$m$阶次调和解的鞍结点分支曲线$\delta = \delta(\varepsilon) = \delta_0 + O(\varepsilon)$.

例如,对方程(5.21),视a为参数,则在$|a| = \frac{1}{2}$处函数$M^{2/1}(t_0)$关于$t_0 \in [0, 4\pi)$有二重分支点t_{12}与t_{34},且当$a = \frac{1}{2}$时有$t_{12} = \frac{\pi}{2}, t_{34} = \frac{5\pi}{2}$,当$a = -\frac{1}{2}$时$t_{12} = \frac{3\pi}{2}$, $t_{34} = \frac{7\pi}{2}$(参考图5.1),于是由注5.3,(5.21)的2阶次调和解有二重鞍结点分支值$a_{ij}(\varepsilon) = \frac{1}{2}(-1)^i + O(\varepsilon), i, j = 1, 2$,使对$\left|a - \frac{1}{2}(-1)^i\right|$充分小,当$a < a_{i1}(= a_{i1}, > a_{i1})$时(5.21)有双曲二阶调和解$q_1(t, \varepsilon)$与$q_2(t, \varepsilon)$(非双曲的二阶次调和解$q_{12}(t, \varepsilon)$,无次调和解),当$a < a_{i2}(= a_{i2}, > a_{i2})$时(5.2)有双曲的二阶次调和解$q_3(t, \varepsilon)$与$q_4(t, \varepsilon)$(非双曲次调和解$q_{34}(t, \varepsilon)$,无次调和解).考虑到(5.21)的对称性知$q_{12}(t, \varepsilon)$与$q_{34}(t, \varepsilon)$必关于$z$轴对称,从而此两解必同时出现,于是必有$a_{i1}(\varepsilon) = a_{i2}(\varepsilon) \equiv a_i(\varepsilon)$.结合例5.1的结论,我们获得下列结果:对充分小的$|\varepsilon| > 0$,方程(5.21)有周期解当且仅当$a_1(\varepsilon) \leqslant a \leqslant a_2(\varepsilon)$,且当$a_1(\varepsilon) < a < a_2(\varepsilon)$时(5.21)恰有4个二阶次调和解,当$a = a_1(\varepsilon)$或$a = a_2(\varepsilon)$时(5.21)恰有2个(非双曲的)二阶次调和解.

回到平面系统并设(5.19)成立.此时开集V为一开区间,设其有端点h^*,又设(5.1)有同宿轨L^*,且同宿于一双曲鞍点S_0,使得当$h \in V$且$h \to h^*$时$L_h \to L^*$,则必存在$h_m \in V$且$h_m \to h^*$(当$m \to \infty$时)使对充分大的m有

$$T(h_m) = mT,$$

相应的m阶次调和Melnikov函数$M^{m/1}(t_0)$可写为

$$M^{m/1}(t_0) = \int_{-mT/2}^{mT/2} f(q(t, h_m)) \wedge g(t - t_0, q(t, h_m), 0)\mathrm{d}t,$$

利用此形式，Guckenheimer 和 Holmes ([29])证明了下述公式

$$\lim_{m\to\infty} M^{m/1}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q(t, h^*)) \wedge g(t - t_0, q(t, h^*), 0)\mathrm{d}t \equiv M(t_0), \tag{5.25}$$

由(5.25)给出的 $M(t_0)$称为同宿 Melnikov 函数. 易见，该函数为 T 周期的.

由于鞍点 S_0 是双曲的，由推论 3.2 知(5.2)有双曲周期解 $x_\varepsilon(t)=S_0+O(\varepsilon)$，该周期解在相空间 $S^1\times R^2$ 中对应于一条双曲闭轨，且此闭轨的稳定与不稳定流形(记为 W_ε^s 与 W_ε^u)均为二维的. 如设 $\widetilde{P}(x, \varepsilon)$为(5.2)的 Poincaré 映射，$\widetilde{W}_\varepsilon^s$，$\widetilde{W}_\varepsilon^u$ 为 W_ε^s，W_ε^u 与平面 $t=0$ 的交线，则易见 $\widetilde{W}_\varepsilon^s$ 与 $\widetilde{W}_\varepsilon^u$ 分别为 $\widetilde{P}$的不动点 $x_\varepsilon(0)$的稳定与不稳定流形，即

$$\widetilde{W}_\varepsilon^s = \{x \in R^2 \mid \lim_{n\to\infty} \widetilde{P}^n(x, \varepsilon) = x_\varepsilon(0)\},$$

$$\widetilde{W}_\varepsilon^u = \{x \in R^2 \mid \lim_{n\to-\infty} \widetilde{P}^n(x, \varepsilon) = x_\varepsilon(0)\}.$$

函数 $M(t_0)$的重要性在于它可用来判别流形 $\widetilde{W}_\varepsilon^s$ 与 $\widetilde{W}_\varepsilon^u$ 何时有横截交点，即成立下述定理.

定理 5.3 设当 $h\in V$ 且$|h-h^*|$充分小时 $T'(h)\neq 0$. 如果函数 $M(t_0)$有单重根(无根)，则当$|\varepsilon|>0$ 充分小时，流形 $\widetilde{W}_\varepsilon^s$ 与 $\widetilde{W}_\varepsilon^u$ 必有无穷多个横截交点(无交点).

该定理是 Melnikov 于 1963 年建立的，其证明可见[29]与[159]等. 集合 $\widetilde{W}_\varepsilon^s$ 与 $\widetilde{W}_\varepsilon^u$ 横截相交必伴随着某种混沌现象(Smale 马蹄)，此时(5.2)的解的性质在 L^* 的邻域内十分复杂，特别地可

证必存在自然数 $k\geqslant 1$ 及充分大的正整数 m_0,使对一切 $m\geqslant m_0$,平面周期系统(5.2)存在 mk 阶的次调和解.事实上,在定理 5.3 的条件下,我们可以获得更多个(同阶的以及不同阶的)次调和解.以下设(5.2)至少为 C^2 系统.

定理 5.4 设当 $h\in V$ 且 $|h-h^*|$ 充分小时 $T'(h)\neq 0$.如果函数 $M(t_0)$在区间$[0, T)$上有 l 个单重根,则存在 $m_0>0$, $\varepsilon_0>0$,使对一切 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 及自然数 $m\geqslant m_0$,平面周期系统(5.2)存在 ml 个 m 阶次调和解.

证明 首先,存在 $m_0>0$ 及 $h_m\in V$ 且 $h_m\to h^*$ 使得当 $m\geqslant m_0$ 时 $T(h_m)=mT$.现设 $M(t_0)$有单重根 $t_0^*\in[0, T)$,即 $M(t_0^*)=0$, $M'(t_0^*)\neq 0$.则由(5.25)易知对任意的 $\eta>0$,必存在 $m_1>0$ 使当 $m\geqslant m_1$ 时 m 阶次调和 Melnikov 函数 $M^{m/1}(t_0)$在区间$[t_0^*-\eta, t_0^*+\eta]$上有根 t_m,由 η 的任意性知当 $m\to\infty$ 时 $t_m\to t_0^*$.将 $M^{m/1}(t_0)$展开成三角级数并利用展式的系数与 $M^{m/1}(t_0)$的关系以及(5.25)又可证$(M^{m/1})'(t_0)\to M'(t_0)$,从而由微分中值定理进一步可证$(M^{m/1})'(t_m)\to M'(t_0^*)$(当 $m\to\infty$时),故只要 m_0 适当大,当 $m\geqslant m_0$ 时必有$(M^{m/1})'(t_m)\neq 0$,于是由注 5.2 知存在与 m 无关的常数$\varepsilon_1(t_0^*)>0$ 使对一切 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_1$ 及 $m\geqslant m_0$ 方程(5.2)有 m 阶次调和解.由此及注 5.1 即知结论成立.证毕.

进一步,如果(5.2)中函数 g 含有另一参数 $\delta\in R$,则同宿 Melnikov 函数成为 $M(t, \delta)$,此时可证下述定理.

定理 5.5 设当 $h\in V$ 且 $|h-h^*|$ 充分小时 $T'(h)\neq 0$.如果存在(t_0^*, δ_0)使

$$
\begin{aligned}
&M(t_0^*, \delta_0)=\frac{\partial M}{\partial t_0}(t_0^*, \delta_0)=0,\\
&\frac{\partial M}{\partial \delta}(t_0^*, \delta_0)\frac{\partial^2 M}{\partial t_0^2}(t_0^*, \delta_0)\neq 0,
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

则

(i) 存在函数 $\delta^*(\varepsilon)=\delta_0+O(\varepsilon)$，使当 $\delta=\delta^*(\varepsilon)$且$|\varepsilon|>0$充分小时流形 $\tilde{W}_\varepsilon^s$ 与 $\tilde{W}_\varepsilon^u$ 有无穷多个二次相切点；

(ii) 存在 $\varepsilon_0>0$，$m_0>0$ 及函数 $\delta_m^*(\varepsilon)=\delta_m+O(\varepsilon)$，$m\geqslant m_0$，且 $\lim\limits_{m\to\infty}\delta_m=\delta_0$，使对一切 $m\geqslant m_0$，当 $\delta=\delta_m^*(\varepsilon)$且$0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 时平面周期系统(5.2)存在至少 m 个 m 阶的二重鞍结点型次调和解.

上述定理中结论(i)的证明与定理 5.3 类似. 为证结论(ii)，首先利用条件(5.26)及(5.25)可证存在 $m_0>0$ 及 $t_m(\delta)$使对 $m\geqslant m_0$，

$$(M^{m/1})'_{t_0}(t_m(\delta),\ \delta)=0,\ (M^{m/1})''_{t_0}(t_m(\delta),\ \delta)\neq 0,$$

且 $t_m(\delta_0)\to t_0^*$（当 $m\to\infty$时），进一步利用 $M_\delta(t_0^*,\ \delta)\neq 0$ 可证存在 δ_m，使 $M^{m/1}(t_m(\delta_m),\ \delta_m)=0$，且 $\delta_m\to\delta_0$（当 $m\to\infty$时），于是由注 5.3 知方程(5.2)存在 m 阶次调和解的二重鞍结点分支值 $\delta_m^*(\varepsilon)=\delta_m+O(\varepsilon)$，而且与注 5.2 类似，存在 $\varepsilon_0>0$，使这些分支值对一切 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$(一致)有效. 因此由注 5.1 知结论(ii)成立. 此外，上述讨论似应支持

$$\lim_{m\to\infty}\delta_m^*(\varepsilon)=\delta^*(\varepsilon),\ |\varepsilon|<\varepsilon_0,$$

这一极限式的含义是说在条件(5.26)下，方程(5.2)所出现的 $\tilde{W}_\varepsilon^s$ 与 $\tilde{W}_\varepsilon^u$“二次同宿相切”正是 m 阶二重结点型次调和解的当 $m\to\infty$ 的极限情况.

推论 5.1 与定理 5.3 及定理 5.5(i)是 Melnikov 理论的最基本的结果，在许多书中都有介绍，而定理 5.4 与定理 5.5(ii)可视为对推论 5.1 与定理 5.3 等基本结果的补充. 然而定理 5.4 的方法曾在[13]中对一类二阶方程使用过. 定理 5.1 与定理 5.3 是 Han, Jiang 与 David ([57])获得的. 有关 Melnikov 理论的更多推

广工作可参考[95]与[160]等.

例 5.3 考虑振动方程

$$\ddot{x}+\varepsilon\delta\dot{x}+x-x^2=\varepsilon\gamma\cos\omega t,\ \omega>0,\ \gamma>0,$$

该方程等价于

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-x+x^2+\varepsilon(\gamma\cos\omega t-\delta y),\qquad(5.27)$$

当 $\varepsilon=0$ 时(5.27)有通过双曲鞍点(1,0)且包围原点的同宿轨线，沿该轨线有

$$3y^2+3x^2-2x^3=1,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2x^3-3x^2+1},$$

为求出同宿轨的参数方程,令 $x=1-u^2$, $u\geqslant0$,则有

$$\frac{2\sqrt{3}\mathrm{d}u}{u\sqrt{3-2u^2}}\pm\mathrm{d}t=0,$$

易求出上方程满足 $u(t_0)=\sqrt{\frac{3}{2}}$(即 $x(t_0)=-\frac{1}{2}$, $y(t_0)=0$)的解为

$$\ln\left[\frac{1}{u}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}-u^2}\right)\right]=\pm\frac{1}{2}(t-t_0)\geqslant0,$$

其中对 $t>t_0$,取“+”号,对 $t<t_0$,取“-”号,于是

$$u=\sqrt{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(e^{\frac{t-t_0}{2}}+e^{-\frac{t-t_0}{2}}\right)\right]^{-1}\equiv\sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{sech}\left(\frac{t-t_0}{2}\right),$$

因此可得同宿轨的参数方程为

$$x=1-\frac{3}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{t-t_0}{2}\right),\ y=\frac{3}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{t-t_0}{2}\right)\tanh\left(\frac{t-t_0}{2}\right),$$

于是由式(5.25)知(5.27)的同宿 Melnikov 函数为

$$M(t_0,\delta)=\int_{-\infty}^{\infty}[-\delta y^2+\gamma y\cos\omega(t-t_0)]\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{9}{2}I\delta + 3\gamma J\sin\omega t_0,$$

其中

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sech}^4 t\tanh^2 t\,\mathrm{d}t,\quad j = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sech}^2 t\tanh t\sin(2\omega t)\,\mathrm{d}t,$$

直接积分不难求得 $I=\frac{4}{15}$,而利用留数理论可求出 J 的值.事实上,令

$$f(x) = (e^x - e^{-x})e^{2\omega ix}/(e^x + e^{-x})^3,$$

则

$$J = 4\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x\right) \equiv 4\mathrm{Im}J^*.$$

在复平面上取以 $\pm p$, $\pm p + i\pi$ 为顶点的矩形 C,其中 $p>0$,注意到当 $y\in[0,\pi]$,$p\to\infty$ 时,$f(p+iy)\to 0$, 可知

$$\lim_{p\to\infty}\oint_C f(z)\mathrm{d}z = (1 - e^{-2\omega\pi})J^*.$$

又将 f 在 $z=\frac{i\pi}{2}$处展开易得

$$f(z) = -\frac{e^{-\pi\omega}}{iz\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^3}\left[2i - 4\omega\left(z-\frac{i\pi}{2}\right) - 4\omega^2 i\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^2 + \cdots\right],$$

由此知 f 在 $z=\frac{i\pi}{2}$处的留数为 $R\left(f,\frac{i\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\omega^2 e^{-\pi\omega}$,于是由留数基本定理知

$$(1 - e^{-2\omega\pi})J^* = \frac{1}{2}\omega^2 e^{-\omega\pi},$$

从而可得

$$J = \frac{4\pi\omega^2}{e^{\pi\omega} - e^{-\pi\omega}} \equiv 2\pi\omega^2 \operatorname{csch}(\pi\omega),$$

于是有

$$M(t_0, \delta) = -\frac{6}{5}[\delta - \gamma\pi\omega^2 \operatorname{csch}(\pi\omega)\sin\omega t_0].$$

令 $\delta_i = (-1)^i \gamma\pi\omega^2 \operatorname{csch}(\pi\omega), i = 1, 2$，则由定理 5.3 与定理 5.5(i)知存在函数 $\delta_i^*(\varepsilon) = \delta_i + O(\varepsilon)$，使对充分小的 $\varepsilon > 0$，当 $\delta_1^*(\varepsilon) < \delta < \delta_2^*(\varepsilon)$时(5.27)出现 Smale 马蹄，当 $\delta = \delta_1^*(\varepsilon)$或 $\delta_2^*(\varepsilon)$时(5.27)出现二次同宿相切，当 $\delta < \delta_1^*(\varepsilon)$或 $\delta > \delta_2^*(\varepsilon)$时(5.27)在鞍点(1,0)附近的双曲周期解的稳定和不稳定流形不相交. 进一步利用定理 5.5(ii)及以上分析知存在$\delta_{im}(\varepsilon)$，$i = 1, 2$ 且 $\lim\limits_{m \to \infty} \delta_{im}(\varepsilon) = \delta_i^*(\varepsilon)$，使当 δ 在$\delta_{1m}(\varepsilon)$附近变化且 $\delta < \delta_{1m}(\varepsilon)(> \delta_{1m}(\varepsilon))$时(5.27)没有 m 阶次调和解(有 $2m$ 个 m 阶次调和解)，而当 δ 在$\delta_{2m}(\varepsilon)$附近变化且 $\delta > \delta_{2m}(\varepsilon)(< \delta_{2m}(\varepsilon))$时(5.27)没有 m 阶次调和解(有 $2m$ 个 m 阶次调和解)，于是结合(5.27)出现 Smale 马蹄的条件及定理 5.4 可得成立

$$\delta_{1m}(\varepsilon) < \delta_1^*(\varepsilon) < \delta_2^*(\varepsilon) < \delta_{2m}(\varepsilon), \ m \geqslant m_0,$$

其中 m_0 充分大，由此可推知 $\delta_{1m}(\varepsilon)$关于 m 为递增的，而 $\delta_{2m}(\varepsilon)$关于 m 为递减的. 由此我们了解了方程(5.27)的混沌状态(Smale 马蹄)的形成过程，即：阶数越来越高的次调和解不断出现并持续存在、累积的结果导致了混沌的产生. 这是混沌产生的途径之一.

5.3 周期轨道的 Poincaré 分支

现设函数 g 与 t 无关，则(5.2)成为自治系统

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon), \tag{5.28}$$

此时由(5.7)可得 2π 周期方程

$$\frac{dh}{d\theta} = \frac{\varepsilon DH(G(\theta, h))g(G(\theta, h), \varepsilon)}{\Omega(h) + \varepsilon\alpha(\theta, h)g(G(\theta, h), \varepsilon)},$$

$$= \varepsilon DH(G(\theta, h))g(G(\theta, h), 0)\Omega^{-1}(h) + O(\varepsilon^2). \tag{5.29}$$

易见(5.28)的闭轨与(5.29)的 2π 周期解一一对应. 方程(5.29)的平均方程是

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\varepsilon}{2\pi}M(h), \tag{5.30}$$

其中

$$\begin{aligned} M(h) &= \frac{1}{\Omega(h)}\int_0^{2\pi} DH(G(\theta, h))g(G(\theta, h), 0)\mathrm{d}\theta, \\ &= \int_0^{T(h)} DH(q(t, h))g(q(t, h), 0)\mathrm{d}t \\ &= \oint_{L_h} DH(x)g(x, 0)\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{5.31}$$

于是由平均定理知成立

定理 5.6 设基本假设(A)与(B)成立. 对 $h_0 \in V$ 闭轨 L_{h_0} 产生(5.28)的周期轨道的必要条件是 $M(h_0) = 0$. 若该条件满足且 $\det DM(h_0) \neq 0$,则当 $\varepsilon \neq 0$ 充分小时 L_{h_0} 在其邻域内产生(5.28)的惟一闭轨 $L_\varepsilon^* = \{x(t, \varepsilon) = q(t, h_0) + O(\varepsilon)\}$,且若 $h = h_0$ 为(5.30)的双曲奇点,则 L_ε^* 为双曲闭轨,并且两者有相同的稳定性.

由(5.31)给出的函数常称为自治系统(5.28)的 Melnikov 函数. 当(5.28)为平面系统时 $M(h)$为标量函数,此时我们可以通过分析其零点个数来获得(5.28)的极限环的个数,这方面的理论与方法以后还要深入讨论. 如果(5.1)为平面 Hamilton 系统,我们可以给出函数 $M(h)$的导数与(5.28)的发散量之间的关系,即有下述定理(见[37]).

定理 5.7([37]) 设(5.19)成立且(5.1)的闭轨族 L_h 由 $H(x) = h$ 给出,$h \in V$. 又设 L_h 为顺时针定向的,则

$$M'(h) = \pm \oint_{L_h} \mathrm{tr} g_x(x, 0) \mathrm{d}t, \tag{5.32}$$

其中当 L_h 随 h 的增加而扩大(缩小)时取"+"("-")号.

证明 为确定计,设 L_h 随 h 的增加而扩大. 固定 $h_0 \in V$,对 $h > h_0$,利用(5.19),将(5.31)写成线积分并应用 Green 公式知

$$M(h) - M(h_0) = \iint_{D(h)} \mathrm{tr} g_x(x, 0) \mathrm{d}x, \tag{5.33}$$

其中 $D(h)$表示由 L_h 与 L_{h_0} 所围成的环域. 做积分变量变换

$$x = q(t, r), \ 0 \leqslant t \leqslant T(r), \ h_0 \leqslant r \leqslant h,$$

注意到 $H(q(t, r)) \equiv r$,从而 $DH(q) q_r = \det \dfrac{\partial q(t, r)}{\partial(t, r)} = 1$,故由(5.33)可得

$$M(h) - M(h_0) = \int_{h_0}^{h} \mathrm{d}r \int_0^{T(r)} \mathrm{tr} g_x(q(t, r), 0) \mathrm{d}t,$$

上式两边对 h 求导即得

$$M'(h) = \int_0^{T(h)} \mathrm{tr} g_x(q(t, h), 0) \mathrm{d}t.$$

证毕.

如果 L_h 为逆时针定向的,则只须把(5.32)中的"$\pm$"改为"$\mp$",其余不变.

注 5.4 如在注 5.3 中所提到的,如果函数 g 含有另一参数且平均方程(5.30)有鞍结点分支值,则方程(5.28)存在极限环的鞍结点型分支. 又若(5.28)为平面系统,则对(5.29)利用 Poincaré 映射及 Rolle 定理易证若 h_0 为 $M(h)$的 k 重根,则 L_{h_0} 至多产生 k 个极限环.

例 5.4 考虑空间二次系统

$$\dot{x}_1 = x_2 - \varepsilon x_1 x_3, \ \dot{x}_2 = - x_1 - \varepsilon x_2 x_3,$$

$$\dot{x}_3 = \varepsilon(2x_1^2 - 1 + x_3). \tag{5.34}$$

当 $\varepsilon=0$ 时(5.34)有首次积分 $H_1=x_1^2+x_2^2$ 与 $H_2=x_3$,且有闭轨族

$$L_h: x = (\sqrt{h_1}\sin t, \sqrt{h_1}\cos t, h_2)$$
$$\equiv q(t, h), \ h_1 > 0, \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

由于

$$DH(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

由(5.31)易得 $M(h)=2\pi(-2h_1h_2, h_1+h_2-1)^T$, 在 $h_1>0$ 上 M 有根 $h=(1, 0)$且

$$M_h(1, 0) = 2\pi \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

其特征值为$\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-7})$,于是由定理 5.6 知当 $\varepsilon>0$ 充分小时(5.34)有惟一极限环且为负向渐近稳定的.

我们可进一步利用定理 4.1 给出(5.34)存在闭轨的参数范围.事实上对(5.34)有

$$\alpha(\theta, h) = \left(\frac{1}{\sqrt{h_1}}\cos\theta, -\frac{1}{\sqrt{h_1}}\sin\theta, 0\right), \ \alpha(\theta, h)g(q) = 0,$$

因此(5.29)成为

$$\frac{dh}{d\theta} = \varepsilon(-2h_1h_2, 2h_1\sin^2\theta - 1 + h_2)^T = \varepsilon f(\theta, h).$$

由于 f 关于 θ 的平均为 $f=(-2h_1h_2, h_1+h_2-1)^T$,由(4.5)可知

$$W(\theta,h)=\begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{2}h_1\sin\theta\end{pmatrix},\ (I+\varepsilon W_h)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{\varepsilon}{2}\sin 2\theta & 1\end{pmatrix},$$

于是由(4.4)与(4.5)知

$$F(\theta,h,\varepsilon)=\left(\varepsilon h_1^2\sin 2\theta,\ \left(-h_2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon h_1\sin 2\theta\right)\varepsilon h_1\sin\theta\right)^T.$$

令 $h_0=(1,0)$，则易知当 $|\varepsilon|\leqslant 1$ 时 $|F(\theta,h_0,\varepsilon)|\leqslant|\varepsilon|\equiv N(\varepsilon)$，且

$$D\bar{f}(h)=\begin{pmatrix}-2h_2 & -2h_1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ [D\bar{f}(h_0)]^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}.$$

$$F_h=\begin{pmatrix}2\varepsilon h_1\sin 2\theta & 0\\ \left(-h_2-\frac{1}{2}+\varepsilon h_1\sin 2\theta\right)\varepsilon\sin\theta & -\varepsilon h_1\sin\theta\end{pmatrix}.$$

令 $b=\max\{|h_1-1|,\ |h_2|\}$，则

$$|D\bar{f}(h)-D\bar{f}(h_0)|\leqslant 2(|h_1-1|+|h_2|)\leqslant 4b\equiv L_2(b),$$

$$|F_h|\leqslant|\varepsilon|\left(3b+\frac{5}{2}+|\varepsilon|(1+b)\right)\equiv L_1(\varepsilon,b).$$

又由第一章(1.19)知定理 4.1 中的 $M(\varepsilon)$满足

$$M(\varepsilon)\leqslant\frac{1+6\pi|\varepsilon|}{1-6\pi|\varepsilon|}\leqslant\frac{9}{5}\ \left(\text{当}|\varepsilon|\leqslant\frac{1}{21\pi}\text{时}\right),$$

取 $b=4\varepsilon$，易知当 $0<|\varepsilon|<\frac{1}{21\pi}$时必成立

$$9[\varepsilon+b(4b+5|\varepsilon|/2+3b|\varepsilon|+(1+b)\varepsilon^2]\leqslant 5b,$$

于是由定理 4.1 知当 $0<|\varepsilon|<\frac{1}{21\pi}$时(5.34)必有极限环.

例 5.5 对下述三维系统

$$\dot{x}_1 = x_2 - \varepsilon x_1(x_3^2 - \delta),$$

$$\dot{x}_2 = - x_1 - \varepsilon x_2(x_3^2 - \delta),\ \dot{x}_3 = \varepsilon(2x_1^2 - 1 - x_3), \quad (5.35)$$

由(5.31)易得

$$M(h, \delta) = 2\pi(-2h_1(h_2^2 - \delta), h_1 - 1 - h_2)^T.$$

当 $\delta=0$ 时 M 有二重根 $h=(1, 0)$,因此由注 5.4 知(5.35)有空间闭轨的鞍结点型分支曲线 $\delta=\delta(\varepsilon)=O(\varepsilon)$,使对充分小的 $\varepsilon>0$,当 $\delta>\delta(\varepsilon)$ 时(5.35)有两个双曲闭轨 $L_i(\varepsilon, \delta)$, $i=1, 2$, 且当 $\varepsilon\to0$ 时 L_i 趋于闭曲线 $x_1^2+x_2^2=1+(-1)^i\sqrt{\delta}$, $x_3=(-1)^i\sqrt{\delta}$, $i=1, 2$, 当 $\delta=\delta(\varepsilon)$ 时 L_1 与 L_2 合并成为非双曲闭轨 $L(\varepsilon)$,该闭轨有 2 维的中心流形,在该流形上 $L(\varepsilon)$ 为半稳定极限环,当 $\delta<\delta(\varepsilon)$ 时 $L(\varepsilon)$ 已消失.

习　题

1. 考虑方程(1.10), 说明其闭轨 $L:(x, y, z)=(\cos t, \sin t, 0)$的稳定性不能仅由积分 $\oint_L \mathrm{tr} f_x \mathrm{d}t$ 的符号确定.

2. 求非线性方程

$$\dot{x} = -y + xz^2,\ \dot{y} = x + yz^2,\ \dot{z} = -z(x^2 + y^2)$$

的闭轨 $L:(x, y, z)=(\cos t, \sin t, 0)$的特征指数与特征乘数,并确定其稳定、不稳定与中心流形的维数.

3. 考虑非线性系统

$$\dot{x} = -2y + ax(4 - 4x^2 - y^2 + z),$$

$$\dot{y} = 8x + ay(4 - 4x^2 - y^2 + z),$$

$$\dot{z} = z(x - a^2),$$

其中 a 为参数,试求其在闭轨 $L: u(t)=(\cos 4t, 2\sin 4t, 0)^T$ 的线性化方程 $\dot{x}=A(t)x$,并证明该线性方程有矩阵解

$$X(t)=\begin{pmatrix} e^{-8at}\cos 4t & -\frac{1}{2}\sin 4t & \alpha(t)e^{-4a^2t}+\frac{1}{4}\sin 4t \\ e^{-8at}\sin 4t & \cos 4t & \beta(t)e^{-a^2t}+\frac{1}{4}\sin 4t \\ 0 & 0 & e^{-a^2t}+\frac{1}{4}\sin 4t \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha(t)$与 $\beta(t)$为某一具周期$\frac{\pi}{2}$的周期线性方程的周期解且 $\alpha(0)=\beta(0)=0$. 令 $C=X(T)=X\left(\frac{\pi}{2}\right)$,由此确定 L 的特征指数为 $-8a$ 与 $-a^2$(参考(1.2)与定理 1.5 的证明).

4. 证明引理 2.1 中的式子

$$A(\theta)=\mathrm{tr}f_x(u)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln|f(u)|.$$

5. 证明平面多项式系统

$$\dot{x}=-y+x(x^2+y^2-1)^k,\ \dot{y}=x+y(x^2+y^2-1)^k,\ k\geqslant 1$$

的极限环 $x^2+y^2=1$ 的重数为 k.

6. 试对方程(2.21)推导出有关 E 与K 的计算公式.

7. 考虑周期标量方程

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=S(r,\theta),\ S\in C^3,$$

其中 S 关于θ 为T 周期的,试证如果 $S_r>0$,则该方程至多有一个 T 周期解,若有必是双曲的. 若 $S_{rr}>0$(或 $S_{rrr}>0$),则该方程至多有两个(或三个)T 周期解(N. Lloyd). 提示:设 $P(r_0)$为其 Poincaré 映射,$r(\theta,r_0)$为以 r_0 为初值的解,则

$$P'(r_0)=1+\int_0^T S_r(r,\theta)e^{\int_0^\theta S_r\mathrm{d}\varphi}\Big|_{r=r(\theta,r_0)}\mathrm{d}\theta.$$

8. 考虑周期系统

$$\dot{x}=Bx+\varepsilon f(t,x,\varepsilon),\ B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ x\in R^2,$$

其中 f 为t 的 T 周期函数. 设 $T/(2\pi)=q/p$ 为有理数,令

$$f_0(y) = \frac{1}{2\pi q}\int_0^{2\pi q} e^{-Bt} f(t, e^{Bt}y, 0)\mathrm{d}t,$$

试利用平均法证明，如果存在 $y_0 \in R^2$ 使 $f_0(y_0)=0$，$\det f_{0y}(y_0) \neq 0$，则所述方程在 $x_0(t) = e^{Bt}y_0$ 的小邻域内有惟一 pT 周期解.

9. 证明周期标量方程

$$\dot{x} = \varepsilon[a(x) - \sin x + \cos t],$$

$\left(其中\ a(x) = \dfrac{x^2}{2(1+x^2)}\right)$当 $0 < |\varepsilon| \leqslant \dfrac{1}{57}$时有可列无穷多个 2π 周期解.

10. 证明当 $|\varepsilon| > 0$ 充分小时方程

$$\dot{x} = y + x(x^2 + y^2 - 1) + \varepsilon\cos t,\ \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2 - 1)$$

在单位圆周的邻域内恰有两个调和解.

11. 证明当 $|\varepsilon| > 0$ 充分小时方程

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 + z - x^2)y,\ \dot{z} = \varepsilon\left(z - \frac{1}{3}z^2 + x\right)$$

有两个极限环.

12. 证明 Liénard 方程

$$\dot{x} = y - \varepsilon\sum_{i=1}^{m} a_i x^i,\ \dot{y} = -x,\ a_m \neq 0,\ m = 2n+1,$$

当 $|\varepsilon| > 0$ 充分小时在不含原点的任意紧集中至多有 n 个极限环.

13. 设有 C^2 微分同胚 $T: u = u(x, y),\ v = v(x, y)$把平面系统

$$\dot{x} = f(x, y) + \varepsilon f_0(x, y),\ \dot{y} = g(x, y) + \varepsilon g_0(x, y)$$

化为

$$\dot{u} = P(u, v) + \varepsilon P_0(u, v),\ \dot{v} = Q(u, v) + \varepsilon Q(u, v),$$

证明

$$P_u + Q_v = \mathrm{tr}\left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right] + \frac{1}{J}(J_x f + J_y g),$$

$$PQ_0 - P_0 Q = J(fg_0 - gf_0),\ J = \det\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}.$$

由此说明沿未扰动系统的闭轨量 $\oint_L (f_x + g_y)\mathrm{d}t$ 为同胚不变的，而量

$$\oint_L e^{-\int_0^t (f_x+g_y)\mathrm{d}t}(fg_0 - gf_0)\mathrm{d}t$$

在不计正常数意义下是不变的.

14. 试研究二次系统

$$\dot{x} = y(1-x) + \varepsilon\sum_{i+j\leqslant 2} a_{ij}x^i y^j,$$

$$\dot{y} = -x(1-x) + \varepsilon\sum_{i+j\leqslant 2} b_{ij}x^i y^j$$

在 Poincaré 分支中极限环的个数(利用 Melnikov 函数).

15. 考虑方程

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1-x^2)y + \varepsilon p\cos(\omega t + a),$$

其中 $p\neq 0, \varepsilon>0$, $\omega^2-1\neq 0$, 试给出关于 p, ω 与 a 的条件,使当 ε 充分小时上述方程有周期为 $2\pi/\omega$ 的解.

16. 试研究系统

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = x - x^3 + \varepsilon(\gamma\cos\omega t - \delta y),\ \gamma>0$$

的同宿分支中 Smale 马蹄的存在条件.(提示:当 $\varepsilon=0$ 时系统有一对对称的同宿轨道($\pm\sqrt{2}\operatorname{sech}t$, $\pm\sqrt{2}\operatorname{sech}t\tanh t$).)

17. 讨论柱面方程

$$\dot{\theta} = \frac{r}{2},\ \dot{r} = r + \delta + \sin\theta$$

的奇点分支与周期轨道的存在性与惟一性.

18. 讨论柱面周期方程

$$\dot{\theta} = 1 + \frac{r}{2}\varepsilon,\ \dot{r} = \varepsilon[r + \delta + 2\sin\theta\cos t]$$

周期解的分支.

19. 证明存在 $\varepsilon_0>0$ 及连续可微函数 $\delta^*(\varepsilon) = -2\sqrt{2} + O(\varepsilon)$使对 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, 当 $\delta<\delta^*(\varepsilon)(=\delta^*(\varepsilon), >\delta^*(\varepsilon))$时方程

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -x - \varepsilon(x^4 + \delta x^2 + 1)y$$

恰有两个极限环(一个半稳定环,没有极限环).

第三章　周期解的局部分支理论

在前面一章,我们利用 Poincaré 映射研究了自治系统与周期系统的周期解的分支,所获得的周期解主要是大范围的,即其振幅不是可任意小的.本章我们主要讨论一般自治系统与周期系统的小振幅周期解,这些周期解在未扰动系统的零解或原点的小邻域内出现.我们将介绍两种研究这种小振幅周期解分支的方法,一种是由 Liapunov-Schmidt 约简程序引出的分支函数法,这种方法已广为人知,在不少著作中都有介绍,但为了系统性,此处我们仍引进这一方法.另一种是基于一个代数引理而引出的讨论周期解分支的初等方法,这是一个较新的方法且有时便于应用.我们将发现两种方法各具特色.作为应用,我们详细论证了 Hopf 分支及几类较简单的退化 Hopf 分支中周期解的个数问题.

§1　Liapunov-Schmidt 方法

本节引入在 Banach 空间中求解非线性算子方程的 Liapunov-Schmidt 方法,并用来讨论高维周期系统的周期解分支.

1.1　基本定理

设 X,Y 为 Banach 空间,$A\in L(X,Y)$,即 A 为 X 到 Y 的有界线性算子.记

$$\mathrm{Ker}A=\{x\in X\mid Ax=0\},\mathrm{Im}A=\{Ax\mid x\in X\},$$

称 $\mathrm{Ker}A$ 为 A 在 X 中的核,$\mathrm{Im}A$ 为 A 在 Y 中的像,如果 P 为 X 上的投影(算子),即 $P\in L(X,X)\equiv L(X)$,且 $P^2=P$,则令 $X_P=\mathrm{Im}P$.因为 P 为连续算子,X_P 为 X 的闭子空间,从而也是 Banach 空间.又记 I 为 X 上的恒等算子.

引理 1.1 设 $P\in L(X)$ 为投影,则

(i) $X_P=\mathrm{Ker}(I-P)$;

(ii) $X=\mathrm{Ker}P+X_P=X_{I-P}+X_P$(直和分解).

证明 由于对一切 $x\in X$,有 $(I-P)(Px)=0$,故 $X_P\subset\mathrm{Ker}(I-P)$. 另一方面,对 $x\in\mathrm{Ker}(I-P)$ 有 $x=Px\in X_P$,于是(i)得证. 由(i)有 $X_{I-P}=\mathrm{Ker}(I-(I-P))=\mathrm{Ker}P$. 任一 $x\in X$,可写为 $x=(I-P)x+Px$,因此有分解式 $X=X_{I-P}+X_P$. 为证这一分解是直和分解,设 $x\in X_{I-P}\cap X_P$,则存在 $y\in X$,与 $z\in X$,使 $x=(I-P)y=Pz$,于是 $x=Pz=P^2z=P(I-P)y=0$,故(ii)得证. 证毕.

引理 1.2 设 X,Y 为 Banach 空间,$A\in L(X,Y)$,如果存在投影 $P\in L(X)$ 与 $Q\in L(Y)$,使得 $\mathrm{Ker}A=X_P$, $\mathrm{Im}A=Y_Q$,则存在 $K\in L(Y_Q,X_{I-P})$ 使在 Y_Q 上有 $AK=I$,在 X 上有 $KA=I-P$.

证明 由引理 1.1 和 $X=X_P+X_{I-P}$. 因为 $\mathrm{Ker}A=X_P$,限制映射 $\widetilde{A}=A|_{X_{I-P}}$ 为 X_{I-P} 到 Y_Q 的一对一映射,且 $\mathrm{Im}\widetilde{A}=\mathrm{Im}A=Y_Q$,因而存在线性映射 $K:Y_Q\to X_{I-P}$,使 $\widetilde{A}K=I$, $K\widetilde{A}=I$. 因为 $\mathrm{Ker}A=X_P$ 可知对一切 $x\in X$ 有

$$Ax=A(I-P)x+APx=A(I-P)x=\widetilde{A}(I-P)x.$$

又由上面讨论,对任一 $y\in Y_Q$,存在惟一的 $x'=(I-P)x\in X_{I-P}$ 使 $\widetilde{A}x'=y$, $Ky=x'$,于是 $AKy=Ax'=\widetilde{A}x'=y$,及

$$\begin{aligned}KAx&=KA(I-P)x+KAPx=KA(I-P)x\\&=KAx'=K\widetilde{A}x'=x'=(I-P)x,\end{aligned}$$

即知在 Y_Q 上有 $AK=I$,在 X 上有 $KA=I-P$. 又由泛函分析中的闭图像定理知 K 为连续映射. 证毕.

设有 C^r 映射 $M:X\times\Lambda\to Y$, $r\geqslant1$,满足

$$M(0,0)=0,M_x(0,0)=0,\tag{1.1}$$

此处 Λ 为一 Banach 空间(为参数 λ 所在的空间),我们欲在$(x,\lambda)=(0,0)$的邻域内求解算子方程

$$Ax = M(x,\lambda). \tag{1.2}$$

今设引理 1.2 的条件满足,则由引理 1.1 知(1.2)等价于下列方程组

$$QAx = QM(x,\lambda),(I-Q)Ax = (I-Q)M(x,\lambda). \tag{1.3}$$

设 $x=y+z$,其中 $y=Px\in X_P$,$z=(I-P)x\in X_{I-P}$. 由 $\mathrm{Im}A=Y_Q$ 知$(I-Q)A=0$,故(1.3)可写为

$$Ax = QM(x,\lambda),0 = (I-Q)M(x,\lambda), \tag{1.4}$$

由于 $\mathrm{Ker}A=X_P$,则 $Pz=0$,$Ay=0$,又由引理 1.2 知在 X 上 $KA=I-P$,于是 $KAx=KA(y+z)=KAy+KAz=KAz=(I-P)z=z$,于是(1.4)又可写为

$$z = KQM(y+z,\lambda), \tag{1.5}$$

$$(I-Q)M(y+z,\lambda) = 0. \tag{1.6}$$

由(1.1)知 $M_z(0,0)=0$,因此对(1.5)应用隐函数定理知,存在$(y,\lambda)=(0,0)$在 $X_P\times\Lambda$ 中的邻域 $W\times V$ 及惟一的 C^r 函数 u:$W\times V\to X_{I-P}$,满足

$$\begin{aligned}&u(0,0) = 0, u_y(0,0) = 0,\\ &u(y,\lambda)\equiv KQM(y+u(y,\lambda),\lambda),(y,\lambda)\in W\times V.\end{aligned} \tag{1.7}$$

将 $z=u(y,\lambda)$代入(1.6)则有

$$G(y,\lambda)\equiv(I-Q)M(y+u(y,\lambda),\lambda) = 0. \tag{1.8}$$

于是,如果 $x=y+u(y,\lambda)$是(1.2)的解,则(y,λ)必使(1.8)成

立. 反之亦然. 我们称(1.8)为(1.2)的分支方程,而称由(1.8)左端给出的函数 G 为(1.2)的分支函数. 于是我们获得下述基本定理.

定理 1.1 设引理 1.2 的条件成立,又设 Λ 为一 Banach 空间,$M: X\times\Lambda\to Y$ 为 C^r 映射,$r\geqslant 1$,且(1.1)成立,则存在 $x=0$ 在 X 中的邻域 U,$(y,\lambda)=(0,0)$ 在 $X_P\times\Lambda$ 中的邻域 $W\times V$ 及 C^r 映射 $u: W\times V\to X_{I-P}$ 满足(1.7),使得对 $\lambda\in V$,(1.2)有解 $x(\lambda)\in U$ 当且仅当(1.8)有解 $y(\lambda)\in W$ 并有关系 $x(\lambda)=y(\lambda)+u(y(\lambda),\lambda)$.

1.2 分支函数与周期解

下面给出定理 1.1 对周期系统的应用. 首先给出若干引理. 考虑线性周期系统

$$\dot{x} = B(t)x, \tag{1.9}$$

其中 $x\in R^n$,$B(t)$为连续的 T 周期实矩阵. 同时考虑(1.9)的伴随方程

$$\dot{y} = -yB(t). \tag{1.10}$$

设 $X(t)$为(1.9)的基本解矩阵,满足 $X(0)=I$(单位矩阵),则易知 $Y(t)\equiv X^{-1}(t)$为(1.10)的基本解矩阵.

引理 1.3 方程(1.9)与(1.10)的线性无关的 T 周期解的个数是相同的.

证明 方程(1.9)的通解为 $x(t)=X(t)x_0$,因此(1.9)的线性无关的 T 周期解的个数等于线性代数方程$(X(T)-I)x_0=0$ 的线性无关解的个数. 同理,(1.10)的线性无关的 T 周期解的个数等于方程 $y_0(X^{-1}(T)-I)=0$ 的线性无关解的个数. 因为 $X^{-1}(T)-I=X^{-1}(T)(I-X(T))$,因此矩阵 $X^{-1}(T)-I$ 与 $X(T)-I$同秩,于是引理获证. 证毕.

引理 1.4 (Fredholm 更替原理) 设 $f(t)$为连续的 T 周期 n 维向量函数,则线性非齐次方程

$$\dot{x} = B(t)x + f(t) \tag{1.11}$$

有 T 周期解当且仅当对(1.10)的任何 T 周期解 $y(t)$ 都成立

$$\int_0^T y(t)f(t)\mathrm{d}t = 0. \tag{1.12}$$

若(1.12)成立,且(1.9)有 r 个线性无关的 T 周期解,则(1.11)有含 r 个独立参数的 T 周期解族.

证明 方程(1.11)的通解为

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_0^t X(t)X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s.$$

于是 $x(t)$ 为 T 周期解当且仅当

$$(X^{-1}(T) - I)x_0 = \int_0^T X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s. \tag{1.13}$$

令 $B = X^{-1}(T) - I = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $b = \int_0^T X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s$,则(1.13)关于 x_0 有解当且仅当 b 可表示为 B 的列向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的线性组合,当且仅当 B 与 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, b)$ 同秩,当且仅当 $y_0B=0$ 与 $y_0B=0, y_0b=0$ 同解,当且仅当 $y_0B=0$ 的解也是 $y_0b=0$ 的解. 因为 $y_0B=0$ 当且仅当 $y(t)=y_0X^{-1}(t)$ 是(1.10)的周期解,因此,(1.11)有周期解当且仅当对(1.10)的任何周期解 $y(t) = y_0X^{-1}(t)$ 均有

$$y_0b = \int_0^T y(t)f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

如果(1.12)成立,则(1.11)有 T 周期解 $x^*(t)$,且(1.11)的任何 T 周期解可表示为 $x = \bar{x} + x^*$,其中 $\bar{x}$ 是(1.9)的线性无关的周期解的线性组合. 证毕.

现设(1.9)的 T 周期解的一组基构成 $n \times p$ 阶矩阵 $\Phi(t)$,由引理 1.3,则(1.10) 的 T 周期解的一组基构成 $p \times n$ 阶矩阵 $\Psi(t)$,又用 Φ^*, Ψ^* 表示 Φ 与 Ψ 的转置矩阵,定义 p 阶矩阵 C, D 如下:

$$C = \int_0^T \Phi^*(t)\Phi(t)\mathrm{d}t, \quad D = \int_0^T \Psi(t)\Psi^*(t)\mathrm{d}t,$$

可证 C 与 D 为可逆矩阵. 事实上,若 C 不可逆,则存在 $x_0 \neq 0$ 使 $Cx_0 = 0$,令 $\varphi(t) = \Phi(t)x_0$,则

$$\int_0^T \varphi^*(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = x_0^* Cx_0 = 0,$$

其中 φ^* 与 x_0^* 分别是 φ 与 x_0 的转置. 由于 $\varphi^*\varphi = \|\varphi\|^2$,因而 $\varphi = 0$,于是 $x_0 = 0$,矛盾. 同理可证 D 可逆.

定义

$P_T = \{f: R \to R^n \mid f$ 为 T 周期连续向量函数$\}$,

$$P_T' = \{f: R \to R^n \mid f' \in P_T\}.$$

易知,在范数

$$|f| = \sup_t \|f(t)\|, |f|_1 = \sup_t(\|f(t)\| + \|f'(t)\|)$$

下,P_T 与 P_T' 分别成为 Banach 空间. 定义投影 $P: P_T' \to P_T'$ 与 $Q: P_T \to P_T$ 如下:

$$\begin{aligned} Pf &= \Phi(\cdot)C^{-1}\int_0^T \Phi^*(t)f(t)\mathrm{d}t, \\ Qf &= f - \Psi^*(\cdot)D^{-1}\int_0^T \Psi(t)f(t)\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1.14}$$

易见 P, Q 均为有界线性算子,且 $P^2 = P, Q^2 = Q$.

引理 1.5 设 $A: P_T' \to P_T$ 为由

$$(Ax)(t) = \dot{x}(t) - B(t)x(t)$$

定义的线性算子,则

$$\mathrm{Ker}A = (P_T')_P, \mathrm{Im}A = (P_T)_Q,$$

从而由引理 1.2,存在 $K \in L((P_T)_Q, (P_T')_{I-P})$,使在 $(P_T)_Q$ 上有 $AK = I$,在 P_T' 上有 $KA = I - P$.

证明 首先由(1.14)知 P 的值域(像集)恰好是(1.9) 的 T 周期解所成的空间,这也正是 A 的核,因此 $\mathrm{Ker}A=(P_T')_P$. 其次,由算子 A 的定义知 $f\in \mathrm{Im}A$ 当且仅当方程(1.11)在 P_T' 中有解,而由引理 1.4 和(1.14)中 Q 的定义可知,方程(1.11)在 P_T' 中有解当且仅当 $(I-Q)f=0$. 再由 $f=Qf+(I-Q)f$ 和 $(I-Q)^2=I-Q$ 易知 $(I-Q)f=0$ 等价于 $f\in(P_T)_Q$, 于是得证 $\mathrm{Im}A=(P_T)_Q$. 证毕.

引理 1.6 设 A 与 K 如引理 1.5 中所述,则

(i) $y\in(P_T')_P$ 当且仅当存在 p 维列向量 $a\in R^p$ 使 $y(t)=\Phi(t)a$;

(ii) 对任何 $a\in R^p$, $z=\Phi a+KQf$ 是线性方程

$$\dot{x} = Bx + Qf \tag{1.15}$$

的满足 $Pz=\Phi a$ 的惟一 T 周期解.

证明 设 $y\in(P_T')_P$, 则必存在 $x\in P_T'$ 使 $y=Px$. 由投影 P 的定义知

$$y(t) = \Phi(t)C^{-1}\int_0^T \Phi^*(t)x(t)\mathrm{d}t \equiv \Phi(t)a.$$

反之,对任意 $a\in R^p$, 令 $y(t)=\Phi(t)a$, 则 $y=Py\in(P_T')_P$, 即 (i) 得证.

由引理 1.5, 求解方程(1.2)与求解方程组(1.5)与(1.6)等价. 特别取 $M=Qf$, 则(1.6)自然成立,而(1.5)成为

$$z = KQ^2f = KQf \in (P_T')_{I-P},$$

因此 $z=KQf$ 是方程(1.15)的满足 $Pz=0$ 的惟一 T 周期解. 因为 $z=\Phi a$ 为齐线性方程(1.9)的满足 $Pz=\Phi a$ 的惟一 T 周期解,由此及线性方程解的迭加性质知结论(ii)成立. 证毕.

有了上述准备,我们可以讨论下述非线性方程

$$\dot{x} = B(t)x + f(t,x,\varepsilon) \tag{1.16}$$

的周期解的分支,其中 $\varepsilon\in E\subset R^k$,$k\geqslant 1$,$E$ 为 R^k 中的以原点为内点的闭集,$f:R\times R^n\times E\to R^n$ 为连续函数且关于于 t 为 T 周期的,关于(x,ε)为 C^1 的,且满足

$$f(t,0,0)=0,f_x(t,0,0)=0. \tag{1.17}$$

定义非线性算子 M 如下

$$M:P_T'\times E\to P_T,M(x,\varepsilon)(t)=f(t,x(t),\varepsilon).$$

可知 M 为C^1 的,且

$$(M_x(\bar{x},\varepsilon)g)(t)=f_x(t,\bar{x}(t),\varepsilon)g(t),g\in P_T'.$$

因此由(1.17)知 $M(0,0)=0$, $M_x(0,0)=0$. 我们注意到,求(1.16)的 T 周期解的问题已转化为求解方程

$$Ax=M(x,\varepsilon),(x,\varepsilon)\in P_T'\times E.$$

由(1.7)及引理 1.6(i),存在 $\varepsilon_0>0$ 及对 $|a|<\varepsilon_0$, $|\varepsilon|<\varepsilon_0$, $(a,\varepsilon)\in R^p\times E$ 有定义的连续可微函数 $u^*:R^p\times E\to(P_T')_{I-P}$,使成立

$$\begin{aligned}&u^*(0,0)=0,u_a^*(0,0)=0,Pu^*=0,\\&u^*(a,\varepsilon)=KQM(\Phi a+u^*(a,\varepsilon),\varepsilon).\end{aligned} \tag{1.18}$$

由(1.8)与(1.14)知,$u^*(a,\varepsilon)$为(1.16)的周期解当且仅当

$$\begin{aligned}G^*(a,\varepsilon)=\Psi^*(\cdot)D^{-1}\int_0^T\Psi(t)f(t,\Phi(t)a\\+u^*(a,\varepsilon)(t),\varepsilon)\mathrm{d}t=0.\end{aligned}$$

令

$$\bar{G}(a,\varepsilon)=\frac{1}{T}\int_0^T\Psi(t)f(t,\Phi(t)a+u^*(a,\varepsilon)(t),\varepsilon)\mathrm{d}t, \tag{1.19}$$

则综上所述可得下列定理.

定理 1.2 设(1.17)成立,则存在 $\varepsilon_0>0$ 及对 $|a|<\varepsilon_0$, $|\varepsilon|<\varepsilon_0$,有定义的 T 周期 C^1 函数族 $u^*(a,\varepsilon)$,满足(1.18),使得 $x^*(a,\varepsilon)=\Phi a+u^*(a,\varepsilon)$ 为(1.16)的 T 周期解当且仅当 $\bar{G}(a,\varepsilon)=0$.

我们称由(1.19) 给出的函数 $\bar{G}$ 为(1.16)的分支函数.

注 1.1 由引理 1.6(ii)及(1.18)知函数 $u^*(a,\varepsilon)$ 是方程

$$\dot{z} = Bz + Qf(t,\Phi(t)a + z,\varepsilon)$$

的满足

$$\int_0^T \Phi^*(t)u^*(a,\varepsilon)(t),\mathrm{d}t = 0$$

的惟一解.

注 1.2 如果 f 为 C^r 函数($1\leqslant r\leqslant\infty$)或解析函数,则 u^* 及 $\bar{G}$ 也为 C^r 函数或解析函数.

注 1.3 设 f 为 C^2 函数,则由(1.18)与(1.19)易知

$$\bar{G}_\varepsilon(0,0) = \frac{1}{T}\int_0^T \Psi(t)f_\varepsilon(t,0,0)\mathrm{d}t, \bar{G}_a(0,0) = 0,$$

$$\bar{G}_{aa}(0,0) = \frac{1}{T}\int_0^T \Psi(t)f_{xx}(t,0,0)\Phi^2(t)\mathrm{d}t.$$

注 1.4 如果 $f(t,x,0)=0$, 则定理 1.2 对有界的 $a\in R^p$ 也成立,且由(1.18)知 $u^*(a,0)=0$. 特别,如果 $\varepsilon\in R$,则

$$\bar{G}(a,\varepsilon) = \varepsilon[F(a) + G_1(a,\varepsilon)], G_1(a,0) = 0,$$

$$F(a) = \frac{1}{T}\int_0^T \Psi(t)f_\varepsilon(t,\Phi(t)a,0)\mathrm{d}t.$$

因此,由定理 1.2 与注 1.4 并利用隐函数定理即得

推论 1.1 设 $\varepsilon\in R$, $f(t,x,0)=0$, $f\in C^2$. 如果存在 $a_0\in R^n$ 使 $F(a_0)=0$, $\det F_a(a_0)\neq 0$, 则存在 $\varepsilon_0>0$, 使当 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 时

(1.16)有满足 $x(a,\varepsilon)=\Phi a+O(\varepsilon)$的惟一 T 周期解.

注 1.5 设 $B(t)=\mathrm{diag}(0,B)$为常矩阵,其中 0 为 p 阶零矩阵,B 为 $n-p$ 阶常矩阵且使 $\det(e^{BT}-I_{n-p})\neq 0$,则易知 $\Psi=\Phi^*=(I_P,0)$,$C=D=TI_p$,$\Phi a=(a,0)^T$. 从而对 $f=(f_1,f_2)^T\in P_T$,$f_1(t)\in R^p$,有

$$Pf=\begin{pmatrix}\frac{1}{T}\int_0^T f_1(t)\mathrm{d}t\\ 0\end{pmatrix},Qf=(I-P)f.$$

若设

$$f(t,x,\varepsilon)=(f_1(t,x,\varepsilon),f_2(t,x,\varepsilon))^T,f_1\in R^p,$$

$$u^*(a,\varepsilon)=(u_1^*(a,\varepsilon),u_2^*(a,\varepsilon))^T,u_1\in R^p,$$

则由(1.18)与(1.19)知

$$u_i^*(a,\varepsilon)=u_{i\varepsilon}^*(0,0)\varepsilon+o(|a,\varepsilon|),i=1,2,$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T u_1^*(a,\varepsilon)(t)\mathrm{d}t=0,$$

$$\bar{G}(a,\varepsilon)=\frac{1}{T}\int_0^T f_1(t,a+u_1^*(a,\varepsilon)(t),u_2^*(a,\varepsilon)(t),\varepsilon)\mathrm{d}t,\tag{1.20}$$

故由引理 1.6(ii)及解的惟一性知 u^* 满足微分方程

$$\begin{aligned}(u_1^*)'&=f_1(t,a+u_1^*,u_2^*,\varepsilon)-\bar{G}(a,\varepsilon),\\(u_2^*)'&=Bu_2^*+f_2(t,a+u_1^*,u_2^*,\varepsilon).\end{aligned}\tag{1.21}$$

将 u^* 关于 a 与 ε 展开,利用(1.20) 与(1.21)可求出分支函数 $\bar{G}$ 关于(a,ε)展开式的前几项(主项).

本节导出分支函数的方法常称为 Liapunov-Schmidt 方法,这种方法是由 Cesari 与 Hale 等先后在 20 世纪 40～50 年代建立并

发展起来的.有关这一方法的更多的结果可参考[13]与[65]等.

§2 Hopf 分支与一类退化 Hopf 分支

本节利用上一节所介绍的研究周期解的方法来讨论自治系统在某一奇点邻域内局部周期解的分支,即所谓的 Hopf 分支.

2.1 Hopf 分支定理

考虑自治系统

$$\dot{x} = f(x,\varepsilon), \tag{2.1}$$

其中 $x \in R^n$, $\varepsilon \in R^k$, f 为 C^r 函数, $r \geq 2$, 且满足 $f(0,\varepsilon) = 0$. 又设 $f_x(0,0) = A_0$ 有一对纯虚特征值 $\pm i$, 且其他特征值都不是 $\pm i$ 的整数倍,则可设

$$A_0 = \mathrm{diag}(B_0, C_0), B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J, \quad \det(e^{2\pi C_0} - I_{n-2}) \neq 0. \tag{2.2}$$

由矩阵标准型理论,进一步可设

$$f_x(0,\varepsilon) = A(\varepsilon) = \mathrm{diag}(B(\varepsilon), C(\varepsilon)), \quad B(\varepsilon) = \alpha(\varepsilon)I + \beta(\varepsilon)J, \alpha(0) = 0, \beta(0) = 1, \tag{2.3}$$

下列引理是基本的.

引理 2.1 设(2.2)成立,又设对充分小的 $|\varepsilon|$,(2.1)有周期为 $T(\varepsilon)$的周期解 $x(t,\varepsilon) = (y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon)) \in R^2 \times R^{n-2}$. 如果当 $\varepsilon \to 0$,时 $x(t,\varepsilon) \to 0$, $T(\varepsilon) \to 2\pi$,则有

$$y(t,\varepsilon) \neq 0, z(t,\varepsilon) = O(|y(t,\varepsilon)|^2), 0 < |\varepsilon| \ll 1. \tag{2.4}$$

证明 以下为了书写方便,记 $y(t) = y(t,\varepsilon)$, $z(t) = z(t,\varepsilon)$. 由(2.3)及常数变易公式知

$$y(t)=e^{B(t-\tau)}y(\tau)+\int_{\tau}^{t}e^{B(t-s)}R_1(s)\mathrm{d}s, \tag{2.5}$$

$$z(t)=e^{C(t-\tau)}z(\tau)+\int_{\tau}^{t}e^{C(t-s)}R_2(s)\mathrm{d}s, \tag{2.6}$$

其中 $0\leqslant\tau\leqslant T(\varepsilon)\equiv T,\tau\leqslant t\leqslant\tau+T$,且

$$R_i(t)=O(|y(t),z(t)|^2),i=1,2. \tag{2.7}$$

由(2.6)并注意到 $z(t)$ 为 T 周期的,我们有

$$z(\tau)=(I_{n-2}-e^{CT})^{-1}e^{CT}\int_{\tau}^{\tau+T}e^{C(\tau-s)}R_2(s)\mathrm{d}s.$$

因为当 $\varepsilon\to0$ 时 $T\to2\pi$,于是由(2.2)与(2.7)及 $0\leqslant s-\tau\leqslant T$ 知

$$\begin{aligned}|z(\tau)|&\leqslant N_1\int_{\tau}^{T+\tau}(|y(s)|^2+|z(s)|^2)\mathrm{d}s\\&=N_1\int_0^T(|y(s)|^2+|z(s)|^2)\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{2.8}$$

其中 N_1 为与 τ 无关的常数.当 $|\varepsilon|$ 适当小时有

$$N_1\max_t|z(t)|\leqslant\min\left\{1,\frac{1}{2T}\right\}=\frac{1}{2T},$$

于是由(2.8),

$$|z(\tau)|\leqslant N_1\int_0^T|y(s)|^2\mathrm{d}s+\frac{1}{2T}\int_0^T|z(s)|\mathrm{d}s, \tag{2.9}$$

对不等式(2.9)两边关于 τ 从 0 到 T 积分得

$$\int_0^T|z(\tau)|\mathrm{d}\tau\leqslant2N_1T\int_0^T|y(s)|^2\mathrm{d}s. \tag{2.10}$$

将(2.10)代入(2.9)可得

$$|z(\tau)|\leqslant2N_1\int_0^T|y(s)|^2\mathrm{d}s, \tag{2.11}$$

由(2.5)知存在常数 $N_2>0$,使有

$$|y(t)|\leqslant N_2|y(\tau)|+N_2\int_\tau^{\tau+T}(|y(s)|^2+|z(s)|^2)\mathrm{d}s$$

$$=N_2|y(\tau)|+N_2\int_0^T(|y(s)|^2+|z(s)|^2)\mathrm{d}s,$$

因此,由(2.11),存在常数 $N_3>0$,使

$$|y(t)|\leqslant N_2|y(\tau)|+N_3\int_0^T|y(s)|^2\mathrm{d}s,$$

再取 $|\varepsilon|$ 足够小,使 $N_3\max\limits_t|y(t)|\leqslant\dfrac{1}{2T}$,则由上式可得

$$|y(t)|\leqslant N_2|y(\tau)|+\frac{1}{2T}\int_0^T|y(s)|\mathrm{d}s,$$

对此不等式两边关于 t 在 $[\tau,\tau+T]$ 上积分可得 $\int_0^T|y(s)|\mathrm{d}s\leqslant 2N_2T|y(\tau)|$,从而有 $|y(t)|\leqslant 2N_2|y(\tau)|$,$\tau\leqslant t\leqslant\tau+T$,因此

$$\int_0^T|y(t)|^2\mathrm{d}t=\int_\tau^{\tau+T}|y(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant(2N_2|y(\tau)|)^2T,$$

由此及(2.11)可得 $|z(\tau)|\leqslant 8N_1N_2^2T|y(\tau)|^2$,此不等式与(2.4)等价. 证毕.

由引理 2.1 知,在条件(2.2)下,我们可以对(2.1)引入变换

$$y=p(\cos\theta,-\sin\theta),z=pv,$$

而得一如下形式的 2π 周期系统

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta}=R(\theta,p,v,\varepsilon),\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}=C_0v+V(\theta,p,v,\varepsilon),\qquad(2.12)$$

其中 R,V 为 C^{r-1} 函数且关于 θ 为 2π 周期的,且由(2.3)知

$$R=\frac{\alpha(\varepsilon)}{\beta(\varepsilon)}p+O(p^2),V=\gamma p+V_1(\theta,p,v,\varepsilon),$$

$$V_1=O(\varepsilon|p,v|+|p,v|^2),\gamma\in R^{n-2},\qquad(2.13)$$

使得方程(2.1)在原点附近的周期接近 2π 的闭轨与(2.12)在$(p,v)=(0,0)$的小邻域内的 2π 周期解成一一对应,这正是引理 2.1 的意义.换言之,我们可以通过研究(2.12)在$(p,v)=(0,0)$附近的周期解而获得(2.1)在原点附近周期接近 2π 的所有闭轨.引理 2.1 的最初形式是对四维系统叙述的并在[65]中给予证明,后在[44]中获得应用与推广,在[106]中对现在出现的形式给出了完整的证明.此外,我们指出,如果 A_0 的特征值除 $\pm i$ 以外均具有非零实部,则引理 2.1 的结论可直接利用中心流形定理获得.

令 $u=v+C_0^{-1}\gamma p$, 则由(2.12)可得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta}=\overline{R}(\theta,p,u,\varepsilon),\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=C_0u+\overline{V}(\theta,p,u,\varepsilon),$$

其中

$$\overline{R}(\theta,p,u,\varepsilon)=R(\theta,p,u-C_0^{-1}\gamma p,\varepsilon),$$

$$\overline{V}(\theta,p,u,\varepsilon)=C_0^{-1}\gamma\overline{R}(\theta,p,u,\varepsilon)+V_1(\theta,p,u-C_0^{-1}\gamma p,\varepsilon).$$

对上述方程应用 Liapunov-Schmidt 方法及注 1.5,可知存在 C^{r-1} 类的 2π 周期函数 $p^*(\theta,a,\varepsilon),u^*(\theta,a,\varepsilon)$,满足

$$\frac{\mathrm{d}p^*}{\mathrm{d}\theta}=\overline{R}(\theta,p^*,u^*,\varepsilon)-G(a,\varepsilon),$$

$$\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}\theta}=C_0u^*+\overline{V}(\theta,p^*,u^*,\varepsilon),$$

$$p^*(\theta,0,0)=0,u^*(\theta,0,0)=0,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p^*(\theta,a,\varepsilon)\mathrm{d}\theta=a,$$

$$G(a,\varepsilon)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{R}(\theta,p^*(\theta,a,\varepsilon),u^*(\theta,a,\varepsilon),\varepsilon)\mathrm{d}\theta,$$

使得上述周期微分方程在$(p,u)=(0,0)$的小邻域内有 2π 周期解当且仅当 G 关于充分小的 $a>0$ 有根.

由(2.13)及解的惟一性又知 $p^*(\theta,0,\varepsilon)=0, p_a^*(\theta,0,0)=1$. 令 $v^*=u^*-C_0^{-1}\gamma p^*$, 则 p^*, v^* 满足

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}p^*}{\mathrm{d}\theta} = R(\theta,p^*,v^*,\varepsilon) - G(a,\varepsilon),\\
&\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}\theta} = C_0 v^* + V(\theta,p^*,v^*,\varepsilon),\\
&p^*(\theta,0,\varepsilon) = 0, v^*(\theta,0,0) = 0,\\
&p_a^*(\theta,0,0) = 1, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p^*\mathrm{d}\theta = a,
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

且

$$
G(a,\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R(\theta,p^*(\theta,a,\varepsilon),v^*(\theta,a,\varepsilon),\varepsilon)\mathrm{d}\theta.
\tag{2.15}
$$

由定理 1.2 与注 1.1 知满足(2.14)的 (p^*,v^*) 是惟一存在的, 且(2.12)在 $(p,v)=(0,0)$ 的小邻域内有 2π 周期解当且仅当 G 关于充分小的 $a>0$ 有根.

下证 G 关于 a 为奇函数. 令

$$
\begin{aligned}
q^*(\theta,a,\varepsilon) &= -p^*(\theta+\pi,-a,\varepsilon),\\
w^*(\theta,a,\varepsilon) &= -v^*(\theta+\pi,-a,\varepsilon),
\end{aligned}
$$

则注意到函数 R, V 满足

$$
\begin{aligned}
R(\theta+\pi,-p,-v,\varepsilon) &= -R(\theta,p,v,\varepsilon),\\
V(\theta+\pi,-p,-v,\varepsilon) &= -V(\theta,p,v,\varepsilon),
\end{aligned}
$$

易证 (q^*,w^*) 也满足(2.14), 故由惟一性知

$$
q^*(\theta,a,\varepsilon) = p^*(\theta,a,\varepsilon), w^*(\theta,a,\varepsilon) = v^*(\theta,a,\varepsilon),
$$

于是由(2.15)知

$$G(-a,\varepsilon)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}R(\theta,p^*(\theta,-a,\varepsilon),v^*(\theta,-a,\varepsilon),\varepsilon)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}R(\theta+\pi,p^*(\theta+\pi,-a,\varepsilon),$$

$$v^*(\theta+\pi,-a,\varepsilon),\varepsilon)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}R(\theta+\pi,$$

$$-p^*(\theta,a,\varepsilon),-v^*(\theta,a,\varepsilon),\varepsilon)\mathrm{d}\theta=-G(a,\varepsilon).$$

因此由(2.13)与(2.14),分支函数 G 可写为

$$G(a,\varepsilon)=a[\alpha(\varepsilon)/\beta(\varepsilon)+O(|a|)]$$

$$=aG_1(a,\varepsilon),\tag{2.16}$$

其中 $G_1(a,\varepsilon)$关于 a 为偶函数.由此可证下述 Hopf 分支定理.

定理 2.1 设(2.1)中的 f 为 C^r 函数,$r\geqslant3$,$f(0,\varepsilon)=0$,且(2.2)与(2.3)成立.如果 $\varepsilon\in R$,且 $\alpha'(0)\neq0$,则存在 C^{r-2} 函数 $g(a)=O(|a|)$,使得(2.1)存在周期接近 2π 的小振幅周期轨道当且仅当存在 $a>0$ 使 $\varepsilon=g(a)$.若 f 为解析函数,则(2.1)至多有一个周期接近 2π 的小振幅周期轨道.

证明 因为(2.12)为 C^{r-1}系统,故分支函数 $G(a,\varepsilon)$为 C^{r-1}函数,从而(2.16)中的 G_1 为 C^{r-2}函数,于是对(2.16)应用隐函数定理知存在 C^{r-2}函数 $g(a)=O(|a|)$,使对 $a>0$,$G(a,\varepsilon)=0$当且仅当 $\varepsilon=g(a)$.于是定理的前半部分得证.若 f 为解析函数,因为 G_1 为 a 的偶函数,可知 g 也为 a 的偶函数,于是或 $g(a)\equiv0$,此时对一切充分小的 $\varepsilon\neq0$ 及 $a>0$ 有 $G(a,\varepsilon)\neq0$,即当 $\varepsilon\neq0$ 充分小时(2.1)在原点附近没有周期接近 2π 的周期解,或存在偶数 $m\geqslant2$,使

$$g(a)=g_ma^m+O(a^{m+2}),g_m\neq0,$$

此时函数 $\varepsilon=g(a)$有反函数 $a=(\varepsilon g_m^{-1})^{1/m}(1+o(1))$,其定义域

为 $\varepsilon g_m \geqslant 0$,故对充分小的 $\varepsilon \neq 0$,方程(2.1)在原点邻域内有周期接近 2π 的闭轨当且仅当 $\varepsilon g_m > 0$,且闭轨是惟一存在的.证毕.

注 2.1 若存在偶数 $m \geqslant 2$,且 $m \leqslant r-2$,使

$$G(a,0) = g_m a^{m+1} + O(a^{m+3}), g_m \neq 0,$$

则利用 Rolle 定理可证,对一切充分小的 $\varepsilon \in R^k$,函数 $G(a,\varepsilon)$关于 $a>0$ 至多有 $m/2$ 个正根,从而对一切充分小的 $\varepsilon \neq 0$,方程(2.1)在原点邻域内至多有 $m/2$ 个周期接近 2π 的闭轨.在实用中可利用注 1.5 来计算量 g_m.

注 2.2 如果(2.2)的 $n-2$ 阶矩阵 C_0 的特征根实部都不是零,则由中心流形定理知(2.1)在原点邻域内只可能有周期接近 2π 的闭轨,因此在这种情况下,可由分支函数获得(2.1)在原点邻域内的所有闭轨.此外,G 还决定了闭轨的稳定性.例如,若 C_0 的特征根实部均为负数,且标量方程

$$\dot{a} = G(a,\varepsilon)$$

有一稳定(不稳定)奇点 $a=a(\varepsilon)$,则相应的闭轨是稳定(不稳定)的.这一结论的证明可参考[9]、[13]、[110]或[65].

注 2.3 如果 f 满足

$$f(x,\varepsilon) = A_0 x + \varepsilon \bar{f}(x,\varepsilon), \varepsilon \in R,$$

则由注 1.4 易知 $G(a,\varepsilon) = \varepsilon G_1(a,\varepsilon)$, 其中

$$G_1(a,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_0(\theta,a)\mathrm{d}\theta,$$

$$R_0(\theta,a) = (\cos\theta, -\sin\theta, 0) \cdot [\bar{f}(a\cos\theta, -a\sin\theta, 0, 0)]^T.$$

因此, 类似于推论 1.1 可知, 如果函数 $G_1(a,0)$有一 k 重正根 a_0, 则当$|\varepsilon|>0$ 充分小时(2.1)在闭曲线$\{(a_0\cos\theta, -a_0\sin\theta, 0) | 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$附近至多有 k 个闭轨, 若 k 为奇数, 则至少有一个闭轨,又由注 2.1 知, 如果 $G_1(a,0)$以 $a=0$ 为 $2k+1$ 重根, 则当

$|\varepsilon|>0$ 充分小时(2.1)在原点附近至多有 k 个闭轨.

2.2　一类退化 Hopf 分支

本段仍考虑 C^r 系统(2.1)，且设矩阵 A_0 满足

$$f_x(0,0)=A_0=\mathrm{diag}(B_0,0,C_0),\det(e^{2\pi C_0}-I_{n-3})\neq 0, \tag{2.17}$$

其中 B_0 同前，C_0 为 $n-3$ 阶矩阵.与引理 2.2 完全类似可证.

引理 2.2　设(2.17)成立，又设对 $|\varepsilon|$ 充分小，(2.1)有周期解 $x(t,\varepsilon)=(y(t,\varepsilon),u(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon))\in R^2\times R\times R^{n-3}$，其周期解为 $T(\varepsilon)$，如果当 $\varepsilon\to 0$ 时 $x(t,\varepsilon)\to 0$，$T(\varepsilon)\to 2\pi$，则对一切充分小的 $|\varepsilon|$ 有

$$(y(t,\varepsilon),u(t,\varepsilon))\neq 0,z(t,\varepsilon)=O(|y(t,\varepsilon),u(t,\varepsilon)|^2). \tag{2.18}$$

现对(2.1)作变换

$$x=(p\cos\theta,-p\sin\theta,pw_1,pw_2), \tag{2.19}$$

由(2.1)可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta}&=R(\theta,p,w_1,w_2,\varepsilon),\\ \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}\theta}&=W_1(\theta,p,w_1,w_2,\varepsilon),\\ \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}\theta}&=C_0w_2+W_2(\theta,p,w_1,w_2,\varepsilon),\end{aligned} \tag{2.20}$$

其中 R,W_1,W_2 为 C^{r-1}类函数，且关于 θ 为 2π 周期的，且满足

$$R(\theta,0,w_1,w_2,\varepsilon)=0,R_p(\theta,0,w_1,w_2,0)=0,$$

$$W_i(\theta,0,w_1,w_2,0)=0,i=1,2.$$

同前，利用 Liapunov-Schmidt 方法与注 1.5，对充分小的 a 与 ε，存在惟一的 2π 周期函数组 $p^*(\theta,a,b,\varepsilon),w_i^*(\theta,a,b,\varepsilon),i=$

1,2,满足

$$\begin{aligned}&p^*(\theta,0,b,\varepsilon)=0,p_a^*(\theta,0,b,0)=1,\\&w_1^*(\theta,0,b,0)=b,w_2^*(\theta,0,b,0)=0,\\&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p^*(\theta,a,b,\varepsilon)\mathrm{d}\theta=a,\\&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}w_1^*(\theta,a,b,\varepsilon)\mathrm{d}\theta=b,\end{aligned}\tag{2.21}$$

使得如果

$$G(a,b,\varepsilon)\equiv\frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix}\int_0^{2\pi}R(\theta,p^*,w_1^*,w_2^*,\varepsilon)\mathrm{d}\theta\\\int_0^{2\pi}W_1(\theta,p^*,w_1^*,w_2^*,\varepsilon)\mathrm{d}\theta\end{pmatrix}=0,\tag{2.22}$$

则(p^*,w_1^*,w_2^*)为(2.1)的 2π 周期解,又可证分支函数 G 关于 (a,b) 为奇函数,且由(2.19)知可设 $a\geqslant0$,于是由(2.18)与(2.19)知下列定理成立([34]).

定理 2.2 设(2.17)成立,任给 $K>0$,必存在 $\varepsilon_0>0$ 及原点的邻域 U,使当$|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 时方程(2.1)在 U 中有满足$|u|\leqslant K|y|$的周期接近 2π 的周期解 $x(t)=(y(t),u(t),z(t))\in R^2\times R\times R^{n-3}$ 当且仅当存在满足$|b|\leqslant K,0<a<\varepsilon_0,|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 的(a,b,ε)使 $G(a,b,\varepsilon)=0$.

注 2.4 如果 $f(x,\varepsilon)=A_0x+\varepsilon\bar{f}(x,\varepsilon)$,则与前面类似有

$$G(a,b,\varepsilon)=\varepsilon[F(a,b)+O(|\varepsilon|)],$$

其中

$$F(a,b)=\frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix}\int_0^{2\pi}R_0(\theta,a,b)\mathrm{d}\theta\\\int_0^{2\pi}W_0(\theta,a,b)\mathrm{d}\theta\end{pmatrix},$$

$$R_0 = (\cos\theta, -\sin\theta, 0) \cdot [\bar{f}(a\cos\theta, -a\sin\theta, ab, 0, 0)]^T,$$

$$W_0 = \bar{f}_3(a\cos\theta, -a\sin\theta, ab, 0, 0)/a - bR_0/a, \quad (2.23)$$

上式中 $\bar{f}_3$ 为 $\bar{f}$ 的第三个分量，于是如果存在$(a_0, b_0) \in R^2, a_0 > 0$ 使

$$F(a_0, b_0) = 0, \det DF(a_0, b_0) \neq 0,$$

则当$|\varepsilon| > 0$ 充分小时(2.1)在闭曲线$\{(a_0\cos\theta, -a_0\sin\theta, a_0 b_0, 0) | 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$附近有惟一闭轨. 如果方程(2.1)还含有另一参数 δ，则可仿第二章注 5.3，利用 F 讨论(2.1)的闭轨的鞍结点型分支.

例 2.1 考虑三维系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + \varepsilon(1 + z - \delta x^2 + x^4)y, \\ \dot{z} &= \varepsilon(z + x), \end{aligned} \quad (2.24)$$

首先由(2.23)易知

$$R_0 = a\sin^2\theta(1 + ab - \delta a^2\cos^2\theta + a^4\cos^4\theta),$$

$$W_0 = b + \cos\theta - R_0 b/a,$$

$$F(a, b) = \left(\frac{a}{16}F_1, b\left(1 - \frac{1}{16}F_1\right)\right)^T,$$

其中 $F_1 = 8(1 + ab) - 2\delta a^2 + a^4$，易知当 $\delta = 2\sqrt{2}$时在(a, b)平面上由 $F_1 = 0$ 给出的曲线与直线 $b = 0$ 有二重切点$(\sqrt[4]{8}, 0)$，于是存在函数 $\delta(\varepsilon) = 2\sqrt{2} + O(\varepsilon)$，使对充分小的 $\varepsilon \neq 0$，当 $\delta > \delta(\varepsilon)$时(2.24)有两个双曲极限环，当 $\delta = \delta(\varepsilon)$时此两极限环已形成非双曲环，当 $\delta < \delta(\varepsilon)$时(2.24)无环. 这一结论的获得并不是显而易见的，而是需要对(2.24)引入变换$(x, y, z) = (p\cos\theta, -p\sin\theta, w)$，而后再利用Liapunov-Schmidt方法才可获得.

一般地，如果当 x 的前两个分量为零时$f(x,\varepsilon)$的前两个分量也为零，则代替(2.19)，可对(2.1)施行变换 $x=(p\cos\theta,-p\sin\theta,w_1,w_2)$，这样得到的新方程比(2.20)简单,而且更重要的是此时利用分支函数可得到(2.1)的周期接近 2π 的所有小振幅周期解.详细论证可参考[65]，下面仅举一例.

例 2.2 考虑三维系统

$$\dot{x}=y+\varepsilon x+x^3,\dot{y}=-x+\varepsilon y+yz,$$
$$\dot{z}=\varepsilon(z+x^2+z^2), \tag{2.25}$$

令 $x=p\cos\theta,y=-p\sin\theta,z=w$,可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta}&=\frac{p(\varepsilon+p^2\cos^4\theta+w\sin^2\theta)}{1-p^2\cos^2\theta\sin\theta+w\sin\theta\cos\theta},\\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta}&=\frac{\varepsilon(w+p^2\cos^2\theta+w^2)}{1-p^2\cos^2\theta\sin\theta+w\sin\theta\cos\theta}.\end{aligned} \tag{2.26}$$

对方程(2.26)应用 Liapunov-Schmidt 方法可得满足(2.21)与(2.22)的函数 p^*,w^* 与 G，且由(2.26)的形式知 G 可写为

$$G=(a\bar{G}_1(a,b,\varepsilon),\varepsilon\bar{G}_2(a,b,\varepsilon))^T, \tag{2.27}$$

又由(2.21)易知

$$p^*=a+O(|a|(|\varepsilon|+|a|+|b|)),$$
$$w^*=b+O(|\varepsilon|(|a|+|b|)),$$

于是由(2.22)与(2.26)可算得

$$\bar{G}_1=\varepsilon+\frac{3}{8}a^2+\frac{1}{2}b+\cdots,\bar{G}_2=b+\frac{1}{2}a^2+\cdots.$$

由此可知 $\bar{G}_2=0$ 有解 $b=-\frac{1}{2}a^2+O(a^3)$，代入到 $\bar{G}_1=0$ 可得解 $\varepsilon=-\frac{1}{8}a^2+O(a^3)$，其反函数为 $a=\sqrt{-8\varepsilon}+O(\varepsilon)$,从而对

充分小的 $\varepsilon \neq 0$,当且仅当 $\varepsilon < 0$ 时(2.25)在原点附近有(惟一)极限环.

§3 周期解的共振分支

本节讨论另一种类型的退化 Hopf 分支,我们先对一般系统建立分支函数,然后应用分支函数分析四维系统周期轨道的共振分支.

3.1 分支函数的建立

考虑 n 维 C^r 自治系统($r \geqslant 2$)

$$\dot{x} = Ax + f(x, \varepsilon), \tag{3.1}$$

其中 $\varepsilon \in R, x \in R^n, n \geqslant 4, f(x, \varepsilon) = O(|x|^2 + |\varepsilon|)$. 设 A 以 $\pm i$ 及 $\pm \omega i$ 为特征值,而其他 $n-4$ 个特征值都不是 $\pm i$ 的整数倍. 如果 ω 不是整数,则可利用第二节的方法讨论(3.1)的周期接近 2π 的周期轨道的存在性. 若 ω 为整数,则前面的结果不能直接应用,本节我们专门讨论这种共振情况下周期解的分支.

设

$$A = \mathrm{diag}(J, mJ, B), J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \det(e^{2\pi B} - I_{n-4}) \neq 0, \tag{3.2}$$

其中 m 为非零整数,由于 A 为可逆矩阵,因此可进一步设 $f(0, \varepsilon) = 0$,且

$$A + f_x(0, \varepsilon) = \mathrm{diag}(D_1(\varepsilon), D_2(\varepsilon), B + O(\varepsilon)),$$

$$D_i(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \alpha_i(\varepsilon) & \beta_i(\varepsilon) \\ -\beta_i(\varepsilon) & \alpha_i(\varepsilon) \end{pmatrix}, i = 1,2.$$

设 $x = (y, u, z)^T, y, u \in R^2$,对(3.1)引入变换

$$y = p(\cos\theta, -\sin\theta)^T, u = pq, z = pv, \tag{3.3}$$

由(3.1)可得 2π 周期系统

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta} &= R_1(\theta, p, q, v, \varepsilon), \\ \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\theta} &= mJq + Q(\theta, p, q, v, \varepsilon), \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} &= Bv + V(\theta, p, q, v, \varepsilon), \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中

$$\begin{aligned} &R_1(\theta, 0, q, v, \varepsilon) = R_{1p}(\theta, 0, q, v, 0) = 0, \\ &Q(\theta, 0, q, v, 0) = 0, V(\theta, 0, q, v, 0) = 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

且

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 1 + O(|x| + |\varepsilon|). \tag{3.6}$$

对(3.4)再引入周期变换

$$q = e^{mJ\theta}w_1, v = w_2, \tag{3.7}$$

可得 2π 周期系统

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta} &= R(\theta, p, w_1, w_2, \varepsilon), \\ \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}\theta} &= W_1(\theta, p, w_1, w_2, \varepsilon), \\ \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}\theta} &= Bw_2 + W_2(\theta, p, w_1, w_2, \varepsilon), \end{aligned} \tag{3.8}$$

其中

$$R(\theta, p, q, w_1, w_2, \varepsilon) = R_1(\theta, p, e^{mJ\theta}w_1, w_2, \varepsilon),$$

$$W_1(\theta,p,q,w_1,w_2,\varepsilon) = e^{-mJ\theta}Q(\theta,p,e^{mJ\theta}w_1,w_2,\varepsilon),$$

$$W_2(\theta,p,q,w_1,w_2,\varepsilon) = V(\theta,p,e^{mJ\theta}w_1,w_2,\varepsilon). \quad (3.9)$$

易见函数 R,W_1 与 W_2 仍满足条件(3.5),又与引理 2.1 完全类似可证,若 $x(t,\varepsilon)=(y(t,\varepsilon),u(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon))$为(3.1)的周期接近 2π 的周期解,且 $x(t,0)=0$,则必成立

$$z(t,\varepsilon) = O(|y(t,\varepsilon),u(t,\varepsilon)|^2),0<|\varepsilon|\ll 1.$$

于是由变换(3.3)与(3.7)知对任意的 $K>0$, 存在 $\varepsilon_0>0$,使在区域

$$\Omega = \{x=(y,u,z)\mid |u|\leqslant\varepsilon_0,|u|\leqslant K|y|\}$$

中方程(3.1)的周期接近 2π 的周期轨道的个数与周期系统(3.8)在区域 $0<p\leqslant\varepsilon_0,|w_1|\leqslant K,|w_2|\leqslant\varepsilon_0$ 中 2π 周期解的个数一致. 于是仿照对方程(2.20)的讨论可得满足(2.21)的 2π 周期函数 (p^*,w_1^*,w_2^*)及由(2.22)之左给出的分支函数 $G(a,b,\varepsilon)$, 只是此处的 $b\in R^2$,而且 G 为三维向量函数, 于是成立下述定理([44]).

定理 3.1 设(3.2)成立, 则存在三维向量分支函数 $G(a,b,\varepsilon)$, 使当 $\varepsilon\neq 0$ 充分小时方程(3.1)在原点附近有满足

$$|y(t,\varepsilon)|\neq 0,\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{|u(t,\varepsilon)|}{|y(t,\varepsilon)|}<+\infty \quad (3.10)$$

的周期接近 2π 的周期轨道 $L_\varepsilon=\{x(t,\varepsilon)=(y(t,\varepsilon),u(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon)),|t\in R\}$当且仅当存在充分小的 $a>0,b\in R^2$ 使 $G(a,b,\varepsilon)=0$.

注 3.1 若 $m>1$ 且 $e^{2\pi B/m}-I_{n-4}$非奇异,则由定理 2.1 可知方程(3.1)可以有满足

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|u(t,\varepsilon)|}{|y(t,\varepsilon)|}=\infty$$

的周期接近 $2\pi/m$ 的周期解，这种周期解显然不能利用分支函数 G 来获得，但可先在(3.1)中对调 u 与 y,然后利用定理 3.1 来讨论.

注 3.2 由(2.21)及(3.2)易知

$$p^{*}=a+O(|a|^{2}+|a\varepsilon|),w_{1}^{*}=b+O(|a|+|\varepsilon|),$$

$$w_{2}^{*}=O(|a|+|\varepsilon|), \tag{3.11}$$

由此可计算 G 的主项，若要计算更多的项可把 p^{*} ,w_{1}^{*} 与 w_{2}^{*} 按(a,ε)展开，并对方程(3.8)利用注 1.5.

如果 $f(x,0)=0$，则有

$$R(\theta,p,w_{1},w_{2},\varepsilon)=\varepsilon\overline{R}(\theta,p,w_{1},w_{2},\varepsilon),$$

$$W_{i}(\theta,p,w_{1},w_{2},\varepsilon)=\varepsilon\overline{W}_{i}(\theta,p,w_{1},w_{2},\varepsilon),$$

且对任何 $a>0$(a 不必小)与 $b\in R^{2}$，有

$$G(a,b,\varepsilon)=\varepsilon[F(a,b)+O(\varepsilon)],$$

$$F(a,b)=\frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix}\int_{0}^{2\pi}\overline{R}(\theta,a,b,0,0)\mathrm{d}\theta\\ \int_{0}^{2\pi}\overline{W}_{1}(\theta,a,b,0,0)\mathrm{d}\theta\end{pmatrix},$$

于是注意到(3.3)、(3.6)与(3.7)可知成立

定理 3.2 设(3.2)成立，且 $f(x,0)=0$. 如果存在 $a_{0}>0$, $b_{0}\in R^{2}$ 使

$$F(a_{0},b_{0})=0,\det DF(a_{0},b_{0})\neq 0,$$

则当 $\varepsilon\neq 0$ 充分小时(3.1)存在周期接近 2π 的周期解

$$x(t,\varepsilon)=(y(t,\varepsilon),u(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon))=x_{0}(t)+O(\varepsilon),$$

其中 $x_{0}(t)=(a_{0}\cos t,-a_{0}\sin t,a_{0}e^{mJt}b_{0},0)$.

3.2 四维系统的局部周期轨道

作为对定理 3.1 的应用，我们来讨论四维系统

$$\dot{x} = Jx + X(x,y,\varepsilon), \quad \dot{y} = mJy + Y(x,y,\varepsilon) \tag{3.12}$$

的周期解的局部分支，其中 $\varepsilon \in R, x, y \in R^2$，且

$$\begin{aligned} X(x,y,\varepsilon) &= \varepsilon A_1 x + f_k(x,y) + h.o.t, \\ Y(x,y,\varepsilon) &= \varepsilon A_2 y + g_k(x,y) + h.o.t, \end{aligned} \tag{3.13}$$

其中 f_k, g_k 为 x, y 的 k 次齐次式，$k \geqslant 2$，而 $h.o.t$ 表示阶数不低于 $O(|\varepsilon| \cdot |x,y|^2 + |x,y|^{k+1})$ 的项.

对(3.12)引入变换 $x = p(\cos\theta, -\sin\theta)^T \equiv ph(\theta), y = pq$ 可得

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= 1 + O(|\varepsilon| + |p|^{k-1}), \\ \dot{p} &= p[R_2(\theta,p,q,\varepsilon) + O(s)], \\ \dot{q} &= mJq + [\varepsilon A_2 q + p^{k-1} g_k(h(\theta), q)] \\ &\quad - qR_2(\theta,p,q,\varepsilon) + O(s), \end{aligned}$$

其中

$$R_2 = [\varepsilon A_1 h(\theta) + p^{k-1} f_k(h(\theta), q)] \cdot h(\theta), s = \varepsilon^2 + p\varepsilon + p^k.$$

于是式(3.4)中 R_1 与 Q 成为

$$\begin{aligned} R_1 &= p[R_2(\theta,p,q,\varepsilon) + O(s)], \\ Q &= \varepsilon A_2 q + p^{k-1} g_k(h(\theta), q) - qR_2 + O(s). \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (A_1 h(\theta)) \cdot h(\theta) \mathrm{d}\theta, \\ B_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-mJ\theta} A_2 e^{mJ\theta} \mathrm{d}\theta, \\ P_m(b) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k(h(\theta), e^{mJ\theta} b) \cdot h(\theta) \mathrm{d}\theta, \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$Q_m(b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-mJ\theta} g_k(h(\theta), e^{mJ\theta}b)\mathrm{d}\theta.$$

直接计算可知 $\sigma = \frac{1}{2}\mathrm{tr}A_1$，且若设 $A_2 = (a_{ij})$，则

$$B_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{12} - a_{21} \\ a_{21} - a_{12} & a_{11} + a_{22} \end{pmatrix}.$$

于是由(3.9)、(3.11)及(2.22)易知

$$G(a, b, \varepsilon) = (aG_1(a, b, \varepsilon), G_2(a, b, \varepsilon))^T, \quad (3.15)$$

其中

$$G_1 = \sigma\varepsilon + a^{k-1}P_m(b) + O(\varepsilon^2 + a\varepsilon + a^k),$$

$$G_2 = \varepsilon B_0 b + a^{k-1}Q_m(b) - b[\sigma\varepsilon + a^{k-1}P_m(b)]$$
$$+ O(\varepsilon^2 + a\varepsilon + a^k).$$

由此可证([44])

定理 3.3 设 $\sigma \neq 0$，记 $H_m(b) = Q_m(b) - \frac{1}{\sigma}P_m(b)B_0 b$.

(i) 若对一切 $b \in R^2$，有 $H_m(b) \neq 0$，则(3.12)不存在满足

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{|y(t, \varepsilon)|}{|x(t, \varepsilon)|} < \infty \quad (3.16)$$

的周期接近 2π 的周期解.

(ii) 若存在 $b_0 \in R^2$，使

$$P_m(b_0) \neq 0, H_m(b_0) = 0, \det DH_m(b_0) \neq 0, \quad (3.17)$$

则当 k 为偶数时，对一切充分小的 $\varepsilon \neq 0$，(3.12)有满足

$$(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) = \left(\frac{-\sigma\varepsilon}{P_m(b_0)}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot (\cos t, -\sin t, e^{mJt}b_0)$$
$$+ o\left(|\varepsilon|^{\frac{1}{k-1}}\right) \quad (3.18)$$

的周期接近 2π 的周期解，当 k 为奇数时对满足 $\sigma P_m(b_0)\varepsilon<0$ 的 ε，(3.12)有满足(3.18)的周期解. 此外，在不计时间位移的意义下满足(3.18) 的周期解是惟一存在的.

证明 由(3.15)知在 $a>0$ 上 $G=0$ 等价于 $G_1=0, G_2=0$，由隐函数定理，$G_1=0$ 有惟一解

$$\varepsilon=-\frac{1}{\sigma}P_m(b)a^{k-1}+O(a^k)\equiv\varepsilon^*(a,b), \qquad (3.19)$$

代入 G_2 可得

$$G_2(a,b,\varepsilon^*)=a^{k-1}[H_m(b)+O(a)]\equiv a^{k-1}G_2^*(a,b),$$

由此即知结论(i)成立. 下证结论(ii)，由条件(3.17)，存在函数 $b^*(a)=b_0+O(a)$ 使 $G_2^*(a,b^*)=0$，将 b^* 代入(3.19)中可得 $\varepsilon=-\frac{1}{\sigma}P_m(b_0)a^{k-1}+O(a^k)$，其反函数为

$$a=\left(\frac{-\sigma\varepsilon}{P_m(b_0)}\right)^{\frac{1}{k-1}}(1+o(1))\equiv a^*(\varepsilon), \qquad (3.20)$$

若 k 为偶函数，则对一切充分小的 $\varepsilon\neq0$，$a^*(\varepsilon)$ 有定义，故 G 有根 $(a,b)=(a^*(\varepsilon),b^*(a^*))$，因此(3.12)有满足(3.18)的周期解，且由分支函数的定义知，在不计时间位移的意义下，这种周期解是惟一的. 若 k 为奇数，则函数 a^* 只对满足 $\sigma P_m(b_0)\varepsilon<0$ 的 ε 有定义，从而只在此时(3.12)才有满足(3.18)的周期解. 证毕.

注 3.3 若有 N 个 b_0 满足(3.17)且 $P_m(b)$ 在这些 b_0 处同号，则对一切充分小的 $\varepsilon\neq0$(当 k 为偶数时)或位于 $\varepsilon=0$ 某一侧的 ε(当 k 为奇数时) (3.12)有 N 个振幅不同的周期解，即(3.12)在原点附近有 N 个闭轨.

一般情况下计算 $P_m(b)$ 与 $H_m(b)$ 是不容易的，下面我们利用规范型，并计算 $P_m(b)$ 与 $H_m(b)$，从而讨论(3.12)的闭轨个数.

首先考虑 $m=2$ 的情况，由规范型定理，当 $\varepsilon=0$ 时(3.12)有

下述(截尾)规范型

$$\dot{x} = Jx + B_1(x_1y_1 + x_2y_2, x_1y_2 - x_2y_1)^T + B_2x|x|^2,$$
$$\dot{y} = 2Jy + B_3(x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)^T + B_5y|y|^2 + B_4y|x|^2, \tag{3.21}$$

其中

$$B_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}, i = 1, \cdots, 5.$$

此时由(3.14)知

$$P_2(b) = \alpha_1 b_1 + \beta_1 b_2, Q_2(b) = B_3(1,0)^T = (\alpha_3, -\beta_3)^T.$$

记

$$\frac{1}{\sigma}B_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \Delta = \alpha_1(\alpha_3\alpha + \beta_3\beta) + \beta_1(\beta\alpha_3 - \alpha\beta_3),$$

则 $H_2(b)=0$ 等价于

$$P_2(b)(\alpha b_1 + \beta b_2) = \alpha_3, P_2(b)(-\beta b_1 + \alpha b_2) = -\beta_3. \tag{3.22}$$

往证

命题 3.1 设 $m=2, \sigma \neq 0$, 则下列结论成立

(i) 若 $\Delta<0$,则对一切充分小的 $\varepsilon \neq 0$, (3.12)在原点附近没有满足(3.16)且周期接近 2π 的闭轨.

(ii) 若 $\Delta>0$, 则对一切充分小的 $\varepsilon \neq 0$, (3.12)在原点附近有惟一的满足(3.16)且周期接近 2π 的闭轨.

证明 设 $\Delta \neq 0$, 不是一般性可设 $\alpha_3\alpha + \beta_3\beta \neq 0$, 于是(3.22)中两式相比可得

$$b_2 = b_1(\beta\alpha_3 - \alpha\beta_3)/(\alpha_3\alpha + \beta_3\beta),$$

代入(3.22)第一式可得

$$b_1^2 = \frac{(\alpha_3 \alpha + \beta_3 \alpha)^2}{\Delta(\alpha^2 + \beta^2)} \equiv M.$$

若 $\Delta<0$,则 $H_2(b)=0$ 无解，从而结论(i)成立.若 $\Delta>0$，则由上式知 $H_2(b)=0$ 恰有两个解 $b=\pm b_0$，其中 $b_0=(\sqrt{M},\sqrt{M}(\beta\alpha_3-\alpha\beta_3)/(\alpha_3\alpha+\beta_3\beta))^T$.注意到

$$P_2(b_0) = \frac{\Delta\sqrt{M}}{\alpha_3\alpha + \beta_3\beta} \neq 0,$$

由定理 3.3，当 $\varepsilon\neq0$ 充分小时(3.12)有满足

$$(x_\pm(t,\varepsilon), y_\pm(t,\varepsilon)) = \frac{-\sigma\varepsilon}{P_2(\pm b_0)}(\cos t, -\sin t, \pm e^{2Jt}b_0) + O(\varepsilon^2)$$

的周期解.由于 $P_2(-b_0)=-P_2(b_0)$,因此相应于(3.20)的两个函数 $a_\pm^*(\varepsilon)=\dfrac{-\sigma\varepsilon}{P_2(\pm b_0)}+O(\varepsilon^2)$必异号:$a_+^*(\varepsilon)a_-^*(\varepsilon)<0(\varepsilon\neq0)$,因此周期解$(x_+(t,\varepsilon),y_+(t,\varepsilon))$与$(x_-(t,\varepsilon),y_-(t,\varepsilon))$必对应于同一条闭轨，即得结论(ii).证毕.

对 $m\geqslant4$ 的情况，当 $\varepsilon=0$ 时(3.12)有规范型

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Jx + B_1 x|x|^2 + B_2 x|y|^2, \\ \dot{y} &= mJy + B_3 y|y|^2 + B_4 y|x|^2, \end{aligned} \tag{3.23}$$

其中 B_i 同前，此时易算出

$$P_m(b) = \alpha_1 + \alpha_2|b|^2, Q_m(b) = \beta_3|b|^2 b + B_4 b,$$

从而 $H_m(b)=0$ 等价于下列两式

$$\begin{aligned} &[(\alpha_3 - \alpha_2\alpha)b_1 + (\beta_3 - \alpha_2\beta)b_2]|b|^2 \\ &\quad = -(\alpha_4 - \alpha_1\alpha)b_1 - (\beta_4 - \alpha_1\beta)b_2, \end{aligned}$$

$$[(-\beta_3+\alpha_2\beta)b_1+(\alpha_3-\alpha_2\alpha)b_2]|b|^2$$
$$=(\beta_4-\alpha_1\beta)b_1-(\alpha_4-\alpha_1\alpha)b_2.$$

从上面第一式解出$|b|^2$,代入第二式，经整理得

$$(b_1^2+b_2^2)\Delta_1=0,$$

$$\Delta_1=(\alpha_4-\alpha_1\alpha)(\beta_3-\alpha_2\beta)-(\alpha_3-\alpha_2\alpha)(\beta_4-\alpha_1\beta),$$

因此由定理 3.3 即知成立

命题 3.2 设 $m\geqslant4,\sigma\neq0$,又设 $\alpha_1\neq0,\Delta_1\neq0$,则当 $\varepsilon\neq0$ 充分小且使 $\sigma\alpha_1\varepsilon<0$ 时方程(3.12)在原点附近有惟一周期接近 2π 的闭轨.

对 $m=3$,当 $\varepsilon=0$ 时(3.12)的规范型为

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Jx+B_1x|x|^2+B_2x|y|^2+C_1(x)y,\\ \dot{y}&=3Jy+B_3y|y|^2+B_4y|x|^2+C_2(x)x,\end{aligned}\tag{3.24}$$

其中 B_i 同前,

$$C_1(x)=\begin{pmatrix}d_1u_1+d_2u_2 & d_1u_2-d_2u_1\\ d_2u_1-d_1u_2 & d_1u_1+d_2u_2\end{pmatrix},$$

$$C_2(x)=\begin{pmatrix}d_3u_3 & -d_4u_4\\ d_4u_3 & d_3u_4\end{pmatrix},$$

$$u_1=x_1^2-x_2^2,u_2=2x_1x_2,u_3=x_1^2-3x_2^2,u_4=3x_1^2-x_2^2,$$

d_i 为常数，经计算知

$$P_3(b)=\alpha_1+\alpha_2|b|^2+\frac{1}{4}[(3d_1+d_2)b_1+(d_2-d_1)b_2],$$

$$Q_3(b)=(B_3|b|^2+B_4)b+(d_3,d_4)^T,$$

因此 $H_3(b)$为 b 的三次式.

当 $m=1$ 时，可求得(3.12)($\varepsilon=0$)的规范型为

$$\dot{x}=Jx+B_1x|x|^2+B_2x|y|^2+B_3y|x|^2+B_4y|y|^2$$

$$+C_1(y)x+C_2(x)y,$$

$$\dot{y}=Jy+B_5y|y|^2+B_6y|x|^2+B_7x|y|^2+B_8x|x|^2$$

$$+C_3(x)y+C_4(y)x,$$

其中 B_i 的形式同前，而对 $z=(z_1,z_2)$有

$$C_i(z)=\begin{pmatrix} d_i(z_1^2-z_2^2)+2e_iz_1z_2 & 2d_iz_1z_2-e_i(z_1^2-z_2^2) \\ -2d_iz_1z_2+e_i(z_1^2-z_2^2) & d_i(z_1^2-z_2^2)+2e_iz_1z_2 \end{pmatrix},$$

经计算可得

$$P_1(b)=\alpha_1+\alpha_2|b|^2+\alpha_3b_1+\beta_3b_2+|b|^2(\alpha_4b_1+\beta_4b_2),$$

$$Q_1(b)=B_5|b|^2b+B_6b+(B_7|b|^2+B_8)(1,0)^T, \tag{3.25}$$

此时 $H_1(b)$为 b 的四次式.

由于 $H_3(b)$与 $H_1(b)$较为复杂，我们不再进行一般性的讨论，下面我们对 $m=1$ 的情况讨论一个具体方程的局部闭轨的个数.

考虑方程

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Jx+\varepsilon x-3x|x|^2+y|y|^2,\\ \dot{y}&=Jy+\varepsilon y-3y|y|^2+x|x|^2,\end{aligned} \tag{3.26}$$

对(3.26)利用公式(3.25)易知

$$P_1(b)=-3+b_1|b|^2, Q_1(b)=-3|b|^2b+(1,0)^T,$$

进而有 $H_1(b)=Q_1(b)-P_1(b)b$,因此可知 $H_1(b)=0$ 等价于

$$b_2 = 0, \varphi(b_1) \equiv (b_1^2 - 1)(b_1^2 + 3b_1 + 1) = 0,$$

易知函数 $\varphi(b_1)$在$(-\infty,1]$上有 4 个单根，且使 $P_1(b)<0$，故由定理 3.3，并考虑到方程(3.26)本身的对称性可知当 $\varepsilon>0$ 充分小时(3.26)有 4 个局部闭轨，而当 $\varepsilon<0$ 时无局部闭轨.

最后我们指出，如果当 $\varepsilon=0$ 时 (3.12)已具有(3.21)、(3.23)或(3.24)的形式，我们可以引入尺度变换$(x,y)\to\varepsilon(x,y)$，或$(x,y)\to\sqrt{|\varepsilon|}(x,y)$，然后引入变换

$$x = p(\cos\theta, -\sin\theta), y = e^{mJ\theta}w,$$

并利用定理 3.2 的方法来讨论闭轨的个数及其分支. 此外由定理 2.1 知，若 $m\geqslant 2, \alpha\neq 0$，且(3.12)为解析系统，则当 $\varepsilon\neq 0$ 充分小时(3.12)在原点附近至多有一个周期接近 $2\pi/|m|$的闭轨.

§4 周期解分支的初等方法

本节用较初等的分析方法来建立分支函数并用来讨论周期系统与自治系统小振幅周期解的分支.

4.1 周期扰动系统

考虑 n 维周期系统

$$\dot{x} = Ax + f(t,x,\varepsilon), \tag{4.1}$$

其中 $\varepsilon\in R^m, m\geqslant 1, x\in R^n, n\geqslant 1, A$ 为 n 阶常矩阵，f 为 C^r 向量函数，$r\geqslant 1$，并且满足

$$f(t,x,\varepsilon) = f(t+T,x,\varepsilon), f(t,0,0) = 0,$$

$$f_x(t,0,0) = 0, \tag{4.2}$$

问题是研究当 ε 充分小时方程(4.1)在 $x=0$ 附近的 T 周期解的分支. 为此，先给出一个预备引理.

设 E_0 表示矩阵 $e^{AT}-I_n$ 的零空间，即

$$E_0 = \{x \in R^n \mid (e^{AT} - I_n)x = 0\},$$

又设 E_1 为 E_0 的一个补空间且使成立 $R^n = E_0 \oplus E_1$(直和), 则由矩阵知识知存在 n 阶矩阵 P_0 与 P_1,使有 $P_i^2 = P_i, P_iR^n = E_i, P_1 = I_n - P_0$, 即 P_i 为投影矩阵, $i = 0, 1$. 下列引理是由 Cronin([18])给出的.

引理 4.1 存在非奇异矩阵 H,使有 $H(e^{AT} - I_n) = P_1$, $P_0He^{AT} = P_0H$.

证明 不失一般性,设 A 为 Jordan 块,即

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \equiv B_1, \quad \lambda \in R,$$

或

$$A = \begin{pmatrix} D & I_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & I_2 \\ & & & & D \end{pmatrix} \equiv B_2, \quad D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in R.$$

若 $A = B_1$, 且 $\lambda \neq 0$, 则注意到此时 $P_1 = I_n$, 可取 $H = (e^{B_1T} - I_n)^{-1}$.

如果 $\lambda = 0$, 则

则

$$e^{B_1T}-I_n=\begin{pmatrix}0 & T & \cdots & \cdots & \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}\\ & \ddots & \ddots & & \vdots\\ & & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & & \ddots & T\\ & & & & 0\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}0 & H_1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

易知 $P_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $P_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-1}\end{pmatrix}$,因此可取 $H=\begin{pmatrix}0 & 1\\ H_1^{-1} & 0\end{pmatrix}$.

对 $A=B_2$ 的情况，如果 $\alpha\neq0$ 或 $\alpha=0,\beta\neq\frac{2k\pi}{T}$($k$ 为整数)，则同上可取 $H=P_1(e^{B_2T}-I_n)^{-1}$. 如果 $\alpha=0$ 且存在整数 k 使有 $\beta=\frac{2k\pi}{T}$,则 $P_0=\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $P_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-2}\end{pmatrix}$,因此可取

$$H=\begin{pmatrix}0 & I_2\\ H_2^{-1} & 0\end{pmatrix},H_2=\begin{pmatrix}TI_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{T^{m-1}}{(m-1)!}I_2\\ & \ddots & & & \vdots\\ & & \ddots & & \vdots\\ & & & \ddots & \vdots\\ & & & & TI_2\end{pmatrix}$$

其中 $m=\frac{n}{2}$,于是引理的第一式得证. 第二式由第一式即得. 证毕.

由上述证明易见,如果 A 具有形式

$$A=\mathrm{diag}(0,B),\det(e^{BT}-I_{n-1})\neq0,$$

则

$$P_0=\mathrm{diag}(1,0),\quad H=\mathrm{diag}(1,(e^{BT}-I_{n-1})^{-1}).\quad(4.3)$$

如果

$$A=\operatorname{diag}\left(\frac{2k\pi}{T}J,B\right),\quad J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\det(e^{BT}-I_{n-2})\neq 0,$$

则

$$P_0=\operatorname{diag}(I_2,0),\quad H=\operatorname{diag}(I_2,(e^{BT}-I_{n-2})^{-1}).$$

现设 $x(t,x_0,\varepsilon)$为(4.1)满足 $x(0,x_0,\varepsilon)=x_0$ 的解,由常数变易公式,该解满足

$$x(t,x_0,\varepsilon)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-s)}f(s,x(s,x_0,\varepsilon),\varepsilon)\mathrm{d}s,\tag{4.4}$$

因此,$x(t,x_0,\varepsilon)$是调和解当且仅当

$$(e^{AT}-I_n)x_0+e^{AT}\int_0^T e^{-At}f(t,x(t,x_0,\varepsilon)\varepsilon)\mathrm{d}t=0.$$

由引理 4.1, 上式等价于

$$P_1x_0+He^{AT}\int_0^T e^{-At}f(t,x(t,x_0,\varepsilon),\varepsilon)\mathrm{d}t=0.\tag{4.5}$$

记 $a=P_0x_0,b=P_1x_0$,则 $a\in E_0,b\in E_1$ 且 $a+b=x_0$,又记

$$F(a,b,\varepsilon)=\int_0^T e^{-At}f(t,x(t,a+b,\varepsilon),\varepsilon)\mathrm{d}t.\tag{4.6}$$

应用引理 4.1,可知(4.5)等价于

$$P_0HF(a,b,\varepsilon)=0,\quad b+P_1He^{AT}F(a,b,\varepsilon)=0.\tag{4.7}$$

由条件(4.2)可证 $F(0,0,0)=0,F_b(0,0,0)=0$. 对(4.7)的第二式应用隐函数定理知,存在惟一的 C^r 函数 $b^*(a,\varepsilon)=O(|\varepsilon|+|a|^2)$,使

$$b^*(a,\varepsilon)+P_1He^{AT}F(a,b^*(a,\varepsilon),\varepsilon)=0.$$

令

$$G(a,\varepsilon) = P_0 HF(a, b^*(a,\varepsilon),\varepsilon), \tag{4.8}$$

则(4.7)有解当且仅当 $G(a,\varepsilon)=0$ 有解,于是我们证明了下述定理.

定理 4.1 设(4.2)成立,则存在 $\varepsilon_0>0$ 使对一切 $|x_0|<\varepsilon_0$, $|\varepsilon|<\varepsilon_0$, $x(t,x_0,\varepsilon)$ 是(4.1)的调和解当且仅当 $x_0=a+b^*(a,\varepsilon)$ 且 $G(a,\varepsilon)=0$.

我们称由(4.8)给出的 C^r 函数 G 为(4.1)的分支函数 . 下面对 G 的一些主项做出计算,并给出调和解存在的具体条件 .

设 f 有下述形式

$$f(t,x,\varepsilon) = f_k(t,x) + f_1(t,\varepsilon)\varepsilon + A_1(t)x\langle\alpha,\varepsilon\rangle + O(|x|^{k+1} + |\varepsilon|\cdot|x|^2), \tag{4.9}$$

其中 $\alpha\in R^m$ 为一非零常向量, $\langle\alpha,\varepsilon\rangle$ 表示向量的内积, f_k 为 x 的 k 为齐次式, $k=2$ 或 3. 由(4.4),(4.6)与(4.9)知

$$x(t,x_0,\varepsilon) = e^{AT}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f_1(s,\varepsilon)\mathrm{d}s + O(|x_0|\cdot|\varepsilon| + |x_0|^2),$$

$$F(a,b,\varepsilon) = \int_0^T e^{-At} f_k(t, e^{At}(a+b))\mathrm{d}t + \int_0^T e^{-At} f_1(t,0)\varepsilon \mathrm{d}t + O(|a,b|^{k+1} + |\varepsilon|\cdot|a,b| + \varepsilon^2). \tag{4.10}$$

如果 $f_1=0$, 则有

$$F(a,b,\varepsilon) = \int_0^T e^{-At} f_k(t, e^{At}(a+b))\mathrm{d}t + \langle\alpha,\varepsilon\rangle \cdot \int_0^T e^{-At} A_1(t) e^{At}\mathrm{d}t(a+b) + O(|x_0|^{k+1}$$

$$+|\varepsilon|\cdot|x_0|^2+|\varepsilon|^2\cdot|x_0|). \qquad (4.11)$$

利用(4.10)与(4.11)可给出调和解分支的具体条件.

例如,设

$$A = \mathrm{diag}(0,B), \quad 0 \in R, \quad \det(e^{BT} - I_{n-1}) \neq 0, \qquad (4.12)$$

则由(4.3)与(4.8)可知

$$G(a,\varepsilon) = (G_1(a_1,\varepsilon),0), \quad a = (a_1,0), \quad G_1, a_1 \in R.$$

利用(4.8)与(4.10)又可知

$$G_1(a_1,\varepsilon) = \langle \beta, \varepsilon \rangle + \beta_k a_1^k + O(|\varepsilon|^2 + |\varepsilon a_1| + |a_1|^{k+1}), \qquad (4.13)$$

其中 $\beta_k a_1^k$ 为 $\int_0^T f_k(t, e^{At}a)\mathrm{d}t$ 的第一个分量,$\beta \in R^m$ 为矩阵 $\int_0^T f_1(t,0)\mathrm{d}t$ 的第一行 .

若进一步设 $m=1, k=2, \beta\beta_2 \neq 0$,则(4.13)可写为

$$G_1(a_1,\varepsilon) = \beta\varepsilon + \beta_2 a_1^2 + O(\varepsilon^2 + |\varepsilon a_1| + |a_1|^3),$$

由此知,当 $\varepsilon\beta\beta_2 > 0(< 0)$时 G_1 关于 a_1 没有根(有两个根 $a_1 = \pm\sqrt{-\beta\beta_2^{-1}\varepsilon} + O(\varepsilon)$,即在 $\varepsilon = 0$ 附近出现周期解的鞍结点型分支 .

如果 $f_1 = 0$,则由(4.8)与(4.11)易见

$$G_1(a_1,\varepsilon) = a_1[\delta\langle \alpha, \varepsilon \rangle + \beta_k a_1^{k-1} + O(|\varepsilon|^2 + |\varepsilon a_1| + |a_1|^k)],$$

其中 δ 为向量 $\int_0^T e^{-At}A_1(t)e^{At}(1,0,\cdots,0)^T\mathrm{d}t$ 的第一个分量,当 $\delta\beta_k \neq 0$ 时可出现调和解的 transcitical 分支($k=2$)或 pitchfork 分支($k=3$).

应用定理 4.1 还可进一步证明,如果(4.12)成立,且 $f(t,$

$x,0)$的第一个分量 $f_1(t,x,0)$满足：对 $x=(a_1,0)+|a_1|^2, a_1\in$ $\boldsymbol{R}$ 有

$$f_1(t,x,0) = f_1^*(t)a_1^l + f_2^*(t)a_1^k + O(a_1^{k+1}), \quad k \geqslant 2, l \geqslant 1,$$

$$\int_0^T f_1^*(t)\mathrm{d}t = 0, \quad M \equiv \int_0^T f_2^*(t)\mathrm{d}t \neq 0,$$

则存在 ε_0，使当 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 时方程(4.1)在 $x=0$ 的 ε_0 邻域内至多有 k 个调和解.此外,可适当选取扰动项,使出现 k 个调和解.

事实上,利用(4.4)及 $b^*(a,0)=O(|a|^2)$知

$$\begin{aligned} x(t,a+b^*(a,0),0) &= e^{At}(a+b^*(a,0)) + O(|a|^2) \\ &= (a_1,0)^T + O(|a_1|^2), \end{aligned}$$

由(4.3),(4.6),(4.8)及所设条件知 $G(a,0)=(Ma_1^k(1+O(a_1)),0)^T$,因此由 Rolle 定理即知所述结论成立.

利用以上结果易见，对任何关于 t 为 2π 周期的 C^3 函数 $f(t,x,y,\varepsilon)$与 $g(t,x,y,\varepsilon)$,当$|\varepsilon|$充分小时方程

$$\dot{x} = (1+2\sin t)x^3 + (\cos t+\sin t)x^2 + y^2 + \varepsilon f(t,x,y,\varepsilon),$$

$$\dot{y} = y + \varepsilon g(t,x,y,\varepsilon)$$

在原点邻域内至多有三个 2π 周期解.

4.2 自治扰动系统

考虑 n 维自治系统

$$\dot{x} = f(x,\varepsilon), \tag{4.14}$$

其中 $x\in R^n, \varepsilon\in R, f\in C^r, r\geqslant 3$.设当 ε 充分小时

$$f(0,\varepsilon) = 0,$$

$$A(\varepsilon) = f_x(0,\varepsilon) = A_0 + A_1\varepsilon + O(\varepsilon^2), \tag{4.15}$$

且存在 $k\geqslant 1$ 使

$$A_0 = \mathrm{diag}(B, C), \quad B = \begin{pmatrix} J & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & & J \end{pmatrix}_{2k}, \qquad (4.16)$$

其中 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 如果(4.14)有 $T(\varepsilon)$周期解 $x(t, \varepsilon)$且 $T(0) = 2\pi, x(t, 0) = 0$,则 $x\left(\frac{T(\varepsilon)}{2\pi}t, \varepsilon\right)$是下列方程

$$\dot{x} = \frac{T(\varepsilon)}{2\pi} f(x, \varepsilon) \qquad (4.17)$$

的 2π 周期解 . 于是寻求(4.14)的周期接近 2π 的周期解化为寻求(4.17)的 2π 周期解,其中 $T(\varepsilon)$待定. 设 $T(\varepsilon) = 2\pi(1+\sigma)$,又设

$$f(x, \varepsilon) = A(\varepsilon)x + f_2(x, \varepsilon) + f_3(x, \varepsilon) + o(|x|^3),$$

此处 f_j 关于 x 为 j 次齐次式, $j = 2, 3$,则(4.17)可写为

$$\begin{aligned} \dot{x} = & (1+\sigma)A(\varepsilon)x + (1+\sigma)f_2(x, \varepsilon) \\ & + (1+\sigma)f_3(x, \varepsilon) + o(|x|^3), \end{aligned} \qquad (4.18)$$

其中(ε, σ)为小参数 .

与前面类似,设 E_0 为 $e^{2\pi A_0} - I_n$ 的零空间, E_1 为其正交补空间,使 $R^n = E_0 \oplus E_1$, 则由引理 4.1,存在投影矩阵 P_0, P_1 可逆矩阵 H,使

$$H(e^{2\pi A_0} - I_n) = P_1, \quad P_0 H e^{2\pi A_0} = P_0 H. \qquad (4.19)$$

设

$$x(t, h, \varepsilon, \sigma) = \sum_{j=1}^{3} x_j(t, h, \varepsilon, \sigma) + o(|h|^3) \qquad (4.20)$$

为(4.18)的以 $h = x(0, h, \varepsilon, \sigma)$为初值的解,其中 x_j 关于 h 为 j

次齐次式.显然

$$x_1(0,h,\varepsilon,\sigma) = h, \quad x_j(0,h,\varepsilon,\sigma) = 0,$$
$$j = 2,3. \tag{4.21}$$

将(4.20)代入(4.18)且利用(4.21)易求出

$$x_1 = e^{(1+\sigma)At}h \equiv x_1(t),$$

$$x_2 = (1+\sigma)e^{(1+\sigma)At}\int_0^t e^{-(1+\sigma)As}f_2(x_1(s),\varepsilon)\mathrm{d}s \equiv x_2(t),$$

$$x_3 = (1+\sigma)e^{(1+\sigma)At}\int_0^t e^{-(1+\sigma)As}[f_3(x_1(s),\varepsilon) \tag{4.22}$$
$$+ f_{2x}(x_1(s),\varepsilon)x_2(s)]\mathrm{d}s,$$

令 $v_j(h) = v_j(h,\varepsilon,\sigma) = x_j(2\pi,h,\varepsilon,\sigma)$, $Q(\varepsilon,\sigma) = e^{2\pi(1+\sigma)A} - e^{2\pi A_0}$,则 $x(t,h,\varepsilon,\sigma)$为 2π 周期的当且仅当

$$(e^{2\pi A_0} - I_n)h + Q(\varepsilon,\sigma)h + v_2(h) + v_3(h) + o(|h|^3) = 0,$$

由(4.19),上式等价于

$$P_1 h + HQ(\varepsilon,\sigma)h + H[v_2(h) + v_3(h)] + o(|h|^3)$$
$$= 0. \tag{4.23}$$

令 $a = P_0 h$, $b = P_1 h = h - a$,由(4.19)易知(4.23) 等价于方程组

$$P_0 HQ(\varepsilon,\sigma)h + P_0 H[v_2(h) + v_3(h)]$$
$$+ P_0[o(|h|^3)] = 0, \tag{4.24}$$

$$b + P_1 HQ(\varepsilon,\sigma)h + P_1 H[v_2(h) + v_3(h)]$$
$$+ P_1[o(|h|^3)] = 0, \tag{4.25}$$

对(4.25)应用隐函数定理可解得 $b = b^*(\varepsilon,\sigma,a)$.设

$$b^* = b_1(\varepsilon,\sigma,a) + b_2(\varepsilon,\sigma,a) + b_3(\varepsilon,\sigma,a) + o(|a|^3),$$

其中 b_j 关于 a 为 j 次齐次式, $j=1,2,3$. 注意到

$$v_2(a+b^*)=v_2(a)+v_{2a}(a)(b_1+b_2)$$
$$+\frac{1}{2}v_{2aa}(a)b_1^2+o(|a|^3),$$
$$v_3(a+b^*)=v_3(a)+o(|a|^3),$$

利用(4.25)可求得

$$b_1=-[I_n+P_1HQ(\varepsilon,\sigma)]^{-1}P_1HQ(\varepsilon,\sigma)a,$$
$$b_2=-[I_n+P_1HQ(\varepsilon,\sigma)]^{-1}P_1H[v_2(a)+v_{2a}(a)b_1$$
$$+\frac{1}{2}v_{2aa}(a)b_1^2],$$
$$b_3=-[I_n+P_1HQ(\varepsilon,\sigma)]^{-1}P_1H[v_3(a)$$
$$+v_{2a}(a)b_2+o(|a|^3)], \tag{4.26}$$

将 $b=b^*$ 代入(4.24)可得

$$G(a,\varepsilon,\sigma)\equiv\sum_{j=1}^{3}G_j(a,\varepsilon,\sigma)+P_0[o(|a|^3)]$$
$$=0, \tag{4.27}$$

其中

$$G_1=P_0HQ(\varepsilon,\sigma)(a+b_1),$$
$$G_2=P_0H[Q(\varepsilon,\sigma)b_2+v_2(a)+v_{2a}(a)b_1+\frac{1}{2}v_{2aa}(a)b_1^2],$$
$$G_3=P_0H[Q(\varepsilon,\sigma)b_3+v_{2a}(a)b_2+v_3(a)], \tag{4.28}$$

对线性方程 $\dot{x}=(1+\sigma)A(\varepsilon)x=(1+\sigma)A_0x+(1+\sigma)(A(\varepsilon)-A_0)x$ 两次应用常数变易公式易知

$$Q(\varepsilon,\sigma)=Q_0(\sigma)+Q_1(\sigma)\varepsilon+O(\varepsilon^2), \tag{4.29}$$

其中

$$Q_0(\sigma) = e^{2\pi(1+\sigma)A_0} - e^{2\pi A_0},$$

$$Q_1(\sigma) = (1+\sigma)e^{2\pi(1+\sigma)A_0}\int_0^{2\pi} e^{-(1+\sigma)A_0 t}A_1 e^{(1+\sigma)A_0 t}\mathrm{d}t,$$

于是由(4.26),(4.29)与(4.22)知

$$b_1(\varepsilon,\sigma,a) = R_{10}(\sigma)a + R_{11}(\sigma)a\varepsilon + O(a\varepsilon^2),$$

$$b_2(\varepsilon,\sigma,a) = R_{20}(a) + O(|a|^2(|\varepsilon|+|\sigma|)),$$

其中

$$R_{10} = -(I_n + P_1HQ_0)^{-1}P_1HQ_0,$$

$$R_{11} = -(I_n + P_1HQ_0)^{-1}P_1HQ_1(I_n + P_1HQ_0)^{-1},$$

$$R_{20} = -P_1He^{2\pi A_0}\int_0^{2\pi} e^{-A_0 s}f_2(e^{A_0 s}a,0)\mathrm{d}s.$$

从而由(4.28),(4.29)与(4.19),我们有

$$G_1(a,\varepsilon,\sigma) = G_{10}(\sigma)a + G_{11}(\sigma)a\varepsilon + O(a\varepsilon^2),$$

$$G_2(a,\varepsilon,\sigma) = G_{20}(a,\sigma) + G_{21}(\sigma)\varepsilon + O(|a|^2|\varepsilon|(|\varepsilon|+|\sigma|)),$$

$$G_3(a,\varepsilon,\sigma) = G_{30}(a) + O(|a|^3|\varepsilon|(|\varepsilon|+|\sigma|)), \tag{4.30}$$

其中

$$G_{10}(\sigma) = P_0HQ_0(I_n + P_1HQ_0)^{-1},$$

$$G_{11}(\sigma) = P_0H[Q_1(I_n + R_{10}) + Q_0R_{11}],$$

$$G_{20}(a,0) = P_0 H\int_0^{2\pi} e^{-A_0 T} f_2(e^{A_0 t}a,0)\mathrm{d}t, G_{21}(a) = G_{2\varepsilon}(a,0,0),$$

$$G_{30}(a) = P_0 H\left[\int_0^{2\pi} e^{-A_0 T} f_{2x}(e^{A_0 t}a,0)e^{A_0 t}(R_{20} + g(t))\mathrm{d}t\right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} e^{-A_0 T} f_3(e^{A_0 t}a,0)\mathrm{d}t\right], \tag{4.31}$$

其中

$$g(t) = \int_0^t e^{-A_0 s} f_2(e^{A_0 s}a,0)\mathrm{d}s.$$

于是由(4.27)与(4.30)有

$$G(a,\varepsilon,\sigma) = G_{10}(\sigma)a + G_{11}(\sigma)a\varepsilon + G_{21}(a)\varepsilon + G_{30}(a)$$

$$+ P_0[O(|\varepsilon^2 a| + |a|^2(|\varepsilon\sigma|$$

$$+ |a|^2 + |a\sigma|))], \tag{4.32}$$

综上所述,我们获得下述定理.

定理 4.2 设(4.15)与(4.16)成立,则(4.14)在原点附近有以 $T(\varepsilon)=2\pi(1+\sigma(\varepsilon))=2\pi+o(1)$为周期的周期解 $x(t,\varepsilon)$当且仅当存在函数 $a=a(\varepsilon)=o(1)$使 $G(a(\varepsilon),\varepsilon,\sigma(\varepsilon))=0$.

同样,具有定理 4.2 中所述性质的函数 $G(a,\varepsilon,\sigma)$称为(4.14)的分支函数.展开式(4.32)将在下一节所给出的定理 4.2 的应用中起着关键作用.

本节所给出的定理 4.2 是韩茂安与 Jiang([56])所获得的,而定理 4.1 曾在[106]中出现.

§5 非半单特征值情况下的分支

在第 2 节与第 3 节,我们已对两类退化的 Hopf 分支分别进行了研究,在这里我们利用定理 4.2 进一步讨论第三类退化 Hopf 分支.

5.1 分支方程与闭轨的惟一惟二性条件

我们设(4.16)中的 $n-2k$ 阶矩阵 C 满足

$$\det(e^{2\pi C}-I_{n-2k})\neq 0. \tag{5.1}$$

当 $k\geqslant 2$ 时矩阵 A_0 是非半单的.由引理 4.1 的证明知,此时有 $P_0=\mathrm{diag}(I,\ 0)$, $P_1=\mathrm{diag}(0,\ I_{n-2})$, 且当 $k=1$ 时

$$H=\mathrm{diag}(I,\ (e^{2\pi C}-I_{n-2})^{-1}),$$

当 $k\geqslant 2$ 时

$$H=\mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix}0 & I\\ H_1^{-1} & 0\end{pmatrix}_{2k},\ (e^{2\pi C}-I_{n-2k})^{-1}\right\},$$

其中

$$H_1=\begin{pmatrix}2\pi I & \cdots & \cdots & \cdots & \dfrac{(2\pi)^{k-1}}{(k-1)!}I\\ & \ddots & & & \vdots\\ & & \ddots & & \vdots\\ & & & \ddots & \vdots\\ & & & & 2\pi I\end{pmatrix}_{2k-2},$$

于是对 $k\geqslant 2$ 成立

$$\begin{aligned}P_0H&=\mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix}0 & I\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{2k},\ 0\right\},\\ P_1H&=\mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ H_1^{-1} & 0\end{pmatrix},\ (e^{2\pi C}-I_{n-2k})^{-1}\right\}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

设

$$f_{20}(x)=f_2(x,\ 0)=(f_{21}(x),\ \cdots,f_{2k}(x),\cdots,),$$

其中 $f_{2j}\in R^2$，$j=1,\cdots,k$，则注意到 $a=P_0h=(a_1,0)^T$，$e^{A_0t}a=(e^{Jt}a_1,0)^T$，$a_1\in R^2$，由(4.31)易得

$$G_{20}(a,0)=\int_0^{2\pi}P_0He^{-A_0t}f_2(e^{A_0t}a,0)\mathrm{d}t$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-Jt}f_{2k}(e^{Jt}a,0)\mathrm{d}t,0\right)^T=0, \qquad (5.3)$$

又由(4.29)有

$$Q_1(0)=e^{2\pi A_0}\int_0^{2\pi}e^{-A_0t}A_1e^{A_0t}\mathrm{d}t.$$

设

$$A_1=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1k} & \cdots\\ * & & * & \vdots\\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} & \cdots\\ \vdots & & \vdots & \vdots\end{pmatrix},$$

其中每个 $A_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant k)$均为 2 阶矩阵，由(4.31)，(5.2)与(4.19)有

$$G_{11}(0)a=P_0HQ_1(0)a=P_0H\int_0^{2\pi}e^{-A_0t}A_1e^{A_0t}a\mathrm{d}t$$

$$=\begin{pmatrix}\int_0^{2\pi}e^{-Jt}A_{k1}e^{Jt}a_1\mathrm{d}t\\ 0\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\bar{A}_{k1}a_1\\ 0\end{pmatrix}. \qquad (5.4)$$

注意到 $Q_0(\sigma)=e^{2\pi A_0}(e^{2\pi\sigma A_0}-I_n)$，由(4.19)与(5.2)知

$$P_1HQ_0(\sigma)=\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & e^{2\pi\sigma J}-I\\ 0 & 0\end{pmatrix},0\right), \qquad (5.5)$$

$$P_1HQ_0(\sigma) = \mathrm{diag}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ H_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} e^{2\pi B}(e^{2\pi\sigma B} - I_{2k}),\right.$$

$$\left.(e^{2\pi C} - I_{n-2k})^{-1} e^{2\pi C}(e^{2\pi\sigma C} - I_{n-2k})\right], \qquad (5.6)$$

又易知

$$H_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi}I & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & \frac{1}{2\pi}I \end{pmatrix},$$

因此

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ H_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} e^{2\pi B}(e^{2\pi\sigma B} - I_{2k}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\pi}\Delta & \cdots & * & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \frac{1}{2\pi}\Delta & * \end{pmatrix} \equiv S, \qquad (5.7)$$

其中 $\Delta = e^{2\pi\sigma J} - I$ 从而可知

$$P_1HQ_0(\sigma)a = (S\bar{a}, 0)^T = \left(0, \frac{1}{2\pi}\Delta a_1, 0, \cdots, 0\right)^T, \qquad (5.8)$$

其中 $\bar{a} = (a_1, 0)^T \in R^{2k}$，由(5.6)～(5.8)可得

$$(P_1HQ_0(\sigma))^j a = \begin{pmatrix} S^j\bar{a} \\ 0 \end{pmatrix}, \ j \geqslant 0, \qquad (5.9)$$

由(5.8)及归纳法可证

$$S^j\bar{a} = S(S^{j-1}\bar{a}) = (0,\ *,\ \cdots,\bar{a}_{j+1},\ 0,\cdots,0)^T, \qquad (5.10)$$

其中 $\bar{a}_{j+1} = \left(\frac{1}{2\pi}\Delta\right)^j a_1,\ j=1,\ \cdots,k-1$. 于是由(5.5),(5.9)与(5.10)知

$$P_0HQ_0(\sigma)[P_1HQ_0(\sigma)]^j a = \left(\begin{pmatrix}0 & \Delta\\ 0 & 0\end{pmatrix} S^j\bar{a},\ 0\right)^T$$

$$= \begin{cases} 0, & j \leqslant k-2, \\ ((2\pi)^{1-k}\Delta^k a_1,\ 0)^T, & j = k-1, \end{cases} \qquad (5.11)$$

因此,由(5.11)与(4.31),并注意到 $\Delta = 2\pi\sigma J + O(\sigma^2)$,有

$$G_{10}(\sigma)a = P_0HQ_0(\sigma)\sum_{j\geqslant 0}(-1)^j(P_1HQ_0(\sigma))^j a$$

$$= (-1)^{k-1}(2\pi\sigma^k J^k a_1,\ 0)^T + P_0[O(\sigma^{k+1}a)]. \qquad (5.12)$$

令

$$\begin{aligned} G_{20}(a,\ \sigma) &= (F_2(a_1,\ \sigma),0)^T, \\ G_{30}(a) &= (F_3(a_1),\ 0)^T,\ F_2,\ F_3 \in R^2, \end{aligned} \qquad (5.13)$$

则由(4.32),(5.4)与(5.12)知 $G(a,\ \varepsilon,\ \sigma)=0$ 当且仅当

$$\begin{aligned} &(-1)^{k-1}2\pi\sigma^k J^k a_1 + \bar{A}_{k1}a_1\varepsilon + F_2(a_1,\sigma) + F_3(a_1) \\ &+ O(|a_1|(\sigma^{k+1} + \varepsilon^2 + |\varepsilon\sigma| + |a_1\varepsilon| + |a_1|^3 + |a_1|^2\sigma)) \\ &= 0. \end{aligned} \qquad (5.14)$$

由(4.20)、(4.22)并应用隐函数定理易证，如果 $x(t,\ \varepsilon) =$

$(x_1(t, \varepsilon), \cdots, x_n(t, \varepsilon))$为(4.14)的具有周期 $T(\varepsilon)=2\pi+o(1)$ 的周期解，则存在惟一的 $t_i \in [0, T(\varepsilon))$,使

$$x_1(t_i, \varepsilon) = 0, \ (-1)^{i+1} x_2(t_i, \varepsilon) > 0, \quad i = 1, 2,$$

且

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left| \frac{x_2(t_1, \varepsilon)}{x_1(t_1, \varepsilon)} \right| = 1. \tag{5.15}$$

因此不失一般性在(5.14)中可设 $a_1=(0, r)^T$，$r>0$(或<0)，此时(5.14)成为

$$r[(-1)^{k-1} 2\pi J^k e_2 \sigma^k + \overline{A}_{k1} e_2 \varepsilon + r F_2(e_2, \sigma) + r^2 F_3(e_2)$$
$$+ O(\sigma^{k+1} + \varepsilon^2 + |\varepsilon\sigma| + |\varepsilon r| + |r|^3 + |r^2\sigma|)] = 0. \tag{5.16}$$

其中 $e_2=(0, 1)^T$. 如果 $F_2(e_2, \sigma)$不恒为零，可设

$$F_2(e_2, \sigma) = F_2(e_2)\sigma^m + O(\sigma^{m+1}), \quad m \geqslant 1, \ F_2(e_2) \neq 0.$$

又设

$$((-1)^{k-1} 2\pi J^k)^{-1} \overline{A}_{k1} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}, \tag{5.17}$$

$$((-1)^{k-1} 2\pi J^k)^{-1} F_j(e_2) = (g_{j1}, g_{j2})^T, \ j = 2, 3,$$

则(5.16)等价于

$$d_{12}\varepsilon + g_{21} r\sigma^m + g_{31} r^2 + h.o.t = 0, \tag{5.18}$$

$$\sigma^k + d_{22}\varepsilon + g_{22} r\sigma^m + g_{32} r^2 + h.o.h = 0, \tag{5.19}$$

其中 $h.o.t = O(\sigma^{k+1} + \varepsilon^2 + |\varepsilon\sigma| + |\varepsilon r| + |r|^3 + |r^2\sigma| + |\sigma^{m+1} r|)$.可证

定理 5.1 设(4.15)、(4.16)与(5.1)成立,又设 $k \geqslant 2$,且

$$d_{12}g_{31} \neq 0,\ g_0 \equiv (d_{22}g_{31} - d_{12}g_{32})/d_{12} \neq 0,$$

则

(i) 设 k 为奇数，则当 $d_{12}g_{31}\varepsilon<0(\geqslant 0)$时(4.14)有惟一(没有)周期接近 2π 的局部周期轨道.

(ii) 设 k 为偶数，若 $g_0>0$，则当 $d_{12}g_{31}\varepsilon<0(\geqslant 0)$时(4.14)恰有两个(没有)周期接近 2π 的局部周期轨道；若 $g_0<0$，则对一切充分小的 $|\varepsilon|$，(4.14)没有周期接近 2π 的局部闭轨.

证明 先设 $F_2(e_2,\sigma)$不恒为零，则有(5.18)与(5.19)，且 $|g_{21}|+|g_{22}|\neq 0$. 往证必有 $m>\frac{1}{2}k$. 事实上，由于 $d_{12}\neq 0$，从(5.18)可解出

$$\varepsilon = \varepsilon^*(r,\sigma) = -\frac{g_{21}}{d_{12}}r\sigma^m - \frac{g_{31}}{d_{12}}r^2 + h.o.t, \quad (5.20)$$

将(5.20)代入(5.19)可得

$$\sigma^k + Nr\sigma^m - g_0 r^2 + h.o.t = 0, \quad (5.21)$$

其中 $N=g_{22}-d_{22}g_{21}/d_{12}$. 若 $m=\frac{1}{2}k$，则由(5.21)可得

$$r = r_\pm^*(\sigma) = \frac{1}{2g_0}\left(N \pm \sqrt{N^2+4g_0}\right)\sigma^m + O(\sigma^{m+1})$$

$$\equiv R_\pm \sigma^m + O(\sigma^{m+1}), \quad (5.22)$$

再将(5.22)代入(5.20)则有

$$\varepsilon = -\frac{1}{d_{12}}R_\pm(g_{21}+g_{31}R_\pm)\sigma^{2m} + O(\sigma^{2m+1}).$$

由(5.17)、(5.13)、(4.30)、(4.28)与(4.26)知 g_{21}，g_{22}与 A_1 和 $f_3(x,0)$的选取无关. 又注意到 d_{12}和 d_{22}只与 A_1 有关，我们可适当变化 A_1 与 $f_3(x,0)$，使有

$$N^2+4g_0>0, R=\max\{R_\pm\}>0,\ g_{21}+g_{31}R\neq 0,$$

则(5.20)与(5.21)有解 $\sigma=\sigma(\varepsilon)$ 且满足

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{r_+^*(\sigma(\varepsilon))}{r_-^*(\sigma(\varepsilon))}\right|=\left|\frac{R_+}{R_-}\right|\neq 1,$$

这与(5.15)矛盾.

如果 $m<\frac{1}{2}k$，则由(5.21)可得

$$r_1^*(\sigma)=\frac{N}{g_0}\sigma^m+O(\sigma^{m+1}),\ r_2^*(\sigma)=-\frac{1}{N^2}\sigma^{k-m}+O(\sigma^{k-m+1}),$$

变动 A_1 与 $f_3(x,0)$ 使 $Ng_2>0$，$g_0g_{21}+Ng_{31}\neq 0$，则(5.20)与(5.21)有解 $\sigma=\sigma(\varepsilon)$ 且

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{r_2^*(\sigma)}{r_1^*(\sigma)}=0,$$

也与(5.15)矛盾，故必有 $m>\frac{1}{2}k$，于是(5.21)有惟一正解 $r=r(\sigma)=\sqrt{\sigma^k/g_0}(1+o(1))$（当 $g_0\sigma^k>0$ 时），将 $r(\sigma)$ 代入(5.20)可得

$$\varepsilon=-g_{31}\sigma^k/(d_{12}g_0)+o(\sigma^k),$$

由此易见结论(i)与(ii)成立.

如果 $F_2(e_2,\sigma)\equiv 0$，证明类似且较容易(此时在(5.18)与(5.19)中取 $g_{21}=g_{22}=0$). 证毕.

进一步设 $d_{12}=0$，则由(5.11)和(5.12)知

$$\begin{aligned}G_{10}(\sigma)a&=(-1)^{k-1}P_0HQ_0(\sigma)(P_1HQ_0(\sigma))^{k-1}a+(-1)^k\\&\quad\cdot P_0HQ_0(\sigma)(P_1HQ_0(\sigma))^ka+P_0[O(\sigma^{k+2}a)]\\&=\left(\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1}\Delta^ka_1,0\right)^T+(-1)^k\sigma^{k+1}P_0HQ'_0(0)\end{aligned}$$

$$\cdot (P_1 H Q'_0(0))^k a + P_0[O(\sigma^{k+2} a)],$$

由于

$$Q'_0(0) = 2\pi A_0 e^{2\pi A_0} = 2\pi\,\mathrm{diag}(B e^{2\pi B},\ C e^{2\pi C}),$$

$$\Delta^k = (2\pi J)^k \sigma^k + k\pi(2\pi J)^k J \sigma^{k+1} + O(\sigma^{k+2}),$$

若令

$$(L_1 a_1,\ 0)^T = ((-1)^{k-1} 2k\pi^2 J^{k+1} a_1,\ 0)^T$$
$$+ (-1)^k P_0 H Q'_0(0)(P_1 H Q'_0(0))^k a, \quad (5.23)$$

则有

$$G_{10}(\sigma) a = ((-1)^{k-1} 2\pi J^k a_1 \sigma^k + L_1 a_1 \sigma^{k+1} + O(\sigma^{k+2} a_1),\ 0)^T.$$

又由(4.31)与(4.29)知

$$G'_{11}(0) a = P_0 H[Q'_1(0) - 2\pi Q_1(0) P_1 H e^{2\pi A_0} A_0$$
$$- 2\pi A_0 e^{2\pi A_0} P_1 H Q_1(0)] a \equiv (L_2 a_1,\ 0)^T,$$
$$(5.24)$$

其中

$$Q_1(0) = e^{2\pi A_0} \int_0^{2\pi} e^{-A_0 t} A_1 e^{A_0 t} \mathrm{d}t,$$

$$Q'_1(0) = (I_n + 2\pi A_0) Q_1(0) + e^{2\pi A_0} \int_0^{2\pi} e^{-A_0 t}(A_1 A_0 - A_0 A_1) e^{A_0 t} t \mathrm{d}t.$$

于是代替(5.14),我们有

$$(-1)^{k-1} 2\pi \sigma^k J^k a_1 + L_1 a_1 \sigma^{k+1} + \bar{A}_{k1} a_1 \varepsilon + L_2 a_1 \sigma + F_2(a_1,\ \sigma)$$
$$+ F_3(a_1) + O(|a_1|(\sigma^{k+2} + \varepsilon^2 + |\sigma^2 \varepsilon|$$
$$+ |a_1 \varepsilon| + |a_1|^3 + |a_1|^2 \sigma)) = 0. \quad (5.25)$$

设

$$((-1)^{k-1}2\pi J^k)^{-1}L_j e_2 = (h_{j1}, h_{j2})^T, \ j = 1, 2. \quad (5.26)$$

利用(5.17),式(5.25)成为

$$d_{12}\varepsilon + g_{21}r\sigma^m + g_{31}r^2 + h_{11}\sigma^{k+1} + h_{21}\sigma\varepsilon + h.o.t = 0,$$

$$d_{22}\varepsilon + \sigma^k + g_{22}r\sigma^m + g_{32}r^2 + h_{12}\sigma^{k+1} + h_{22}\sigma\varepsilon + h.o.t = 0,$$

其中

$$h.o.t = O(\sigma^{k+2} + \varepsilon^2 + |\sigma^2\varepsilon| + |r\varepsilon| + |r|^3 + |r^2\sigma| + |r\sigma^{m+1}|),$$

与定理 5.1 类似可证

定理 5.2 设(4.15)、(4.16)与(5.1)成立,又设

$$k \geqslant 2, \ d_{12} = 0, \ g_{31}d_{22} \neq 0, \ g_1 \equiv (d_{22}h_{11} - h_{21})/(g_{31}d_{22}) \neq 0,$$

则

(i)设 k 为奇数.若 $g_1>0(<0)$,则对一切充分小的 $|\varepsilon|\neq 0$,(4.14)有惟一(没有)周期接近 2π 的局部周期轨.

(ii) 设 k 为偶数,则对充分小的 $|\varepsilon|\neq 0$,当 $\varepsilon d_{22}<0(>0)$时(4.14)存在惟一(不存在)周期接近 2π 的局部周期轨.

例 5.1 考虑四维系统

$$\dot{x} = Jx + y, \quad \dot{y} = Jy + J|x|^2 x + \varepsilon(I + J)x. \tag{5.27}$$

应用定理 5.1 可证,对充分小的 $|\varepsilon|$,当 $\varepsilon<0(>0)$时(5.27)恰有两个局部闭轨(没有局部闭轨).

事实上,易知

$$P_0H = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ P_1H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2\pi}I & 0 \end{pmatrix},$$

$$e^{A_0 t} = \begin{pmatrix} e^{Jt} & te^{Jt} \\ 0 & e^{Jt} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I+J & 0 \end{pmatrix},$$

由(4.31)、(5.4)与(5.17)知 $d_{11}=d_{22}=1$, $d_{12}=-d_{21}=1$, $g_{31}=1$, $g_{32}=0$. 于是由定理 5.1 即得所述结论.

一般地可证下述结论.

定理 5.3 设(4.15)、(4.16)与(5.1)成立.

(i) 若 $k=1$, 且 $g_{31}\neq 0$, 则对一切充分小的 $|\varepsilon|$,(4.14)至多有一个周期接近 2π 的局部闭轨. 特别若 $d_{12}\neq 0$, 则当且仅当 $g_{31}d_{12}\varepsilon<0$时有这种闭轨.

(ii) 若 $k=2$, 且 $|d_{12}|+|d_{22}|\neq 0$, $g_{31}\neq 0$, 则对一切充分小的 $|\varepsilon|$, (4.14)至多有两个周期接近 2π 的局部闭轨.

(iii) 若 $k\geqslant 3$, 且 $|d_{12}|+|d_{22}|\neq 0$, $g_{31}(d_{22}g_{31}-d_{21}g_{32})\neq 0$, 则对一切充分小的 $|\varepsilon|$, (4.14)至多有一个(当 k 为奇数时)或至多有两个(当 k 为偶数时)周期接近 2π 的局部闭轨.

证明 先设 $k=1$,代替(5.2)我们有

$$\begin{aligned} P_0 H &= \operatorname{diag}(I, 0), \\ P_1 H &= \operatorname{diag}(0, (e^{2\pi C} - I_{n-2})^{-1}), \end{aligned} \tag{5.28}$$

因此(5.5)与(5.6)应分别换为

$$P_0 H Q_0(\sigma) = \operatorname{diag}(e^{2\pi\sigma J} - I, 0),$$

与

$$P_1 H Q_0(\sigma) = \operatorname{diag}\left(0, (e^{2\pi C} - I_{n-2})^{-1} e^{2\pi C}(e^{2\pi\sigma C} - I_{n-2})\right),$$

从而 $P_1 H Q_0(\sigma)=0$,于是(5.12)成为

$$G_{10}(\sigma)a = P_0 H Q_0(\sigma)a = (\Delta a_1, 0)^T = ((2\pi\sigma J + O(\sigma^2))a_1, 0)^T.$$

由此知(5.12)对 $k=1$ 仍成立. 因此(5.18)与(5.19)对 $k=1$ 成立,从(5.19)将 σ 解出,代入(5.18)可得

$$\varepsilon F_0(\varepsilon) + \varepsilon^m F_1(\varepsilon) r + F_2(\varepsilon) r^2 + O(r^3) = 0,$$

其中 $F_0(0) = d_{12}$, $F_1(0) = g_{21}(-d_{22})^m$, $F_2(0) = g_{31}$. 注意到上一方程左端为 C^2 函数，由 $g_{31} \neq 0$ 及 Rolle 定理知上一方程关于 r 至多有两个根，且由(5.15)知当有两个根时必为一正一负，因此至多有一个正根 $r = r^*(\varepsilon)$，即得结论(i).

次设 $k = 2$，先考虑 $d_{12} \neq 0$ 的情况. 此时由隐函数定理，从(5.18)可解得(5.20)，代入(5.19)可得

$$\sigma^2 + \sigma R_1(r, \sigma) + R_0(r) = 0,$$

其中 $R_0 = O(r^2)$, $R_1 = O(|r, \sigma|^2)$，该方程关于 σ 至多有两个根 $\sigma = \sigma_i(r) = O(r)$, $i = 1, 2$，将它们代入(5.20)，并注意到 $m \geqslant 2$，可得

$$\varepsilon = -\frac{g_{31}}{d_{12}} r^2 + O(r^3),$$

由此即知(4.14)至多有两个局部闭轨.

若 $d_{12} = 0$，则由假设知必有 $d_{22} \neq 0$，于是从(5.19)可解得

$$\varepsilon = -\frac{1}{d_{22}}(\sigma^2 + g_{32} r^2 + \cdots), \tag{5.29}$$

代入(5.18)又得

$$g_{31} r^2 + r\sigma^m S_1(\sigma)\sigma^4 + O(r^3) = 0,$$

与定理 5.1 类似可证，上述方程关于 r 至多有一个正根 $r = r(\sigma) = O(\sigma^2)$，代入(5.29)，则有

$$\varepsilon = -\frac{1}{d_{22}}\sigma^2 + O(\sigma^4),$$

该式有两个反函数，于是(4.14)至多有两个局部闭轨. 故结论(ii)得证. 结论(iii)完全类似可证. 证毕.

5.2 分支量的计算方法

我们指出，定理 5.1～5.3 中所出现的量都是可以计算的，而且式(5.18)与(5.19)的推导过程实际上给出了这些量的计算步骤. 为了实用上的方便，下面我们具体写出求量 d_{12}, d_{22}, d_{31} 与 g_{32} 的方法步骤.

第一步　由(4.15)与(4.16)，将所给方程(4.14)写成下述形式

$$f(x,\varepsilon)=A(\varepsilon)x+f_2(x,\varepsilon)+f_3(x,\varepsilon)+O(|x|^4),$$
$$A(\varepsilon)=A_0+A_1\varepsilon+O(\varepsilon^2),\ A_0=\mathrm{diag}(B,C),$$

其中

$$B=\begin{pmatrix} J & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & & J\end{pmatrix}_{2k},\ I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

而 f_2, f_3 分别为 x 的 2 次与 3 次齐次式(若 A_0 不具有上述形式，可对(4.14)引入线性变换，使变换后的方程有上述形式). 于是由(5.2)与(5.28)知当 $k=1$ 时有

$$P_0H=\mathrm{diag}(I,0),\ P_1H=\mathrm{diag}(0,(e^{2\pi C}-I_{n-2})^{-1}),$$

当 $k\geqslant 2$ 时有

$$P_0H=\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}_{2k},0\right),\ P_1H=\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ H_1^{-1} & 0\end{pmatrix},(e^{2\pi C}-I_{n-2k})^{-1}\right),$$

$$H_1=\begin{pmatrix}2\pi I & \cdots & \dfrac{(2\pi)^{k-1}}{(k-1)!}I\\ & \ddots & \vdots\\ & & 2\pi I\end{pmatrix}_{2k-2},\ H_1^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2\pi}I & \cdots & *\\ & \ddots & \vdots\\ & & \dfrac{1}{2\pi}I\end{pmatrix}.$$

第二步　由(4.31)、(5.4)，取 $a=(a_1,0)^T$，$a_1=(0,\ r)\in R^2$，按下列公式计算 $R_{20}(a)$，$G_{30}(a)$ 与 $\bar{A}_{k1}$：

$$R_{20}(a) = -P_1He^{2\pi A_0}\int_0^{2\pi}e^{-A_0s}f_2(e^{A_0s}a,\ 0)\mathrm{d}s,$$

$$G_{30}(a) = P_0H\Big[\int_0^{2\pi}e^{-A_0t}f_{2x}(e^{A_0s}a,\ 0)e^{A_0t}(R_{20}(a) + g(t))\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi}e^{-A_0t}f_3(e^{A_0s}a,\ 0)\mathrm{d}t\Big],$$

$$g(t) = \int_0^t e^{-A_0s}f_2(e^{A_0s}a,\ 0)\mathrm{d}s,\ \bar{A}_{k1} = \int_0^{2\pi}e^{-Jt}A_{k1}e^{Jt}\mathrm{d}t,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} (A_{ij}) & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

其中 $A_{ij}(1\leqslant i,\ j\leqslant k)$为二阶矩阵.

易证，若 $A_{k1}=(e_{ij})_{2\times 2}$，则有

$$\frac{1}{2\pi}\bar{A}_{k1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e_{11}+e_{22}) & \frac{1}{2}(e_{12}-e_{21}) \\ -\frac{1}{2}(e_{12}-e_{21}) & \frac{1}{2}(e_{11}+e_{22}) \end{pmatrix}.$$

第三步　由(5.13)，$G_{30}(a)$可写成 $G_{30}(a)=(F_3(a_1),\ 0)^T$，于是由(5.17)有

$$[(-1)^{k-1}2\pi J^k]^{-1}F_3(0,\ 1) = \begin{pmatrix} g_{31} \\ g_{32} \end{pmatrix},$$

$$[(-1)^{k-1}2\pi J^k]^{-1}\bar{A}_{k1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},$$

而且 $d_{11}=d_{22}$，$d_{21}=-d_{12}$，$J^2=-I$. 有了上述量，就可直接应用定理 5.1 与定理 5.3 了.

上述三步中，第二步含有较复杂的计算. 如果在计算之前，对给定方程求出规范型（这本身也相当复杂），则上面第二步的计算则相当简单. 如果矩阵 C 的特征值实部都不为零，则又可以先求出(4.14)的中心流形的近似表达式，然后对所得的约简方程（$2k$ 维）按照上面三步进行计算所需要的量；特别，当 $k=1$ 时量 g_{31} 与约简方程当 $\varepsilon=0$ 时在原点的一阶焦点量异号（见下面的讨论），且方程(4.14)若有局部闭轨，其周期必接近 2π.

按照上述步骤，我们可以利用 Mathematica 3.0 推导出量 g_{31} 与 g_{32} 的计算公式. 例如，对 $(k, n)=(1, 2), (1, 3), (2, 4)$ 这三种情况，在蒋毅华和姚慧两位同学的协助下获得了下列公式.

1. 设 $k=1, n=2, A_0=J$，又设

$$f_2(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i+j=2} a_{ij}x_1^i x_2^i \\ \\ \sum\limits_{i+j=2} b_{ij}x_1^i x_2^i \end{pmatrix}, \quad f_3(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i+j=3} a_{ij}x_1^i x_2^j \\ \\ \sum\limits_{i+j=3} b_{ij}x_1^i x_2^j \end{pmatrix},$$

则有

$$g_{31} = \frac{1}{8}(a_{02}a_{11} - a_{12} + a_{20}a_{11} - 3a_{30} + 2a_{02}b_{02} - 3b_{03}$$
$$- b_{02}b_{11} - 2a_{20}b_{20} - b_{20}b_{11} - b_{21}).$$

2. 设 $k=1, n=3, A_0=\mathrm{diag}(J, c), c\neq 0$，又设

$$f_2(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i+j+l=2} a_{ijl}x_1^i x_2^j x_3^l \\ \\ \sum\limits_{i+j+l=2} b_{ijl}x_1^i x_2^j x_3^l \\ \\ \sum\limits_{i+j+l=2} c_{ijl}x_1^i x_2^j x_3^l \end{pmatrix},$$

$$f_3(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i+j+l=3} a_{ijl} x_1^i x_2^j x_3^l \\ \sum\limits_{i+j+l=3} b_{ijl} x_1^i x_2^j x_3^l \\ \sum\limits_{i+j+l=3} c_{ijl} x_1^i x_2^j x_3^l \end{pmatrix},$$

则有

$$g_{31} = \frac{1}{24c(4+c^2)}[c^3 N_1 + 3c^2 N_2 + 2c(2N_1 + 3N_3) + 24N_4],$$

其中

$$\begin{aligned} N_1 = &- 9a_{300} - 3b_{210} - 3a_{120} - 9b_{030} - 4a_{030}a_{110} + 7a_{200}a_{110} + 3a_{020}a_{110} \\ &+ 2b_{030}b_{110} - 5b_{200}b_{110} - 3b_{020}b_{110} + 4a_{200}b_{030} - 10a_{030}b_{200} \\ &- 4a_{020}b_{030} + 4a_{020}b_{200} + 14a_{200}b_{020} + 6a_{020}b_{020} - 14a_{030}b_{020}, \end{aligned}$$

$$N_2 = a_{101}c_{021} + c_{200}b_{011} + c_{110}b_{101} + a_{011}c_{110} + 3a_{101}c_{200} + 3b_{011}c_{020},$$

$$N_3 = c_{200}b_{101} + c_{200}a_{011} + c_{110}b_{011} - c_{110}a_{101} - c_{020}b_{101} - c_{020}a_{011},$$

$$N_4 = c_{200}b_{011} + c_{200}a_{101} + c_{020}b_{011} + c_{021}a_{101},$$

3. 设 $k=2, n=4, A_0 = \begin{pmatrix} J & I \\ 0 & J \end{pmatrix}$，又设

$$f_p(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i+j+l+m=p} a_{ijlm} x_1^i x_2^j x_3^l x_4^m \\ \sum\limits_{i+j+l+m=p} b_{ijlm} x_1^i x_2^j x_3^l x_4^m \\ \sum\limits_{i+j+l+m=p} c_{ijlm} x_1^i x_2^j x_3^l x_4^m \\ \sum\limits_{i+j+l+m=p} d_{ijlm} x_1^i x_2^j x_3^l x_4^m \end{pmatrix}, p = 2, 3,$$

则有

$$g_{31}=\frac{1}{72}[9(c_{2100}-d_{2010})+27(c_{0300}-d_{3000})+c_{2000}(46d_{0300}$$
$$-17c_{1100}-6c_{1010}+15d_{1001}-21c_{0101}+6d_{0110})+d_{2000}(8c_{0300}$$
$$+19d_{1100}-15d_{1010}-26c_{0200}+21c_{0110}-6c_{1001}+6d_{0101})$$
$$+c_{1100}(-10c_{0300}+21b_{0200}-27c_{0200}+3c_{1001}-3d_{0101}-3a_{1100}$$
$$+15b_{2000}-6d_{1010}-6c_{0101})+d_{1100}(8d_{0300}-3c_{1010}+15a_{0200}$$
$$+27d_{0200}+3d_{0110}+3b_{1100}+21a_{2000}-6c_{0101}-6d_{1001})$$
$$+c_{0200}(26d_{0300}+6c_{1010}+54d_{0200}+6d_{0110}+21d_{1001}-15c_{0101}$$
$$-12b_{1100}+30a_{0200}-42a_{2000})+d_{0200}(-8c_{0300}+8c_{2000}$$
$$-21d_{1010}+6c_{1001}-6d_{0101}-6a_{1100}+15c_{0110}+12b_{2000}$$
$$-12b_{0200})+c_{0300}(-12a_{2000}+6b_{1100}+12a_{0200})$$
$$+d_{0300}(-30b_{2000}-12a_{1100}-42b_{0200})],$$

$$g_{32}=\frac{1}{72}[9(d_{2100}+c_{1200})+27(c_{3000}+d_{0300})+c_{2000}(-46c_{0300}$$
$$-17d_{1100}-6d_{1010}-8c_{0200}-6c_{0110}-15c_{1001}-21d_{0101})$$
$$+d_{2000}(8c_{0300}-19c_{1100}+15c_{1010}-26d_{0200}+21d_{0110}-6d_{1001}$$
$$+6d_{0101})+c_{1100}(-10d_{0300}-c_{1100}-25d_{0200}-15a_{0200}+3d_{1001}$$
$$+3c_{0101}+3b_{1100}-21a_{2000}+6c_{1010}-6d_{0110})+d_{1100}(-8c_{0300}$$
$$-d_{1100}-3d_{1010}-29c_{0200}-3a_{1100}-3c_{0110}+15b_{2000}-6d_{0101}$$
$$+6c_{1001})+b_{0200}(42c_{0300}+12c_{0200}+21b_{1100})+c_{0200}(-26c_{0300}$$
$$+6d_{1010}+8c_{0200}+6c_{0110}-21c_{1001}-15d_{0101}+6a_{1100}-12b_{2000})$$

$$+d_{0200}(-8d_{0300}-42a_{2000}+21c_{1010}+6d_{1001}+6c_{0101}-12b_{1100}$$

$$+15d_{0110}-46d_{0200}-30a_{0200})+d_{0300}(-12a_{2000}-6b_{1100}$$

$$+12a_{0200})+c_{0300}(30b_{2000}+12a_{1100})].$$

下面对 $k=1$ 的情况我们证明若 $g_{31}\neq 0$，则当 ε 为多维参数时(4.14)在原点附近至多有一个周期接近 2π 的闭轨，因此量 g_{31} 可视为一阶焦点量在高维退化 Hopf 中的推广. 为此设

$$A(\varepsilon)=\operatorname{diag}(B^*(\varepsilon),\ C^*(\varepsilon)),\ B^*(\varepsilon)=\alpha(\varepsilon)I+\beta(\varepsilon)J,$$

$$B^*(0)=J,\ C^*(0)=C,\ \det(e^{2\pi c}-I_{n-2})\neq 0, \tag{5.30}$$

此时由(4.26)与(5.28)知 $b_1=0$,从而由(4.28)与(5.28)知

$$G_1=((e^{2\pi(1+\sigma)B^*}-I)a_1,\ 0)^T. \tag{5.31}$$

由(4.30)、(5.13)及(5.31)知 $G=0$ 等价于

$$(2\pi J)^{-1}[(e^{2\pi(1+\sigma)B^*}-I)a_1+F_2(a_1,\ \sigma)+F_3(a_1)+\cdots]=0,$$

由(5.17),将上式写成分量形式可得

$$F_{0j}(\varepsilon,\ \sigma)+rF_{1j}(\varepsilon,\ \alpha)+r^2[g_{31}+O(|r|+|\varepsilon|)]=0,\ j=1,\ 2, \tag{5.32}$$

其中

$$F_{01}=\frac{1}{2\pi}[1-e^{2\pi(1+\sigma)\alpha}\cos(2\pi(1+\sigma)\beta)],$$

$$F_{02}=\frac{1}{2\pi}e^{2\pi(1+\sigma)\alpha}\sin(2\pi(1+\sigma)\beta),$$

$$F_{1j}=O(\sigma^m+|\varepsilon|),\ j=1,\ 2.$$

注意到 $F_{02}(0,\ \sigma)=\dfrac{1}{2\pi}\sin 2\pi\sigma=\sigma+O(\sigma^2)$，对(5.32)第二式(即 $j=2$)利用隐函数定理可解得

$$\sigma=\sigma(r,\ \varepsilon)=\sigma_0(\varepsilon)+O(r^2),\ \sigma_0(\varepsilon)=\frac{1}{\beta}-1,$$

代入(5.32)第一式可得

$$F(r,\ \varepsilon)\equiv F_{01}(\varepsilon,\ \sigma_0(\varepsilon))+rF_{11}(\varepsilon,\sigma_0(\varepsilon))$$
$$+r^2[g_{31}+O(|r,\ \varepsilon|)]=0. \qquad (5.33)$$

上述函数 F 即为(4.14)的后继函数(对 $k=1$). 易知

$$F_{01}(\varepsilon,\ \sigma_0(\varepsilon))=-\alpha(1+\sigma_0(\varepsilon))+O(\alpha^2),$$

因此由(5.15)知当 $\alpha=0$ 时必有 $F_{11}=0$，且(5.33)关于 r 至多有一个正根，于是证明了下列结论.

定理 5.4 设 C^3 系统(4.14)满足(5.30)，其中 $\varepsilon\in R^m$，$m\geqslant 1$. 如果 $g_{31}\neq 0$，则存在 $\varepsilon_0>0$ 及原点的邻域 V，使对 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$，当 $\alpha(\varepsilon)g_{31}>0(\leqslant 0)$ 时(4.14)在 V 内有惟一(没有)周期接近 2π 的闭轨.

我们指出，利用第二节式(2.16)及注 2.1 也可以证明上述定理，且考虑到闭轨的存在条件易知量 g_{31} 与注 2.1 中的量 g_2 异号.

本节的定理 5.1、5.2 及定理 5.3 的部分结果是由韩茂安与 K. Jiang([56])获得的，另一些结果是新加的.

§6 非半单线性系统的扰动

非半单线性系统是指下述形式的线性系统

$$\dot{x}=A_0x,\ x\in R^n, \qquad (6.1)$$

其中 A_0 满足(4.16)与(5.1)，且 $k\geqslant 2$. 直接求解可知方程(6.1)

有一族以 2π 为周期的闭轨 L_r，$r>0$，其参数方程可取为 $x_0(t, r)=(r\sin t, r\cos t, 0, \cdots, 0)^T$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$. 本节我们研究(6.1)在自治扰动下闭轨族 L_r 附近周期轨道的分支.

6.1 分支方程与闭轨的个数判定

考虑(6.1)的如下扰动系统

$$\dot{x} = A_0 x + \varepsilon f(x, \delta), \tag{6.2}$$

其中 ε 为小参数，$\delta\in R^m$，$m\geqslant 1$，f 为 C^∞ 函数. 由于原点为(6.1)的初等奇点，不失一般性可设

$$f(0, \delta) = 0. \tag{6.3}$$

由上面两节的讨论，我们来考虑方程

$$\dot{x} = (1+\sigma)A_0 + \varepsilon(1+\sigma)f(x, \delta) \tag{6.4}$$

的具周期 2π 的闭轨的分支. 设

$$x(t, h, \varepsilon, \sigma) = x_0(t, h, \sigma) + \varepsilon x_1(t, h, \sigma) + O(\varepsilon^2) \tag{6.5}$$

为 (6.4) 的以 h 为初值的解(为了书写方便，上式中暂省去参数 δ)，则有 $x_0(0, h, \sigma)=h$，$x_1(0, h, \sigma)=0$，将(6.5)代入(6.4)可得

$$\dot{x}_0 = (1+\sigma)A_0 x_0,\ \dot{x}_1 = (1+\sigma)A_0 x_1 + (1+\sigma)f(x_0, \delta),$$

于是利用关于 x_0，x_1 的初值条件可解得

$$\begin{aligned} x_0(t, h, \sigma) &= e^{(1+\sigma)A_0 t}h, \\ x_1(t, h, \sigma) &= (1+\sigma)\int_0^t e^{(1+\sigma)A_0(t-s)} f(e^{(1+\sigma)A_0 s}h, \delta)\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{6.6}$$

令 $P(h, \varepsilon, \sigma)=x(2\pi, h, \varepsilon, \sigma)-h$，则 $x(t, h, \varepsilon, \sigma)$为(6.4)的 2π 周期解当且仅当 $P(h, \varepsilon, \sigma)=0$. 我们称函数 P 为(6.4)或(6.2)的后继函数. 注意到(6.3)蕴涵 $x(t, 0, \varepsilon, \sigma)=0$，由(6.5)

与(6.6)知方程 $P(h, \varepsilon, \sigma)=0$ 等价于

$$(e^{2\pi A_0} - I_n) h + Q_0(\sigma)h + x_1(2\pi, h, \sigma)\varepsilon + O(\varepsilon^2 |h|) = 0, \tag{6.7}$$

其中,如前

$$Q_0(\sigma) = e^{2\pi(1+\sigma)A_0} - e^{2\pi A_0},\ Q'_0(0) = e^{2\pi A_0} 2\pi A_0.$$

由前面两节的讨论知,存在投影矩阵 $P_0 = \mathrm{diag}(I, 0)$ 与 $P_1 = \mathrm{diag}(0, I_{n-2})$ 及可逆矩阵 H,使(4.19)与(5.2)成立.由式(4.24)与(4.25)的推导可知,(6.7)等价于方程组

$$P_0 HQ_0(a + b) + P_0 Hx_1(2\pi, h, \sigma)\varepsilon + P_0[O(\varepsilon^2 | h |)] = 0,$$
$$b + P_1 HQ_0(a + b) + P_1 Hx_1(2\pi, h, \sigma)\varepsilon + P_1[O(\varepsilon^2 | h |)] = 0, \tag{6.8}$$

其中 $a = P_0 h = (a_1, 0)^T$, $b = P_1 h$, $a_1 \in R^2$.对(6.8)第二式利用隐函数定理可解得

$$b = b_0(a, \sigma) + b_1(a, \sigma)\varepsilon + O(\varepsilon^2 | a |) \equiv b(a, \varepsilon, \sigma),$$

其中

$$b_0(a, \sigma) = -(I_n + P_1 HQ_0)^{-1} P_1 HQ_0 a,$$
$$b_1(a, \sigma) = -(I_n + P_1 HQ_0)^{-1} P_1 Hx_1(2\pi, a + b_0, \sigma).$$

注意到

$$a + b_0 = [I_n - (I_n + P_1 HQ_0)^{-1} P_1 HQ_0]a = (I_n + P_1 HQ_0)^{-1} a,$$

将函数 $b(a, \varepsilon, \sigma)$代入(6.8)可得

$$P_0 HQ_0[I_n + P_1 HQ_0]^{-1} a + \varepsilon V(a, \sigma)$$

$$+ P_0[O(\varepsilon^2 \mid a \mid)] = 0, \tag{6.9}$$

其中

$$V(a, \sigma) = (P_0H - P_0H[I_n + P_1HQ_0]^{-1}P_1H)x_1(2\pi, a + b_0, \sigma).$$

称(6.9)为(6.4)或(6.2)的分支方程.由(6.6)易知

$$x_1(2\pi, a + b_0, \sigma) = R(a) + [R(a) + R_1(a) + R_2(a)]\sigma + O(\sigma^2 \mid a \mid),$$

其中

$$R(a) = \int_0^{2\pi} e^{A_0(2\pi - t)} f(e^{A_0 t}a, \delta)\mathrm{d}t,$$

$$R_1(a) = \int_0^{2\pi} e^{A_0(2\pi - t)} A_0(2\pi - t) f(e^{A_0 t}a, \delta)\mathrm{d}t, \tag{6.10}$$

$$R_2(a) = \int_0^{2\pi} e^{A_0(2\pi - t)} f_x(e^{A_0 t}a, \delta)e^{A_0 t}[A_0 t - P_1HQ'_0(0)]a\mathrm{d}t,$$

于是

$$V(a, \sigma) = P_0HR(a) + \sigma[P_0H(R + R_1 + R_2) - P_0HQ'_0(0)P_1HR] + O(\sigma^2). \tag{6.11}$$

由(5.2)知

$$P_0He^{A_0(2\pi - t)} = \mathrm{diag}\left[\begin{pmatrix} 0 & e^{J(2\pi - t)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2k}, 0\right],$$

若令 $a_1 = (0, r)^T = re_2$, $r > 0$, 及

$$F(r, \delta) = \frac{J^{-k}}{2\pi r}\int_0^{2\pi} e^{-Jt} f_k(e^{Jt}re_2, 0, \delta)\mathrm{d}t \equiv (F_1(r, \delta), F_2(r, \delta))^T, \tag{6.12}$$

其中

$$f(x, \delta) = (f_1(x, \sigma), \cdots, f_k(x, \delta), f_{k+1}(x, \delta)), f_1, \cdots,$$

$f_k \in R^2$, $f_{k+1} \in R^{n-2k}$,

由(6.10)可知

$$P_0 HR = (2\pi r J^k F(r, \delta), 0)^T, \tag{6.13}$$

由(5.25) 的推导易知

$$P_0 HQ_0 (I_n + P_1 HQ_0)^{-1} a$$
$$= ((-1)^{k-1} 2\pi J^k a_1 \sigma^k + L_1 a_1 \sigma^{k+1} + O(\sigma^{k+2} a_1), 0)^T,$$

其中 L_1 满足(5.23)式.如进一步令

$$P_0 H(R + R_1 + R_2) - P_0 HQ'_0(0) P_1 HR = (2\pi r J^k E(r, \sigma), 0)^T,$$

$$E = (E_1, E_2)^T, \ L_1 e_2 = 2\pi J^k (d_1, d_2)^T, \tag{6.14}$$

则由(6.11)与(6.13)及以上三式可知分支方程(6.9)可写为

$$(-1)^{k-1} \sigma^k e_2 + \varepsilon F(r, \delta) + \varepsilon \sigma E(r, \delta) + \frac{1}{2\pi} J^{-k} L_1 e_2 \sigma^{k+1}$$
$$+ O(\varepsilon^2 + \varepsilon \sigma^2 + \sigma^{k+2}) = 0,$$

或

$$\begin{aligned} &\varepsilon F_1(r, \delta) + \varepsilon \sigma E_1(r, \delta) + d_1 \sigma^{k+1} \\ &\quad + O(\varepsilon^2 + \varepsilon \sigma^2 + \sigma^{k+2}) = 0, \\ &(-1)^{k-1} \sigma^k + \varepsilon F_2(r, \delta) + \varepsilon \sigma E_2(r, \delta) + d_2 \sigma^{k+1} \\ &\quad + O(\varepsilon^2 + \varepsilon \sigma^2 + \sigma^{k+2}) = 0. \end{aligned} \tag{6.15}$$

利用(6.15)可证

定理 6.1 设存在紧集 $D \subset R^m$ 及 $0 < r_1(\delta) < r_2(\delta) < \cdots < r_N(\delta)$ 使

$$F_1(r_j, \delta) = 0, \ \frac{\partial F_1}{\partial r}(r_j, \delta) \neq 0, \ \delta \in D, \ 1 \leqslant j \leqslant N.$$

(i) 若 k 为奇数,则存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(D)>0$,使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$, $\delta\in D$ 时(6.2)必(至少)有 N 个闭轨$L_j(\varepsilon, \delta)$,且当 $\varepsilon\to0$ 时 $L_j\to L_{r_j}$, $1\leqslant j\leqslant N$.若进一步有

$$
\begin{gathered}
\text{当 } r\geqslant0,\ r\neq r_j(1\leqslant j\leqslant N)\text{ 时 } F_1(r,\ \delta)\neq0;\\
F_2(r_j,\ \delta)\neq0,\ \delta\in D,\ 1\leqslant j\leqslant N,
\end{gathered}
\tag{6.16}
$$

则当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$, $\delta\in D$ 时(6.2)在 R^n 中任何紧集内恰有$L_1(\varepsilon, \delta),\cdots,L_N(\varepsilon, \delta)$这 N 个闭轨.

(ii) 若 k 为偶数,令 N_1 与 N_2 分别表示使 $F_2(r_j,\delta)$为正、负的 r_j 的个数,$1\leqslant j\leqslant N$,则存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(D)>0$,使当$0<\varepsilon<\varepsilon_0$(或$-\varepsilon_0<\varepsilon<0$)时(6.2)在 R^n 中任何紧集内至少有 $2N_1$(或 $2N_2$)个闭轨,且当 $\varepsilon\to0$ 时这些闭轨中任一个都趋于某一个 L_{r_j}.若进一步设(6.16)成立,则(6.2)别无其他闭轨.

证明 设 k 为奇数.首先由(6.15)第二式知必有 $\sigma^k=O(\varepsilon)$,故可令 $\sigma=\varepsilon^{1/k}u$,则由(6.15)可得

$$
\begin{aligned}
&F_1(r,\ \delta)+\varepsilon^{\frac{1}{k}}S_1(r,\ u,\ \varepsilon^{\frac{1}{k}})=0,\\
&u^k+F_2(r,\ \delta)+\varepsilon^{\frac{1}{k}}S_2(u,\ u,\ \varepsilon^{\frac{1}{k}})=0,
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

其中 $S_j(r, u, v)$为 C^∞ 函数,$j=1, 2$.由假设知,F_1 有 N 个单重根r_j, $j=1, 2,\cdots,N$,应用隐函数定理知,(6.17)第一式有解 $r=r_j^*(\varepsilon, u)=r_j+O(\varepsilon^{\frac{1}{k}})$,$j=1, \cdots,N$, 将 r_j^* 代入(6.17)第二式可得方程

$$
u^k+F_2(r_j,\ \delta)+\varepsilon^{\frac{1}{k}}S_2^*(r,\ u,\ \varepsilon^{\frac{1}{k}})=0,
\tag{6.18}
$$

且 $S_2^*(r, u, v)$为 C^∞ 函数.由于 k 为奇数,必存在函数 $\varepsilon^*(\delta)>0$,使当$0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon^*(\delta)$时(6.18)关于 u 至少有一个解 $u_j(\varepsilon, \delta)$,且 $u_j(0, \delta)=-[F_2(r_j, \delta)]^{1/k}$.于是我们得到(6.15)的 N 个

解 $r=r_j^*(\varepsilon, u_j)$, $\sigma=\varepsilon^{1/k}u_j$, $j=1, \cdots, N$.

若进一步设(6.16)成立,则由隐函数定理知,对每一个 j, u_j 是(6.18)的仅有的根,因此上述 N 个解是(6.15)的全部解,于是令 $\varepsilon_0=\min\limits_{\delta\in D}\varepsilon^*(\delta)$,即得结论(i).

若 k 为偶数,则令 $\sigma=|\varepsilon|^{1/k}u$,类似可证结论(ii)成立.证毕.

如果 $f(x, \delta)$ 关于 x 为 $2N+1$ 次多项式,则由(6.12)给出的函数 $F(r, \delta)$ 为 r 的 $2N$ 次偶多项式.

例 6.1 考虑四维系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Jx + y, \\ \dot{y} &= Jy + \varepsilon[(I+J)x - J|x|^2 x], \end{aligned} \tag{6.19}$$

此时有 $k=2$, $f_2(x, y)=(I+J)x-J|x^2|x$,故由(6.12)知 $F(r)=(r^2-1, -1)^T$.于是由定理 6.1 知对充分小的 $|\varepsilon|>0$,当 $\varepsilon<0(>0)$ 时(6.19)在 R^4 的任何紧集内恰有两个闭轨(无闭轨).

我们指出,当 $\varepsilon<0$ 时,方程(6.19)可由(5.27)经尺度变换 $(x, y)\rightarrow\sqrt{-\varepsilon}(x, y)$ 而得.由此可见例 5.1 与例 6.1 的结论是一致的.

注 6.1 从定理 6.1 的证明即知,该定理对形式上泛于(6.2)的方程

$$\dot{x} = A_0 x + \varepsilon f(x, \delta) + O(\varepsilon^2)$$

仍旧成立.

由定理 6.1 知,若 F_1 有 N 个单根,则当 k 为奇数(偶数)时(6.2)可以出现 N 个($2N$ 个)闭轨.一个自然的问题是对 $k\geqslant3$,若仍设 F_1 有 N 个单根,(6.2)能不能出现更多个闭轨?下面以 $k=3$ 为例来讨论这一问题.

6.2 六维系统更多个闭轨的分支

我们首先证明下面的定理.

定理 6.2 设 $k=3$,且

$$F_2(r, \delta) = d_0(\delta) + d_1(\delta)r^2 + \cdots + d_N(\delta)r^{2N}, \tag{6.20}$$

其中 $\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_N)\in R^N$,如果存在 $\delta_0\in R^N$, $0<r_1<r_2<\cdots<r_N$ 使

(i) $d_j(\delta_0)=0,\ j=0,\ \cdots,N$,

(ii) $\det\dfrac{\partial(d_0,\cdots,d_{N-1})}{\partial(\delta_1,\cdots,\delta_N)}(\delta_0)\neq 0$,

(iii) $F_1(r_j,\ \delta_0)=0,\ \dfrac{\partial F_1}{\partial r}(r_j,\ \delta_0)\neq 0,\ j=1,\ \cdots,N$,

(iv) $E_2(r_1,\ \delta_0)E_2(r_j,\ \delta_0)>0,\ j=1,\ \cdots,N$,

则存在函数 $\delta^*(\varepsilon)=\delta_0+O(\varepsilon)$, 使当 $\delta=\delta^*(\varepsilon)$, $|\varepsilon|$充分小且 $\varepsilon E_2(r_1,\ \delta_0)<0$ 时(6.2)必有个 $3N$ 个闭轨.

证明 由于 $k=3$, 令 $\sigma=\varepsilon^{1/3}u$,则由(6.15)可得

$$F_1(r,\ \delta) + \varepsilon^{1/3}uE_1(r,\ \delta) + O(\varepsilon + \varepsilon^{2/3}u^2 + \varepsilon^{1/3}u^4) = 0,$$

$$u^3 + M_0(r,\ \varepsilon,\ \delta) + \varepsilon^{1/3}uE_2(r,\ \delta) + O(\varepsilon^{2/3}u^2 + \varepsilon^{1/3}u^4) = 0, \tag{6.21}$$

其中 $M_0(r,\ \varepsilon,\ \delta)=F_2(r,\ \delta)+O(\varepsilon)$. 欲证(6.21)关于$(r,\ u)$有 $3N$ 个解.

首先, 由(iii)及隐函数定理知, (6.21) 第一式有 N 个解

$$r_j^*(u,\ \varepsilon,\ \delta) = r_j + \bar{r}_j u\varepsilon^{1/3} + O(\varepsilon^{2/3} + \varepsilon^{1/3}u^4),$$

$$\bar{r}_j = -E_1(r_j,\ \delta)\Big/\frac{\partial F_1}{\partial r}(r_j,\ \delta),$$

将 r_j^* 代入(6.21)第二式,并注意到

$$M_0(r_j^*,\ \varepsilon,\ \delta)= M_0(r_{j0}^*,\ \varepsilon,\ \delta) + \frac{\partial M_0}{\partial r}(r_{j0}^*,\ \varepsilon,\ \delta) \cdot(r_j^* - r_{j0}^*) + O(|r_j^* - r_{j0}^*|^2)$$

$$= M_0(r_{j0}^*, \varepsilon, \delta) + \left[\frac{\partial F_2}{\partial r}(r_j, \delta) + O(\varepsilon^{2/3})\right]$$

$$\cdot (r_j^* - r_{j0}^*) + O(\varepsilon^{2/3} u)$$

$$= M_0(r_{j0}^*, \varepsilon, \delta) + \frac{\partial F_2}{\partial r}(r_j, \delta)\bar{r}_j u\varepsilon^{1/3}$$

$$+ O(u\varepsilon^{2/3} + \varepsilon^{1/3} u^4),$$

$$E_2(r_j^*, \delta) = E_2(r_j, \delta) + O(\varepsilon^{2/3} + \varepsilon^{1/3} u),$$

其中 $r_{j0}^* = r_j^*(0, \varepsilon, \delta) = r_j + O(\varepsilon^{2/3})$则可得

$$u^3 + M_j(\varepsilon, \delta) + \varepsilon^{1/3} uM(r_j, \delta)$$
$$+ O(\varepsilon^{2/3} u^2 + \varepsilon^{1/3} u^4) = 0, \tag{6.22}$$

其中

$$M_j(\varepsilon, \delta) = M_0(r_{j0}^*, \varepsilon, \delta)$$
$$= F_2(r_j, \delta) + O(\varepsilon^{2/3}),$$

$$M(r_j, \delta) = E_2(r_j, \delta) + \frac{\partial F_2}{\partial r}(r_j, \delta)\bar{r}_j.$$

考虑方程组 $M_j(\varepsilon, \delta) = 0$, $j = 1, \cdots, N$. 由(6.20)及条件(i)与(iii)知 $M_j(0, \delta_0) = F_2(r_j, \delta_0) = 0$,且

$$\det \frac{\partial(M_1, \cdots, M_N)}{\partial(\delta_1, \cdots, \delta_N)}(0, \delta_0) = \Delta \det \frac{\partial(d_0, \cdots, d_{N-1})}{\partial(\delta_1, \cdots, \delta_N)}(0, \delta_0) \neq 0,$$

其中

$$\Delta = \det \frac{\partial(M_1, \cdots, M_N)}{\partial(d_0, \cdots, d_{N-1})}(0, \delta_0) = \begin{vmatrix} 1 & r_1^2 & \cdots & r_1^{2N} \\ 1 & r_2^2 & \cdots & r_2^{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & r_N^2 & \cdots & r_N^{2N} \end{vmatrix} \neq 0,$$

故由隐函数定理知存在惟一函数 $\delta^*(\varepsilon)=\delta_0+O(\varepsilon)$，使 $M_j(\varepsilon, \delta^*(\varepsilon))=0$，$j=1, \cdots, N$. 现在取定 $\delta=\delta^*(\varepsilon)$，则当 $\varepsilon M(r_j, \delta_0)<0(1\leqslant j\leqslant N)$时方程(6.22)关于 u 有三个解

$$u_{1j}=0,\ u_{2j}=\sqrt{-\varepsilon^{1/3}M(r_j, \delta_0)}(1+O(|\varepsilon|^{1/6})),$$

$$u_{3j}=\sqrt{-\varepsilon^{1/3}M(r_j, \delta_0)}(-1+O(|\varepsilon|^{1/6})).$$

再注意到$\frac{\partial F_2}{\partial r}(r_j, \delta_0)=0$，可知 $M(r_j, \delta_0)=E_2(r_j, \delta_0)$，由此即知定理结论成立. 证毕.

从定理 6.2 的证明不难看出以下事实.

注 6.2 若函数 $F_1(r, \delta_0)$除了 $r_1,\cdots,r_N$ 之外无其他根，则当 $\delta=\delta^*(\varepsilon)$，$\varepsilon E_2(r_1, \delta_0)<0$ 时方程(6.2)除了定理中所述的 $3N$ 个闭轨外别无其他闭轨.

注 6.3 我们所得到的(6.21)的 $3N$ 个解$(r, u)=(r_j^*(u_{ij}, \varepsilon, \delta), u_{ij})$，$i=1, 2, 3$，$j=1, \cdots, N$，均是单重的，它们在小扰动下仍保持，因此必存在 $\varepsilon_0>0$，使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$，$|\delta-\delta_0|<\varepsilon_0$ 且 $\varepsilon E_2(r_1, \delta_0)<0$ 时(6.21)仍有 $3N$ 个解，从而此时(6.2)仍有 $3N$ 个闭轨.

上述定理的条件(iv)中涉及量 $E_2(r, \delta)$，下面我们设 $n=6$ 并利用(6.14)及(6.10)等给出该量的计算公式.

设 $f=(f_1, f_2, f_3)$，$x=(x_1, x_2, x_3)$，$f_j, x_j\in R^2$，$j=1, 2, 3$. 首先，与(6.13)类似可得

$$P_0HR_1=\left(\int_0^{2\pi}e^{J(2\pi-t)}J(2\pi-t)f_3(e^{Jt}re_2, 0, \delta)\mathrm{d}t, 0\right)^T$$

$$\equiv(2\pi rJ^3G(r, \delta), 0)^T, \qquad (6.23)$$

又注意到

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2\pi I & 2\pi^2 I \\ 0 & 2\pi I \end{pmatrix},\ H_1^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{I}{2\pi} & -\dfrac{1}{2}I \\ 0 & \dfrac{I}{2\pi} \end{pmatrix},$$

$$Q'_0(0) = 2\pi \begin{pmatrix} J & I + 2\pi J & 2\pi I + 2\pi^2 J \\ 0 & J & I + 2\pi J \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix}.$$

由此可知

$$P_1 HQ'_0(0)a = (0,\ Jre_2,\ 0)^T \in R^2 \times R^2 \times R^2,$$

$$A_0 ta - P_1 HQ'_0(0)a = (Jre_2 t,\ -Jre_2,\ 0)^T.$$

由(6.10)又知

$$P_0 HR_2 = \left(-\int_0^{2\pi} e^{-Jt} \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(e^{Jt} re_2,\ 0,\ \delta) e^{Jt} Jre_2 \mathrm{d}t,\ 0\right)^T$$

$$\equiv (2\pi r J^3 K(r,\ \delta),\ 0)^T, \tag{6.24}$$

其中

$$K(r,\ \delta) = \frac{-J}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-Jt} \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(e^{Jt} re_2,\ 0,\ \delta) e^{Jt} Je_2 \mathrm{d}t. \tag{6.25}$$

又由于

$$P_0 HQ'_0(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\pi J \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_0 HQ'_0(0) P_1 H = \begin{pmatrix} 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可知

$$P_0 HQ'_0(0) P_1 HR$$

$$= (2\pi r J^3 [S(r,\ \delta) + G(r,\ \delta)],\ 0)^T, \tag{6.26}$$

其中 G 由(6.23)中所给出,且

$$S(r,\delta)=\frac{-1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}e^{-Jt}f_2(e^{Jt}re_2,0,\delta)\mathrm{d}t. \qquad (6.27)$$

于是由(6.14)、(6.13)、(6.23)、(6.24)与(6.26)知

$$\begin{aligned}E(r,\delta)&=F(r,\delta)+G(r,\delta)+K(r,\delta)-(S(r,\delta)+G(r,\delta))\\&=F(r,\delta)+K(r,\delta)-S(r,\delta),\end{aligned}$$

从而由 $F(r_j,\delta_0)=0$ 可得

$$E(r_j,\delta_0)=K(r_j,\delta_0)-S(r_j,\delta_0), \qquad (6.28)$$

利用(6.25)、(6.27)与(6.28)就可以计算 $E_2(r_j,\delta_0)$ 了.

例 6.2 考虑 6 维系统

$$\begin{aligned}&\dot{x}=Jx+y,\ \dot{y}=Jy+z,\\&\dot{z}=Jz+\varepsilon[-(I+\delta J)x-y+|x|^2x], \qquad (6.29)\end{aligned}$$

由于 $J^{-3}=J$,由(6.12)可得

$$\begin{aligned}F(r,\delta)&=J[-(I+\delta J)+r^2I]e_2\\&=(r^2-1,\delta)^T,\end{aligned}$$

由(6.25)与(6.27)又知 $K(r,\delta)=(0,-1)^T$, $S=0$,于是由(6.28)及定理 6.2 可知存在函数 $\delta^*(\varepsilon)=O(\varepsilon)$,使当 $\delta=\delta^*(\varepsilon)$,$\varepsilon>0$ 充分小时(6.29)必有 3 个闭轨,进一步由注 6.2 与注 6.3 知存在 $\varepsilon_0>0$,使当 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$,$|\delta|<\varepsilon_0$ 时(6.29)恰有 3 个闭轨.

一般地可证,存在常数 b 及 a_j, $j=0,\cdots,N$,使方程

$$\begin{aligned}&\dot{x}=Jx+y,\ \dot{y}=Jy+y,\\&\dot{z}=Jz+\varepsilon\left(\sum_{j=0}^{N}a_j|x|^{2j}I+\sum_{j=1}^{N}\delta_jJ|x|^{2(j-1)}x+by\right)\end{aligned}$$

当 $\varepsilon>0$ 且 $|\varepsilon|+|\delta|$ 充分小时有 $3N$ 个闭轨.

我们指出,如果(6.2)的右端函数 f 含有足够多的自由参数 δ,定理 6.2 是不难推广到一般的 $k(\geqslant 4)$, 这一点可从分支方程(6.15)看出.例如,如果 f 关于 x 为 $2N+1$ 次多项式,其系数可取作变动参数,则(6.2)可以出现 kN 个闭轨.

接下来我们研究(6.2)的闭轨产生与消失的方式.如所熟知,两种基本的分支方式是 Hopf 分支与鞍结点型分支,下面我们就来研究这两种分支,且只须设 δ 为一维参数.

对 $|r|$ 充分小,设

$$F_j(r,\delta)=N_{j0}(\delta)+N_{j1}(\delta)r^2+O(r^4),\ j=1,2. \tag{6.30}$$

定理 6.3 设存在 $\delta_0\in R$,使

$$N_{10}(\delta_0)=0,\ N'_{10}(\delta_0)\neq 0,$$
$$N_{11}(\delta_0)N_{20}(\delta_0)\neq 0. \tag{6.31}$$

(i) 若 k 为奇数,则存在函数 $\delta^*(\varepsilon)=\delta_0+O(\varepsilon^{1/k})$,使对充分小的 $|\varepsilon|+|\delta-\delta_0|$,(6.2)在原点邻域内有(惟一)闭轨当且仅当 $N_{11}(\delta_0)N'_{10}(\delta_0)(\delta-\delta^*(\varepsilon))<0$.

(ii) 若 k 为偶数,则对充分小的 $|\varepsilon|+|\delta-\delta_0|$,当 $\varepsilon N_{20}(\delta_0)<0$ 时(6.2)在原点附近无闭轨,当 $\varepsilon N_{20}(\delta_0)>0$ 时存在函数 $\delta_i^*(\varepsilon)=\delta_0+O(|\varepsilon|^{1/k})$, $i=1,2$, 使得若令

$$\mu=N_{11}(\delta_0)N'_{10}(\delta_0)\delta,$$

$$\mu_1(\varepsilon)=\min\{N_{11}(\delta_0)N'_{10}(\delta_0)\delta_i^*(\varepsilon),\ i=1,2\},$$

$$\mu_2(\varepsilon)=\max\{N_{11}(\delta_0)N'_{10}(\delta_0)\delta_i^*(\varepsilon),\ i=1,2\},$$

则(6.2)在原点附近:(1) 当 $\mu<\mu_1^*(\varepsilon)$ 时恰有两个闭轨,(2) 当 $\mu_1^*(\varepsilon)\leqslant\mu<\mu_2^*(\varepsilon)$ 时恰有一个闭轨,(3) 当 $\mu_2^*(\varepsilon)\leqslant\mu$ 时无闭

轨.

证明 今以 k 为偶数的情况为例证之. 注意到(6.30),式(6.15)可写成下述形式

$$M_0(\sigma,\varepsilon,\delta)+M_1(\sigma,\varepsilon,\delta)r+M_2(\sigma,\varepsilon,\delta)r^2+O(\varepsilon r^3)=0,$$

$$-\sigma^k+\varepsilon N_{20}(\delta)+O(\varepsilon^2+\varepsilon r^2+\varepsilon\sigma+\sigma^{k+1})=0, \qquad (6.32)$$

其中

$$M_0=\varepsilon[N_{10}(\delta)+\sigma E_1(0,\delta)]+d_1\sigma^{k+1}+O(\varepsilon^2+\varepsilon\sigma^2+\sigma^{k+2}),$$

$$M_1=O(\varepsilon^2+\varepsilon\sigma),M_2=\varepsilon[N_{11}(\delta)+O(\varepsilon+\sigma)],$$

易见,对充分小的 $|\varepsilon|+|\delta-\delta_0|$,当 $\varepsilon N_{20}(\delta_0)<0$ 时(6.32)第二式无解.

现设 $\varepsilon N_{20}(\delta_0)>0$,则(6.32)第二式有两解:

$$\sigma_i^*(r,\varepsilon,\delta)=[\varepsilon N_{20}(\delta)]^{1/k}[(-1)^i+O(|\varepsilon|^{1/k}+r^2)],i=1,2,$$

将上式代入(6.32)第一式可得

$$G_i(r,\varepsilon,\delta)\equiv g_{0i}(\varepsilon,\delta)+g_{1i}(\varepsilon,\delta)r+g_{2i}(\varepsilon,\delta)r^2+O(r^3)=0,$$

其中

$$g_{0i}=\frac{1}{\varepsilon}M_0(\sigma_i^*(0,\varepsilon,\delta))=N_{10}+(-1)^iN^*(\delta)|\varepsilon|^{1/k}+O(|\varepsilon|^{2/k}),$$

$$N^*(\delta)=[E_1(0,\delta)+d_1N_{20}(\delta)]|N_{20}(\delta)|^{1/k},$$

$$g_{1i}=O(|\varepsilon|^{1/k}),g_{2i}=N_{11}+O(|\varepsilon|^{1/k}),$$

由(6.31)及隐函数定理知,存在 $r_i(\varepsilon,\delta)=O(|\varepsilon|^{1/k})$,使$\frac{\partial G_i}{\partial r}(r_i,\varepsilon,\delta)=0,i=1,2$,从而由 Taylor 公式知

$$G_i(r,\varepsilon,\delta)\equiv g_{0i}^*(\varepsilon,\delta)+g_{2i}^*(\varepsilon,\delta)(r-r_i)^2[1+O(|r-r_i|)],$$

其中

$$g_{0i}^*(\varepsilon,\delta) = G_i(r_i,\varepsilon,\delta) = N_{10}(\delta) + (-1)^i N^*(\delta)|\varepsilon|^{1/k} + O(|\varepsilon|^{2/k}),$$

$$g_{2i}^*(\varepsilon,\delta) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G_i}{\partial r^2}(r_i,\varepsilon,\delta) = N_{11}(\delta) + O(|\varepsilon|^{1/k}).$$

显然，当 $N_{11}(\delta_0)g_{0i}^*(\varepsilon,\delta)>0$ 时有 $G_i(r,\varepsilon,\delta)\neq 0$，而当 $N_{11}(\delta_0)g_{0i}^*(\varepsilon,\delta)<0$ 时 G_i 有两解

$$r = r_i(\varepsilon,\delta) + \sqrt{-g_{0i}^*/g_{2i}^*}[\pm 1 + O(|g_{0i}^*|^{1/2})] \equiv r_i^{\pm}(\varepsilon,\delta),$$

因为 G_i 关于 r 有正根时也必有负根，故当 $N_{11}(\delta_0)g_{0i}^*(\varepsilon,\delta)<0$ 时 $r_i^-<0<r_i^+\equiv r_i^*(\varepsilon,\delta)$，当 $g_{0i}^*=0$ 时 $r_i^{\pm}=0$，于是当且仅当 $N_{11}(\delta_0)g_{0i}^*<0$时(6.32)在 $r>0$ 上有解$(\sigma,r)=(\sigma_i^*(r_i^*,\varepsilon,\delta), r_i^*)$，$i=1,2$.

下证存在函数 $\delta_i^*(\varepsilon)=\delta_0+\Delta_i|\varepsilon|^{1/k}+O(|\varepsilon|^{2/k})$使

$$N_{11}(\delta_0)g_{0i}^* < 0 \Leftrightarrow N_{11}(\delta_0)N'_{10}(\delta_0)(\delta-\delta_i^*) < 0.$$

事实上，由(6.31)及隐函数定理知，存在具上述形式的函数 δ_i^* 使

$$g_{0i}^*(\varepsilon,\delta_i^*) = 0, g_{0i}^* N'_{10}(\delta_0)(\delta-\delta_i^*) \geqslant 0,$$

由此即得上述结论. 此外，由 g_{0i}^* 的形式，可求得

$$\Delta_i = \frac{(-1)^{i+1}N^*(\delta_0)}{N'_{10}(\delta_0)}. \qquad (6.33)$$

于是结论(ii)得证. 证毕.

利用(6.14)可以给出函数 $\delta_i^*(\varepsilon)$中系数 Δ_i 及量$N^*(\delta_0)$的计算公式. 事实上，由(6.33)，只要知道 $N^*(\delta_0)$的计算公式即可. 我们考虑最简单的情况，即 $k=2, n=4$. 与推导(6.28)的过程完全类似，可证(详略)

$$N^*(\delta_0) = -|N_{20}(\delta_0)|^{1/2}[N_1^*(\delta_0) + N_2^*(\delta_0)], \qquad (6.34)$$

其中 $N_1^*(\delta)$与 $N_2^*(\delta)$分别为向量

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-Jt}\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(0,0,\delta)e^{Jt}Je_2\mathrm{d}t$$

与

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} e^{-Jt}Jf_1(e^{Jt}re_2,0,\delta)\mathrm{d}t$$

的第一个分量，其中已设 $f=(f_1,f_2)$，$x=(x_1,\dot{x}_2)$，$f_i,x_i\in R^2$．于是，当 $N^*(\delta_0)\neq 0$ 时必有 $\delta_1^*(\varepsilon)\neq\delta_2^*(\varepsilon)$．

例 6.3 考虑方程

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Jx+y,\\ \dot{y} &= Jy+\varepsilon[(I+\delta J)x+\lambda y-J|x|^2x],\end{aligned}\tag{6.35}$$

由(6.12)、(6.33)及(6.34)易求得

$$F(r,\delta)=(r^2-\delta,-1)^T,N^*=-\lambda,\Delta_i=(-1)^{i+1}\lambda,$$

因此由定理 6.1 与 6.3 知，对充分小的 $|\varepsilon|$，当 $\varepsilon>0$ 时(6.35)无闭轨，当 $\varepsilon<0$ 时存在函数 $\delta_i^*(\varepsilon)=(-1)^{i+1}\lambda|\varepsilon|^{1/2}+O(|\varepsilon|)$，$i=1,2$，使对

$$\delta_+^*(\varepsilon)=\max\{\delta_i^*(\varepsilon)\}=|\lambda|\sqrt{|\varepsilon|}+O(|\varepsilon|),$$

$$\delta_-^*(\varepsilon)=\min\{\delta_i^*(\varepsilon)\}=-|\lambda|\sqrt{|\varepsilon|}+O(|\varepsilon|),$$

当 $\delta>\delta_i^*(\varepsilon)$ 时(6.35)恰有两个闭轨，当 $\delta_-^*(\varepsilon)<\delta\leqslant\delta_+^*(\varepsilon)$ 时(6.35)恰有一个闭轨，当 $\delta\leqslant\delta_-^*(\varepsilon)$ 时(6.35)无闭轨．

如果让 λ 也作为参数，则存在 $\lambda^*(\varepsilon)=O(|\varepsilon|^{1/2})$，使当且仅当 $\lambda=\lambda^*(\varepsilon)$ 时有 $\delta_1^*(\varepsilon)=\delta_2^*(\varepsilon)\equiv\delta^*(\varepsilon)(=O(\varepsilon))$，因此当 $\varepsilon<0$，且 $\lambda=\lambda^*(\varepsilon)$ 时(6.35)有闭轨当且仅当 $\delta>\delta^*(\varepsilon)$，且此时恰有两个闭轨．

读者不妨将上述结果与例 6.1 作一比较．

利用(6.15)可进一步讨论闭轨的鞍结点型分支，即可证下列

定理(请读者自行给出).

定理 6.4 设存在 $r_0>0,\delta_0\in R$ 使

$$F_1(r_0,\delta_0)=\frac{\partial F_1}{\partial r}(r_0,\delta_0)=0,K_0=\frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2}(r_0,\delta_0)\neq 0,$$

$$K_1=\frac{\partial F_1}{\partial \delta}(r_0,\delta_0)\neq 0,K_2=F_2(r_0,\delta_0)\neq 0.$$

(i) 若 k 为奇数,则存在函数 $\delta^*(\varepsilon)=\delta_0+O(|\varepsilon|^{1/k})$,使对充分小的 $|\varepsilon|+|\delta-\delta_0|$,当 $K_0K_1(\delta-\delta^*(\varepsilon))<0(>0)$ 时(6.2)在 L_{r_0} 附近恰有两个闭轨(无闭轨).

(ii) 若 k 为偶数,则对充分小的 $|\varepsilon|+|\delta-\delta_0|$,当 $\varepsilon K_2<0$ 时(6.2)在 L_{r_0} 附近无闭轨,当 $\varepsilon K_2>0$ 时存在函数 $\delta_i^*(\varepsilon)=\delta_0+O(|\varepsilon|^{1/k}),i=1,2$,使对

$$\mu=K_0K_1\delta,\mu_1(\varepsilon)=\min_i\{K_0K_1\delta_i^*(\varepsilon)\},$$

$$\mu_2(\varepsilon)=\max_i\{K_0K_1\delta_i^*(\varepsilon)\},$$

(6.2)在 L_{r_0} 附近当 $\mu<\mu_1$ 时恰有 4 个闭轨,当 $\mu_1=\mu<\mu_2$(或 $\mu=\mu_1=\mu_2$)时恰有 3 个闭轨(或两个闭轨),当 $\mu_1<\mu=\mu_2$ 时恰有 1 个闭轨,当 $\mu>\mu_2$ 时无闭轨.

与 Hopf 分支类似,如果 k 为偶数,则上述定理中的两个分支函数 $\delta_1^*(\varepsilon)$ 与 $\delta_2^*(\varepsilon)$ 一般不相等.

本节所有结果均是作者最近才获得的.

习　　题

1. 考虑标量方程

$$\dot{x}=\varepsilon_1A_0(t)+\varepsilon_2A_1(t)x+\varepsilon_3A_2(t)x^2+A_3(t)x^3,$$

其中 A_j 为 t 的 T 周期连续函数,$\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 为小参数. 试证,如果

$\int_0^T A_3(t)\mathrm{d}t\neq 0$,则当$|\varepsilon|$充分小时上述方程在原点邻域内至多有三个 T 周期解.(提示:设 $u^*(a,\varepsilon)(t)=u_0(t,\varepsilon)+u_1(t,\varepsilon)a+u_2(t,\varepsilon)a^2+u_3(t,\varepsilon)a^3+O(a^4)$,利用注 1.5,并注意到 u_j 满足 $\int_0^T u_j(t,\varepsilon)\mathrm{d}t=0, j=0,1,2,3$,从(1.20)与(1.21)可求出分支函数如下:$\bar{G}(a,\varepsilon)=G_0(\varepsilon)+G_1(\varepsilon)a+G_2(\varepsilon)a^2+G_3(\varepsilon)a^3+O(a^4)$,其中 $G_j(0)=0, j=0,1,2, G_3(0)\neq 0$).

2. 考虑平面周期方程

$$\dot{x}=y, \dot{y}=\varepsilon_1 f_1(t)+\varepsilon_2 f_2(t)x+\varepsilon_3 f_3(t)y+bx^2,$$

其中 $b\neq 0$, f_j 为 T 周期连续函数,$j=1,2,3$,试讨论当$|\varepsilon|$小时局部 T 周期解的个数.

3. 对平面周期方程 $\dot{x}=y, \dot{y}=\varepsilon[(a+b\cos 2t)x+cx^3+dx]$,当 ε 充分小时对怎样的常数 a,b,c,d 有调和解.

4. 讨论方程 $\ddot{x}+x=-x^3+\varepsilon[x+\delta\cos t]$的调和解分支.(提示:令 $y=\dot{x}$,并直接利用定理 1.2 或定理 4.1,或先做变换 $(x,y)^T=e^{Jt}(u,v)^T$,后用这些定理.)

5. 利用注 2.1 证明 C^4 二维系统

$$\dot{x}=Jx+A_0(\varepsilon)x+A_1(\varepsilon)x|x|^2+O(|x|^4)$$

当$|\varepsilon|$充分小时在原点邻域内至多有一个极限环,其中

$$A_j(\varepsilon)=a_j(\varepsilon)I+b_j(\varepsilon)J, j=1,2, a_0(0)=b_0(0)=0, a_1(0)\neq 0.$$

6. 设方程(2.1)为解析系统且满足(2.2)与(2.3),证明,如果 $\varepsilon\in R$ 且存在 $k>1$使

$$\alpha^{(j)}(0)=0, j=0,1,\cdots,k-1, \alpha^{(k)}(0)\neq 0,$$

则当$|\varepsilon|>0$ 充分小时(2.1)至多有办 k 个局部闭轨(见[65])(提示:利用第一章定理 2.7 及其推论).

7. 考虑三维系统

$$\dot{x}=y+\varepsilon x+x^3, \dot{y}=-x+\varepsilon y+yz, \dot{z}=\varepsilon(z+Bx^2+z^2),$$

其中 B 为常数.仿例 2.2 证明式(2.27)中的函数 $\bar{G}_1$ 与 $\bar{G}_2$ 具有形式

$$\bar{G}_1 = \varepsilon + \frac{3}{8}a^2 + \frac{b}{2} + \cdots, \bar{G}_2 = b + \frac{B}{2}a^2 + \cdots,$$

由此证明,若 $B>\frac{3}{2}\left(<\frac{3}{2}\right)$,则对充分小的 $|\varepsilon|$,当 $\varepsilon>0(<0)$ 时上述方程有惟一局部闭轨,当 $\varepsilon<0(>0)$ 时无局部闭轨. 对 $B=\frac{3}{2}$, 试进一步算出 $\bar{G}_2$ 且 $\bar{G}_2=0$ 有解 $b=b(a,\varepsilon)=-\frac{3}{4}a^2-\frac{9}{16}a^4+O(|\varepsilon a|+|a|^6)$, 由此可得 $\bar{G}_1(a,b(a,\varepsilon),\varepsilon)=0$ 有解 $\varepsilon=\frac{9}{32}a^4+O(a^5)$,从而证明当 $\varepsilon>0\ (<0)$ 时所述方程有惟一(无)局部闭轨.

8. 证明描述核自旋发生器的三维系统

$$\dot{x} = y - \beta x, \dot{y} = -x + \beta(k-1)y - \beta k y z, \dot{z} = -\alpha\beta z + k\beta y^2$$

当 $\beta>0$ 充分小且 $\alpha(k-2)>0$ 时有惟一闭轨.

9. 证明系统

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -x + \varepsilon(1 + z - x^2)y, \dot{z} = \varepsilon(x^2 - x^4)$$

当 $|\varepsilon|>0$ 充分小时有惟一闭轨.

10. 证明系统 $\dot{x}=y, \dot{y}=-x+\varepsilon(1+z-x^2)y, \dot{z}=\varepsilon\left(z-\frac{1}{3}z^2+x\right)$ 当 $|\varepsilon|>0$ 充分小时恰有两个闭轨.

11. 考虑 C^∞ 三维系统

$$\dot{x} = [\alpha(\varepsilon)I + \beta(\varepsilon)J]x + X(x,y,\varepsilon), \dot{y} = \gamma(\varepsilon)y + Y(x,y,\varepsilon),$$

其中 $\varepsilon\in R$,证明如果(i)当 $x=0$ 时 $X=0$,当 $\varepsilon=0$ 时 $Y=0$,(ii) $\alpha(0)=\gamma(0)=0, \alpha'(0)\gamma'(0)\neq0$,则当 $|\varepsilon|>0$ 充分小时上述方程至多有一个局部闭轨([65]).

12. 仍考虑第 11 题中的方程,且设(i)成立,又设 $\alpha(0)=\gamma(0)=0, \gamma'(0)\neq0$, 且

$$a\bar{G}_1(a,b(a,0),0) = g_k a^{2k+1} + O(a^{2k+2}), g_k\neq0, k\geqslant1,$$

则当 $|\varepsilon|>0$ 充分小时所述方程至多有 k 个局部闭轨([65]).

13. 证明定理 5.3 的结论(iii).
14. 证明定理 6.4.
15. 考虑四维系统

$$\dot{x} = Jx + \varepsilon f_1(x,y) + f_3(x,y),$$
$$\dot{y} = \frac{3}{2}Jy + \varepsilon g_1(x,y) + g_3(x,y),$$

其中 f_j, g_j 为(x,y)的 j 次齐次式，$j=1,3$，由 Hopf 分支定理知，当$|\varepsilon|$充分小时，该方程可以有周期接近 2π 与 $4\pi/3$ 的局部闭轨，试问当$|\varepsilon|$充分小时，该系统是否有(最小)周期接近 4π 的局部闭轨?(提示：在(3.12)中取 $m=3/2$，则相应的方程(3.8)关于 θ 为 2π 周期的.)

第四章 平面系统的极限环

由于平面自治系统的 Poincaré 映射是一维函数，其性质较易研究清楚，因此对平面自治系统的极限环的分支及其个数我们可以获得较细致的结果. 本章及下一章将专门讨论平面系统极限环的分支理论与定性分析方法.

§1 Hopf 分支与环性数

平面系统的 Hopf 分支是指初等焦点或中心在自治扰动下极限环的分支问题. 虽然 Hopf 分支是一种典型的局部分支，但它是全局分支的一个重要组成部分. 本节我们给出平面 Hopf 分支的一般理论，这些理论对 Liénard 系统的应用将在下一章给出.

1.1 后继函数与焦点量

考虑 C^n 系统($n\geqslant 3$)

$$\dot{x} = f(x, y),\ \dot{y} = g(x, y). \tag{1.1}$$

我们假设

$$f(0, 0) = g(0, 0) = 0,$$

$$\det \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}(0, 0) > \frac{1}{4}(f_x + g_x)^2(0, 0). \tag{1.2}$$

条件(1.2)是说原点是(1.1)的线性化系统的初等焦点或中心，不失一般性，在(1.2)下可设

$$\begin{aligned} f(x, y) &= ax + by + F(x, y),\\ g(x, y) &= -bx + ay + G(x, y), \end{aligned} \tag{1.3}$$

其中 $b\neq0$, F, $G=O(|x, y|^2)$. 对(1.1)引入极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,并利用(1.3)可得

$$\dot{r} = ar + \cos\theta F(r\cos\theta,\ r\sin\theta) + \sin\theta G(r\cos\theta + r\sin\theta),$$

$$\dot{\theta} = -b + \frac{1}{r}[\cos\theta G(r\cos\theta,\ r\sin\theta) - \sin\theta F(r\cos\theta,\ r\sin\theta)]. \tag{1.4}$$

从而可得 2π 周期方程

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = R(\theta,\ r), \tag{1.5}$$

其中 R 为 C^{n-1} 函数,而当 $r>0$ 时,R 为 C^n 的,$R(\theta, 0)=0$ 且关于 θ 为 2π 周期的. 设 $r(\theta, r_0)$为(1.5)的满足 $r(0, r_0)=r_0$ 的解,则它关于(θ, r_0)为 C^{n-1}的,从而可设

$$\begin{aligned} r(\theta,\ r_0) = & r_1(\theta)r_0 + r_2(\theta)r_0^2 + \cdots \\ & + r_{n-1}(\theta)r_0^{n-1} + o(r_0^{n-1}). \end{aligned} \tag{1.6}$$

于是(1.5)的 Poincaré 映射为 $P(r_0) = r(2\pi,\ r_0)$. 令 $d(r_0)=P(r_0)-r_0$. 首先可证

引理 1.1 设存在 $m<n$ 使

$$d(r_0) = 2\pi\Delta_m r_0^m + o(r_0^m), \quad \Delta_m \neq 0, \tag{1.7}$$

则 m 必为奇数.

证明 不妨设 $b<0$, $\Delta_m>0$,则当 $0<r_0\ll1$ 时 $d(r_0)>0$,从而 $P(r_0)>r_0$,于是原点是(1.1)的不稳定焦点,因此当 $0<-r_0\ll1$ 时应有 $P(r_0)<r_0$,即 $d(r_0)<0$,从而可知,当 $0<|r_0|\ll1$ 时有 $r_0d(r_0)>0$,由此即知(1.7)中的 m 必为奇数. 证毕.

定义 1.1 称函数 $d(r_0)$为(1.1)的后继函数. 若(1.7)成立,且 $m=2k+1$,则称原点为(1.1)的 k 阶细焦点,并称 Δ_m 为(1.1)的 k 阶 Liapunov 量或 k 阶焦点(判别)量.

易知上述定义与第一章定义 6.1 中有关细焦点的概念是一致的.

我们指出,若在(1.3)中 $b<0$,则 $\dot{\theta}>0$,因此由(1.7)知,当 $\Delta_m<0(>0)$时原点为稳定(不稳定)焦点,但若 $b>0$,则 $\dot{\theta}<0$,此时点$(r_0, 0)$为点$(P(r_0), 0)$的正向后继点,从而当 $\Delta_m<0(>0)$时原点为不稳定(稳定)焦点.

引理 1.2 设在(1.3)中 $a=0$,又设

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_{i+j=2}^{3} a_{ij}x^i y^j + o(|x, y|^3), \\ G(x, y) &= \sum_{i+j=2}^{3} b_{ij}x^i y^j + o(|x, y|^3), \end{aligned} \tag{1.8}$$

则量 Δ_3 有表达式

$$\begin{aligned} \Delta_3 = \frac{-1}{8b}\Big\{ & 3(a_{30}+b_{03}) + a_{12} + b_{21} - \frac{1}{b}[a_{11}(a_{20}+a_{02}) \\ & - b_{11}(b_{20}+b_{02}) + 2(a_{02}b_{02} - a_{20}b_{20})]\Big\}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

且当 $-b\Delta_3<0(>0)$时原点为稳定(不稳定)一阶细焦点.

证明 把(1.8)中 F,G 的二次与三次项分别记为 F_2, G_2 与 F_3, G_3,则由(1.4)与(1.5)可知

$$R(\theta, r) = -ar/b + R_2(\theta)r^2 + R_3(\theta)r^3 + o(r^3),$$

其中

$$\begin{aligned} R_2(\theta) &= -b^{-1}[P_2(\theta) + ab^{-1}S_2(\theta)], \\ R_3(\theta) &= -b^{-1}[P_3(\theta) + b^{-1}P_2(\theta)S_2(\theta) \\ &\qquad + ab^{-2}(bS_3(\theta) + S_2^2(\theta))], \\ P_k(\theta) &= \cos\theta F_k(\cos\theta, \sin\theta) + \sin\theta G_k(\cos\theta, \sin\theta), \\ S_k(\theta) &= \cos\theta G_k(\cos\theta, \sin\theta) - \sin\theta F_k(\cos\theta, \sin\theta), \\ &\qquad k=2,3. \end{aligned} \tag{1.10}$$

将(1.6)代入(1.5)可得

$$\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{a}{b}r_1,\ \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{a}{b}r_2+r_1^2R_2,$$

$$\frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{a}{b}r_3+2r_1r_2R_2+r_1^3R_3.$$

注意到初值条件 $r_1(0)=1$，$r_2(0)=r_3(0)=0$,可解得

$$r_1(\theta)=e^{-a\theta/b},\ r_2(\theta)=r_1(\theta)\int_0^\theta r_1(s)R_2(s)\mathrm{d}s,$$

$$r_3(\theta)=r_1(\theta)\int_0^\theta[2r_2(s)R_2(s)+r_1^2(s)R_3(s)]\mathrm{d}s.$$

因此

$$\Delta_1=\frac{1}{2\pi}d'(0)=\frac{1}{2\pi}[r_1(2\pi)-1]=\frac{1}{2\pi}[e^{-2\pi a/b}-1],$$

由引理 1.1,当 $a=0$ 时有

$$r_2(2\pi)=\int_0^{2\pi}R_2\mathrm{d}\theta=0,$$

从而有

$$r_3(2\pi)=\int_0^{2\pi}R_3\mathrm{d}\theta+\int_0^{2\pi}2r_2\mathrm{d}r_2=\int_0^{2\pi}R_3\mathrm{d}\theta.$$

由(1.8)与(1.10)直接计算可得

$$-bR_3=P_3+b^{-1}P_2S_2=\cos\theta F_3+\sin\theta G_3-b^{-1}K(\theta),$$

$$\cos\theta F_3+\sin\theta G_3=(a_{12}+b_{21})\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$+a_{30}\cos^4\theta+b_{03}\sin^4\theta+K_0(\theta),$$

$$K(\theta)=a_{02}b_{02}\sin^6\theta-a_{20}b_{20}\cos^6\theta$$
$$+N_1\sin^4\theta\cos^2\theta+N_2\sin^2\theta\cos^4\theta+K_1(\theta),$$

其中 $K_0(\theta)$与 $K_1(\theta)$的平均值为零,而

$$N_1 = 2a_{02}a_{11} - 2b_{02}b_{11} + a_{02}b_{20} + a_{11}b_{11} + a_{20}b_{02} - a_{02}b_{02},$$

$$N_2 = 2a_{20}a_{11} - 2b_{20}b_{11} - a_{02}b_{20} - a_{11}b_{11} + a_{20}b_{20} - a_{20}b_{02},$$

于是可知,当 $a=0$ 时

$$\Delta_3 = \frac{-1}{2\pi b}\left\{(a_{30} + b_{03})\frac{3}{4}\pi + (a_{12} + b_{21})\frac{1}{4}\pi - b^{-1}\left[(a_{02}b_{02} - a_{20}b_{20})\frac{5}{8}\pi + (N_1 + N_2)\frac{\pi}{8}\right]\right\},$$

即得(1.9),证毕.

由(1.8)易知,式(1.9)可改写为

$$\Delta_3 = \frac{-1}{16b}\left\{F_{xxx} + F_{xyy} + G_{xxy} + G_{yyy} - \frac{1}{b}[F_{xy}(F_{xx} + F_{yy}) - G_{xy}(G_{xx} + G_{yy}) - F_{xx}G_{xx} + F_{yy}G_{yy}]\right\}\Bigg|_{(0,\ 0)}. \quad (1.11)$$

如果(1.1)不满足(1.3),令 $a=f_x(0,\ 0)$, $b=f_y(0,\ 0)$,$c=g_x(0,\ 0)$,$d=g_y(0,\ 0)$, $B=\sqrt{ad-bc}$,则当 $a+d=0$, $c\neq 0$ 时,对(1.1)做线性变换

$$x = \frac{1}{c}(Bu + av),\ y = v,$$

可得

$$\dot{u} = -Bv + F(u,\ v),\ \dot{v} = Bu + G(u,\ v), \quad (1.12)$$

其中

$$-Bv + F(u,\ v) = \frac{1}{B}[cf(x,\ y) - ag(x,\ y)],$$

$$Bu + G(u,\ v) = g(x,\ y),$$

因此对方程(1.12)可利用公式(1.9)或(1.11)来计算 Δ_3. 事实

上,可对原系统(1.1)给出量 Δ_3 的表达式. 把(1.1)改写为下述形式:

$$\dot{x} = ax + by + \sum_{i+j\geqslant 2} a_{ij}x^i y^j,$$
$$\dot{y} = cx + dy + \sum_{i+j\geqslant 2} b_{ij}x^i y^j,$$

则当 $a+d=0$, $B=\sqrt{ad-bc}>0$ 时有

$$\Delta_3 = \frac{-1}{8bB^3}\{[ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + ab(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{20})$$
$$+ c^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - 2ac(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2ab(a_{20}^2 - b_{20}b_{02})$$
$$- b^2(b_{11}b_{20} + 2a_{20}b_{20}) + (bc - 2a^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20})]$$
$$- (a^2 + bc)[3(cb_{03} - ba_{30}) + 2a(a_{21} + b_{12}) + (ca_{12} - bb_{21})]\}.$$

上式的推导可见[2].

如果(1.1)为 C^∞ 系统,且满足(1.2)与(1.3)且 $a=0, b=-1$,则令

$$z = x + iy,\ \bar{z} = x - iy,\ i = \sqrt{-1},$$

(1.1)可写成下述复形式

$$\dot{z} = iz + \sum_{k\geqslant 2} F_k(z,\ \bar{z}),$$

其中 F_k 为$(z,\ \bar{z})$的具复系数的 k 次齐次式,例如 $F_2,\cdots,F_5$ 可具体写出为

$$F_2 = Az^2 + Bz\bar{z} + c\bar{z}^2,$$
$$F_3 = Dz^3 + Ez^2\bar{z} + Fz\bar{z}^2 + G\bar{z}^3,$$
$$F_4 = Hz^4 + Iz^3\bar{z} + Jz^2\bar{z}^2 + Kz\bar{z}^3 + L\bar{z}^4,$$
$$F_5 = Mz^5 + Nz^4\bar{z} + Oz^3\bar{z}^2 + Pz^2\bar{z}^3 + Qz\bar{z}^4 + R\bar{z}^5,$$

此时一阶 Liapunov 量有如下简洁的表达式

$$\Delta_3 = \mathrm{Re}(E) - \mathrm{Im}(AB),$$

其中 Re 与 Im 分别表示复数的实部与虚部. Gasull 与 Guillamon ([28])进一步给出了第二、三阶 Liapunov 量 Δ_5 与 Δ_7 的表达式,例如 Δ_5 可表示为(Δ_7 甚繁,从略)

$$\begin{aligned}\Delta_5 = \frac{1}{6}[&6\mathrm{Re}(O) + \mathrm{Im}(3E^2 - 6DF + 6A\bar{I} - 12BI - 6B\bar{J} - 8CH \\ &- 2C\bar{K}) + \mathrm{Re}(-8C\bar{C}E + 4AC\bar{F} + 6A\bar{B}F + 6B\bar{C}F - 12B^2D \\ &- 4ACD - 6A\bar{B}\bar{D} + 10B\bar{C}\bar{D} + 4A\bar{C}G + 2BC\bar{G}) + \mathrm{Im}(6A\bar{B}^2C \\ &+ 3A^2B^2 - 4A^2\bar{B}C + 4\bar{B}^3C)].\end{aligned}$$

Bautin 于 1952 年证明了任意平面二次系统的焦点至多是三阶的,并导出了焦点的判别量公式,见[131]. 如果将以原点为细焦点的平面(实)二次系统写成复形式

$$\dot{z} = iz + Az^2 + Bz\bar{z} + C\bar{z}^2,$$

则这些焦点判别量公式如下:

$$\Delta_3 = -\mathrm{Im}(AB),$$

$$\Delta_5 = -\frac{1}{3}\mathrm{Im}[(2A + \bar{B})(A - 2\bar{B})\bar{B}C],$$

$$\Delta_7 = -\frac{5}{8}\mathrm{Im}[(|B|^2 - |C|^2)(2A + \bar{B})\bar{B}^2C].$$

有关这些公式的来源及进一步文献可参考专著[138].

关于二次系统极限环的最大个数问题至今仍未解决. 李承治([87])证明了二次系统在三阶细焦点外没有极限环, 最近张平光([143])证明了二次系统在二阶细焦点外至多有一个极限环.

1.2 Hopf 环性数与极限环的分支

考虑 C^n 扰动系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) + \varepsilon p(x, y, \varepsilon, \delta),\\ \dot{y} &= g(x, y) + \varepsilon q(x, y, \varepsilon, \delta),\end{aligned} \tag{1.13}$$

其中 ε 为小参数，$\delta \in D \subset R^m$，D 为紧集，$m \geqslant 1$. 设原点为(1.13)的奇点.

定理 1.1 设 $2k+1<n$，且当 $\varepsilon=0$ 时(1.13)满足(1.2)与(1.3)且以原点为 k 阶细焦点，则存在 $\varepsilon_0>0$ 及原点的邻域 V，使当 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$，$\delta \in D$ 时(1.1)在 V 中至多有个 k 个极限环. 特别，如果 $k=1$，则(1.1)在 V 中有惟一极限环当且仅当 $b\alpha(\varepsilon, \delta)\Delta_3>0$，其中 Δ_3 由(1.11)给出，$\alpha(\varepsilon, \delta)$ 为(1.13)在原点的特征值实部.

证明 不失一般性，可设

$$\begin{aligned}& f(x, y) + \varepsilon p(x, y, \varepsilon, \delta)\\ &\quad = \alpha(\varepsilon, \delta)x + \beta(\varepsilon, \delta)y + O(|x, y|^2),\\ & g(x, y) + \varepsilon q(x, y, \varepsilon, \delta)\\ &\quad = -\beta(\varepsilon, \delta)x + \alpha(\varepsilon, \delta)y + O(|x, y|^2).\end{aligned} \tag{1.14}$$

于是对(1.13)引入极坐标变换可得形如(1.5)的 2π 周期方程

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = R(\theta, r, \varepsilon, \delta),$$

由引理 1.2 的证明知，该方程的 Poincaré 映射与后继函数具有形式

$$\begin{aligned} d(r_0, \varepsilon, \delta) &= P(r_0, \varepsilon, \delta) - r_0\\ &= A(\varepsilon, \delta)r_0 + B(\varepsilon, \delta)r_0^2 + C(\varepsilon, \delta)r_0^3 + \cdots,\end{aligned}$$

其中

$$A(\varepsilon, \delta) = e^{-2\pi\alpha/\beta} - 1, B(\varepsilon, \delta) = O(A) = O(\alpha),$$

$$C(0, \delta) = 2\pi\Delta_3.$$

若当 $\varepsilon=0$ 时(1.13)以原点为 k 阶细焦点,则由定义 1.1 及 Rolle 定理易证 C^{n-1}类函数 $d(r_0, \varepsilon, \delta)$关于 r_0 至多有 $2k+1$ 个根,其中至多 k 个为正根,即得定理的第一部分. 若 $k=1$,则注意到

$$A(\varepsilon, \delta) = \frac{-2\pi\alpha}{\beta}(1+O(\alpha)),\ \beta = b + O(\varepsilon),$$

当$|\varepsilon|$充分小时,$d(r_0, \varepsilon, \delta)$关于 r_0 有正根当且仅当 $AC<0$,即 $b\alpha\Delta_3>0$. 证毕.

如同前面所讨论的,当焦点阶数高于 3 时,确定焦点的阶数及其稳定性是一项极其困难的工作. 例如,到目前为止,人们仍不知道完整的三次系统的细焦点的最高阶数,有关结果表明,这一阶数不低于 11,见[166].

下设当 $\varepsilon=0$ 时(1.13)以原点为初等中心奇点,则有 $d(r_0, 0, \delta)=0$,从而后继函数 d 可写成形式

$$d(r_0, \varepsilon, \delta) = 2\pi\varepsilon r_0[\Delta_1^*(\varepsilon, \delta) + \Delta_2^*(\varepsilon, \delta)r_0 + \Delta_3^*(\varepsilon, \delta)r_0^2 + \cdots], \tag{1.15}$$

其中

$$\Delta_1^* = \frac{1}{2\pi\varepsilon}A(\varepsilon, \delta) = \frac{-\alpha}{\varepsilon\beta}(1+O(\alpha)),$$

而 $\varepsilon\Delta_3^*$ 为在(1.14)下当 $\alpha=0$ 时套用公式(1.9)或(1.11)所得的量.

利用(1.15),与定理 1.1 类似可证

定理 1.2 设 C^3 系统(1.13)满足(1.2),(1.3) 与(1.14),且当 $\varepsilon=0$ 时,以原点为初等中心,则当$|\varepsilon|$充分小时(1.13)在原点附近有极限环的必要条件是存在 $\delta_0\in D$ 使$\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}(0, \delta_0) = -b\Delta_1^*(0, \delta_0)=0$. 设 $\Delta_1^*(0, \delta_0)=0$,$\Delta_3^*(0, \delta_0)\neq0$,则存在 $\varepsilon_0>0$ 使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$, $|\delta-\delta_0|<\varepsilon_0$ 时(1.13)在原点邻域内至多有一个极

限环，且当且仅当 $b\varepsilon\alpha\Delta_3^* > 0$ 时有极限环.

例 1.1 考虑二次系统

$$\dot{x} = y + \varepsilon(x^2 - \varepsilon x),\ \dot{y} = -(-x^2 + x), \qquad (1.16)$$

我们证明当 $0 < \varepsilon \ll 1$ 时,该系统在原点邻域内有惟一极限环.

首先注意到,上述系统不具有(1.14)的形式,又易知(1.16)在原点的发散量为 $-\varepsilon^2 = 2\alpha$,而当 $\alpha = 0$ 时(1.16)为可积系统,因此此时算得的 Δ_3 必为零,这说明对(1.16)不能直接套用公式(1.9).为了能够应用定理 1.2,我们对(1.16)做如下变形

$$\dot{x} = y + \varepsilon(x^2 - \delta x),\ \dot{y} = -(-x^2 + x), \qquad (1.17)$$

其中 δ 为自由参数,当 $\delta = 0$ 时,(1.17)具有(1.14)的形式,且由(1.9)易算出当 $\delta = 0$ 时有

$$\Delta_3 = -\frac{1}{4}\varepsilon,\ \Delta_3^* = -\frac{1}{4} < 0,$$

又易知 $\alpha(\varepsilon, \delta) = -\frac{1}{2}\varepsilon\delta$,从而 $\alpha_\varepsilon(0, 0) = 0$,于是由定理 1.2 知,当 $\varepsilon > 0$ 与 $\varepsilon > 0$ 均充分小时,(1.17)在原点邻域内有惟一极限环.特别取 $\delta = \varepsilon$,即知当 $\varepsilon > 0$ 充分小时(1.16)在原点邻域内有惟一极限环.

定义 1.2 设 U 为 D 的子集,如果存在 $\varepsilon_0 > 0$,使当 $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0, \delta \in U$ 时,(1.13)在原点的某邻域内至多有 k 个极限环,且存在这样的(ε, δ)使 k 个极限环可以出现,则称数 k 为(1.13)当 $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0, \delta \in U$ 时在原点的环性数(cyclicity),有时称 k 为(1.13)的 Hopf 环性数或原点关于(1.13)的环性数.

于是定理 1.2 给出了(1.13)在原点的环性数为 1 的条件,其中 $\Delta_3^*(0, \delta_0) \neq 0$ 称为(涉及中心扰动的)Hopf 分支中的非退化条件.

下面我们设(1.13)为 C^∞ 系统,且当 $\varepsilon = 0$ 时(1.13)为 Hamilton 系统,并讨论确定 Hopf 环性数的一般方法.设有 C^∞ 函数

$H(x, y)$,使成立

$$(f(x, y), g(x, y)) = \mu(H_y, -H_x), \mu = \pm 1,$$
$$H(x, y) = K(x^2 + y^2) + O(|x, y|^3), \tag{1.18}$$
$$x^2 + y^2 \ll 1, K > 0.$$

易见,当 $0<h\ll 1$ 时曲线 $H(x, y)=h$ 在原点附近有闭分支 L_h,其与正 x 轴的交点记为 $A(h)=(a(h), 0)$,设 $B(h, \epsilon, \delta)$表示(1.13)过 $A(h)$的正半轨线绕原点一周后于正 x 轴的交点,则有

$$H(B)-H(A)=\int_{AB} dH=\epsilon[M(h, \delta)+O(\epsilon)], \tag{1.19}$$

其中

$$M(h, \delta)=\frac{1}{\mu}\oint_{L_h}(fq-gp)\mathrm{d}t\Big|_{\epsilon=0}$$
$$=\frac{1}{\mu}\oint_{L_h}(q\mathrm{d}x-p\mathrm{d}y)\Big|_{\epsilon=0}. \tag{1.20}$$

通常称 M 为(1.13)的(第一阶)Melnikov 函数.

我们有下述定理.

定理 1.3 设 C^∞ 系统(1.13)满足(1.18),且设原点为(1.13)的初等奇点,则

(i) 存在 $h^*>0$,使函数 $M(h, \delta)$在$[0, h^*)$上关于 h 为C^∞的,而若 L_{h^*} 有界,则在 $h=h^*$ 处一般仅为连续的. 如果(1.13)为解析的,则 $M(h, \delta)$在$[0, h^*)$上关于 h 为解析的.

(ii) 如果存在紧集 $D_0\in D$ 及函数$B_k(\delta)$使成立

$$M(h, \delta) = B_k(\delta)h^{k+1} + O(h^{k+2}),$$
$$0< h \ll 1, k \geqslant 0, B_k(\delta) \neq 0, \delta \in D_0, \tag{1.21}$$

则存在 $\epsilon_0>0$ 及开集 $U(D_0)\supset D_0$ 和原点的邻域 V,使对 $0<$

$|\varepsilon|<\varepsilon_0$，$\delta\in U(D_0)$，(1.13)在 V 中至多有 k 个极限环，即(1.13)在原点的环性数不超过 k.

证明 设 $u(t, c)$表示(1.1)的以$(c, 0)$为初值的解，则由(1.18)有

$$H(c, 0) = c^2(K + S(c)),\ S(0) = 0,\ S \in C^\infty.$$

设 $r(c)=c\sqrt{K+S(c)}$，则 $r\in C^\infty$. 由于 H 为(1.1)的首次积分，于是成立

$$H(u(t, c)) \equiv r^2(c),\ t \in R.$$

设 $r=r(c)$的反函数为 $c=c(r)$，记 $v(t, r)=u(t, c(r))$，则方程 $H(x, y)=r^2$ 定义了(1.1)的一闭轨线，其周期记为 $T(r)$. 易见

$$H(v(t, r)) \equiv r^2,\ v(T(r), r) = (c(r), 0).$$

又由于 $v(t, r)$与 $T(r)$均为 C^∞ 函数，且 $T(0)>0$，若设

$$G(\theta, r) = v\left(\frac{T(r)\theta}{2\pi}, r\right).$$

则 G 为C^∞ 函数，且关于 θ 为 2π 周期的.

与第二章引理 5.2 完全类似可证(或令 $h=r^2$ 并直接应用该引理)，在变换$(x, y)=G(\theta, r)$下方程(1.13)成为柱面系统

$$\dot\theta = \frac{2\pi}{T(r)}\left[1 + \frac{\varepsilon G_r \wedge (p(G, \varepsilon, \delta), q(G, \varepsilon, \delta))}{G_r \wedge (f(G), g(G))}\right],$$

$$\dot r = \frac{\varepsilon}{2r}DH(G)\cdot(p(G, \varepsilon, \delta), q(G, \varepsilon, \delta))^T,$$

注意到 $H(G)=r^2$，对 r 求导可得$DH(G)G_r=2r$，因此由(1.18)知 $G_r\wedge(f(G), g(G))=\pm 2r$，又注意到 $p(G, \varepsilon, \delta)$, $q(G, \varepsilon, \delta)=O(r)$，可知上述柱面系统为 C^∞ 光滑的，于是得到下列 2π 周期方程

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \varepsilon R(\theta,\ r,\ \varepsilon,\delta), \tag{1.22}$$

其中

$$R(\theta,\ 0,\ \varepsilon,\ \delta) = 0,$$

$$R(\theta,\ r,\ 0,\ \delta) = \frac{T(r)}{4\pi r} DH(G)\cdot(p(G,\ 0,\ \delta),$$

$$q(G,\ 0,\ \delta))^T. \tag{1.23}$$

易见,(1.13)在原点附近每个极限环对应于(1.22)在 $r=0$ 附近的两个 2π 周期解(一个为正,一个为负). 设 $P(r,\ \varepsilon,\delta)$表示(1.22)的 Poincaré 映射,则它可以写为

$$P(r,\ \varepsilon,\ \delta) = r + \varepsilon r F(r,\ \varepsilon,\delta), \tag{1.24}$$

其中

$$rF(r,\ 0,\ \delta) = \int_0^{2\pi} R(\theta,\ r,\ 0,\ \delta)\mathrm{d}\theta \equiv R_0(r,\ \delta).$$

由于 $\dot\theta>0$,当 ε 充分小时,原点是(1.13)的稳定(不稳定)焦点当且仅当 $r=0$ 是(1.22)的稳定(不稳定)平凡解,后者等价于对固定的(ε,δ),当$|r|$充分小时有

$$r[P(r,\ \varepsilon,\ \delta)-r]=\varepsilon r^2 F(r,\ \varepsilon,\ \delta)\leqslant 0(\geqslant 0), \tag{1.25}$$

由此知,若有

$$R_0(r,\ \delta) = b_m^*(\delta)r^m + O(r^{m+1}),\ b_m^*(\delta)\neq 0,\ \delta\in D_0, \tag{1.26}$$

则 m 必为奇数,即 $m=2k+1,\ k\geqslant 0$,于是对于(1.24)应用 Rolle 定理知,如果(1.26)对于 $\delta\in D_0$ 成立,则存在 $\varepsilon_0>0$ 与 D_0 的邻域 U,使对 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0,\delta\in U(D_0)$,函数 F 关于 r 至多有 $2k$ 个根,这蕴含(1.13)在原点附近至多有 k 个极限环.

我们进一步建立函数 R_0 与 M 之间的关系. 由(1.23)与

(1.18)

$$R_0(r,\delta)=\frac{1}{2r\mu}\oint_{H=r^2}(f,g)\wedge(p,q)\Big|_{\varepsilon=0}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2r\mu}\oint_{H=r^2}(q\mathrm{d}x-p\mathrm{d}y)\Big|_{\varepsilon=0},\qquad(1.27)$$

从上述表达式右端即可看出 R_0 关于 r 为奇函数,从而 $M^*(r,\alpha)\equiv 2rR_0(r,\delta)$关于 r 为偶函数. 由于 M^* 为 C^∞的,对任意的 $j\geqslant 1$,M^* 有下述展式

$$M^*(r,\alpha)=\sum_{i=1}^{j}A_ir^{2i}+N(r),$$

其中 N 为C^∞偶函数,且 $N^{(i)}(0)=0,\ i=0,1,\cdots,2j$. 记 $\overline{N}(h)=N(\sqrt{h})$,由归纳法易证

$$\overline{N}^{(i)}(0)=0,\quad i=0,1,\cdots,j.$$

事实上,可证

$$\overline{N}^{(i)}(h)=h^{j-i}\widetilde{N}_i(\sqrt{h}),\ i=0,\cdots,j.\qquad(1.28)$$

其中 $\widetilde{N}_i(r)$关于 r 为C^∞的,且 $\widetilde{N}_i(0)=0$. 为证(1.28),由关于 $N(r)$的条件知 $N(r)$满足

$$N^{(i)}(r)=r^{2j-i}N_i(r),\ N_i\in C^\infty,\ N_i(0)=0,\ i=0,1,\cdots,2j.$$

显然,当 $i=0$ 时(1.28)成立,即 $\overline{N}(h)=h^jN_0(\sqrt{h})$,由此知

$$(\overline{N}(h))'=[h^jN_0(\sqrt{h})]'=h^{j-1}[jN_0(\sqrt{h})+\frac{1}{2}\sqrt{h}N'_0(\sqrt{h})].$$

令

$$\widetilde{N}_1(r)=jN_0(r)+\frac{1}{2}rN'_0(r),$$

则 $\widetilde{N}_1(r)\in C^\infty$,$\widetilde{N}_1(0)=0$,于是当 $i=1$ 时(1.28)成立. 设对 $i=$

k,(1.28)成立,则

$$\widetilde{N}^{(k+1)}(h) = [h^{j-k}\widetilde{N}_k(\sqrt{h})]'$$
$$= h^{j-k-1}[(j-k)\widetilde{N}_k(\sqrt{h}) + \frac{1}{2}\sqrt{h}\widetilde{N}'_k(\sqrt{h})],$$

令

$$\widetilde{N}_{k+1}(r) = (j-k)\widetilde{N}_k(r) + \frac{1}{2}r\widetilde{N}'_k(r),$$

即知(1.28)对 $i=k+1$ 成立. 于是(1.28)得证.

式(1.28)说明对充分小的 $h\geqslant 0, \overline{N}\in C^j$,令

$$\overline{M}(h,\delta) = \sum_{i=1}^{j} A_i h^i + \overline{N}(h),$$

则 $\overline{M}\in C^j$,由 j 的任意性便知 $\overline{M}\in C^\infty$,由(1.18),(1.27)与(1.20)知

$$\overline{M}(h,\delta) = M^*(\sqrt{h},\delta) = 2\sqrt{h}R_0(\sqrt{h},\delta) = M(h,\delta),$$

于是(1.21)成立当且仅当(1.26)成立,且 $m=2k+1$.

若(1.13)为解析系统,则(1.22)也为解析系统,于是 $R_0(h,\delta)$与 $M^*(h,\delta)$为解析函数,且 M^* 关于 r 为偶函数. 利用 M^* 在 $r=0$ 的幂级数展开式即知 $M(h,\delta)=M^*(\sqrt{h},\delta)$关于充分小的 $h\geqslant 0$ 为解析函数.

若对一切 $h>0, L_h$ 均为闭轨,则对一切 $h\geqslant 0, M$ 为 C^∞ 的或解析的. 若存在 $h^*>0$,使当 $0<h<h^*$ 时,L_h 为闭轨,当 $h=h^*$ 时 L_h 不是闭轨(即它或是一条无界曲线或是一条含有奇点的奇闭轨),则由上述讨论知 M 在$[0,h^*)$上为 C^∞ 的或解析的. 若 L_{h^*} 为有界的奇闭轨,则由(1.20)右端即知当 $h\to h^*$ 时 M 必存在有限极限,即 M 在 $h=h^*$ 处连续. 证毕.

我们指出,通过建立(1.15)中的后继函数 $d(r_0,\varepsilon,\delta)$与

(1.19)的关系也能证明定理 1.3 的结论(ii),并且由此可证 $B_1(\delta)\neq 0$ 与 $\Delta_3^*(0,\ \delta)\neq 0$ 等价(见[65]).

由定理 1.3(ii)即知

推论 1.1 如果存在整数 $k\geqslant 0$, $\delta_0\in D$ 使对原点的任一邻域 V,都存在 $0<|\varepsilon|\ll 1$, $|\delta-\delta_0|\ll 1$,使(1.13)在 V 内有 k 个极限环,则 $M(h,\ \delta_0)=O(h^{k+1})$.

若存在 $\delta_0\in D_0$ 使 $M(h,\ \delta_0)\equiv 0$,但 $M(h,\ \delta)\neq 0$,则条件(1.21)就不成立了. 下列定理处理这种退化情况.

定理 1.4 设 C^∞ 系统(1.13)满足(1.18)且以原点为初等奇点,又设

(i) 函数 M 的展开式

$$M(h,\ \delta)=b_0(\delta)h+b_1(\delta)h^2+\cdots+b_k(\delta)h^{k+1}+O(h^{k+2}),\ 0<h\ll 1 \tag{1.29}$$

中的系数满足

$$b_j(\delta_0)=0,\ j=0,\cdots,k-1,$$

$$\det\frac{\partial(b_0,\cdots,b_{k-1})}{\partial(\delta_1,\cdots,\delta_k)}(\delta_0)\neq 0, \tag{1.30}$$

其中 $\delta_0\in D$, $\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_m)$, $m\geqslant k\geqslant 1$;

(ii) 存在 k 维向量函数 $\varphi(\varepsilon,\ \delta_{k+1},\cdots,\delta_m)$,使当 $(\delta_1,\cdots,\delta_k)=\varphi(\varepsilon,\ \delta_{k+1},\cdots,\delta_m)$,且 $|\varepsilon|+|\delta-\delta_0|$ 充分小时(1.13)以原点为中心,则存在 $\varepsilon_0>0$ 与原点的邻域 V,使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$, $|\delta-\delta_0|<\varepsilon_0$ 时(1.13)在 V 中至多有 $k-1$ 个极限环,且 $k-1$ 个极限环可以实现. 换句话说,(1.13)在原点的环性数为 $k-1$.

证明 由于 $M(h,\ \delta)=rR_0(r,\ \delta)$, $r=\sqrt{h}$,于是

$$R_0(r,\delta)=r\Big[\sum_{j=0}^{k}b_j(\delta)r^{2j}+O(r^{2k+2})\Big].$$

将(1.24)中的 C^∞ 函数 F 写为

$$F(r,\varepsilon,\delta)=\sum_{j=0}^{2k-1}C_j(\varepsilon,\delta)r^j+r^{2k}Q(r,\varepsilon,\delta),\tag{1.31}$$

其中 Q 为C^∞ 函数且

$$C_{2j}(0,\delta)=b_j(\delta),\ C_{2j+1}(0,\delta)=0,\ j=0,\cdots,k-1.$$

由(1.30),方程组 $b_j=C_{2j}(\varepsilon,\delta)$, $j=0,\cdots,k-1$, 有解

$$(\delta_1,\cdots,\delta_k)=\bar{\varphi}(\varepsilon,b_0,\cdots,b_{k-1},\delta_{k+1},\cdots,\delta_m),\tag{1.32}$$

由条件(ii)知,当$(\delta_1,\cdots,\delta_k)=\varphi(\varepsilon,\delta_{k+1},\cdots,\delta_m)$时有 $P(r,\varepsilon,\delta)-r=0$,从而必有 $C_{2j}(\varepsilon,\delta)=0$, $j=0,\cdots,k-1$,于是由隐函数定理中解的惟一性知

$$\begin{aligned}&\bar{\varphi}(\varepsilon,b_0,\cdots,b_{k-1},\delta_{k+1},\cdots,\delta_m)\\&\quad=\varphi(\varepsilon,\delta_{k+1},\cdots,\delta_m)\Leftrightarrow b_0=\cdots=b_{k-1}=0,\end{aligned}\tag{1.33}$$

将(1.32)代入(1.31)可得

$$\begin{aligned}F=&\sum_{j=0}^{k-1}[b_jr^{2j}+C_{2j+1}(\varepsilon,\bar{\varphi},\delta_{k+1},\cdots,\delta_m)r^{2j+1}]\\&+r^{2k}Q(r,\varepsilon,\bar{\varphi},\delta_{k+1},\cdots,\delta_m)\equiv F^*(r,\varepsilon,\tilde{\delta}),\\&\tilde{\delta}=(b_0,\cdots,b_{k-1},\delta_{k+1},\cdots,\delta_m),\end{aligned}\tag{1.34}$$

于是由条件(ii)与(1.33)知,当 $b_j=0$, $j=0,\cdots,k-1$ 时 $F^*=0$,从而由积分形式的微分中值定理知

$$C_{2j+1}(\varepsilon,\bar{\varphi},\delta_{k+1},\cdots,\delta_m)=\varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}b_iA_{ij}(\varepsilon,\tilde{\delta}),$$

$$Q(r,\varepsilon,\bar{\varphi},\delta_{k+1},\cdots,\delta_m)=\sum_{i=0}^{k-1}b_iQ_i(r,\varepsilon,\tilde{\delta}),$$

又利用(1.34)与(1.25)知当 $b_i=0,\ i=0,\cdots,j$ 时

$$C_{2j+1}(\varepsilon,\ \bar{\varphi},\ \delta_{k+1},\cdots,\delta_m)=0,\ j=0,\cdots,k-1,$$

由此推得

$$A_{ij}=0,\ j+1\leqslant i\leqslant k-1,\ j=0,\cdots,k-2.$$

将以上诸式代入(1.34)可得

$$F^*(r,\ \varepsilon,\ \tilde{\delta})=\sum_{j=0}^{k-1}b_jr^{2j}P_j(r,\ \varepsilon,\ \tilde{\delta}),\qquad(1.35)$$

其中

$$P_j=1+\varepsilon\sum_{i=j}^{k-1}A_{ji}(\varepsilon,\ \tilde{\delta})r^{2(i-j)+1}+r^{2(k-j)}Q_j,\ 0\leqslant j\leqslant k-1.$$

首先注意到当 $\varepsilon=0$ 时 $C_{2j+1}=0$,利用(1.34)易证 F^* 关于 r 可以有 $k-1$ 个正根. 其次利用(1.35)可证 F^* 至多有 $k-1$ 个正根. 为简单计,今以 $k=3$ 为例证之. 此时有

$$\begin{aligned}F^*&=b_0P+b_1r^2P_1+b_2r^4P_2\\&=P_0[b_0+b_1r^2P_{11}+b_2r^4P_{12}]\equiv P_0P_1^*.\end{aligned}$$

易知

$$\frac{\partial P_1^*}{\partial r}=2rP_{21}(b_1+2b_2r^2P_{22})\equiv 2rP_{21}P_2^*,$$

$$\frac{\partial P_2^*}{\partial r}=4rb_2[1+O(|\varepsilon|+r^2)],$$

其中 $P_{ij}=1+O(|\varepsilon|+r^2),\ i,\ j=1,2$,于是 P_2^* 至多有一个正根,这导致 P_1^* 至多有两个正根. 证毕.

利用上述两个定理可证下列便于应用的定理.

定理 1.5 设 C^∞ 系统(1.13)满足(1.18)且以原点为初等奇点,又函数 $p,\ q$ 关于 δ 为线性的,如果展式(1.29)中的系数满足

(i) $\operatorname{rank}\dfrac{\partial(b_0,\cdots,b_{k-1})}{\partial(\delta_1,\cdots,\delta_k)}=k$, $m\geqslant k$;

(ii) 当 $b_j(\delta)=0$, $j=0,\cdots,k-1$ 时,(1.13)以原点为中心奇点,

则对任给的正数 $N>0$,存在 $\varepsilon_0>0$ 及原点的邻域 V,使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$, $|\delta|\leqslant N$ 时(1.13)在 V 中至多有 $k-1$ 个极限环,且 $k-1$ 个极限环可以出现. 换句话说(当 $|\varepsilon|$ 充分小, δ 有界时)(1.13)在原点的环性数是 $k-1$.

证明 由于(1.13)中的函数 p 与 q 关于 δ 为线性的,式(1.29)中的系数 b_j 关于 δ 也是线性的,因此由条件(i),不失一般性可设

$$\det\frac{\partial(b_0,\cdots,b_{k-1})}{\partial(\delta_1,\cdots,\delta_k)}\neq 0,$$

于是线性方程组 $b_j(\delta)=0$, $j=0,\cdots,k-1$,有向量解 $(\delta_1,\cdots,\delta_k)=\varphi(\delta_{k+1},\cdots,\delta_m)$(注意当 $m=k$ 时 φ 为常向量).

首先取 $\delta_0^*=(\delta_{10},\cdots,\delta_{m0})$,其中对 $j>k$ 有 $\delta_{j0}=0$,且 $(\delta_{10},\cdots,\delta_{k0})=\varphi(0,\cdots,0)$,则由定理 1.4 知,当 $|\varepsilon|+|\delta-\delta_0^*|$ 充分小时(1.13)在原点的环性数是 $k-1$,从而 $k-1$ 个极限环可以出现. 于是若定理结论不成立,则存在 $N>0$ 及点列 $\varepsilon_l\to 0$, $\delta^{(l)}\in R^m$,且 $|\delta^{(l)}|\leqslant N$,使当 $(\varepsilon,\delta)=(\varepsilon_l,\delta^{(l)})$ 时(1.13)有 k 个极限环,这些环随着 l 趋于无穷而趋于原点. 可设 $\delta^{(l)}\to\delta_0$(当 $l\to\infty$ 时). 如果存在 $1\leqslant k'\leqslant k$ 使 $b_j(\delta_0)=0$, $j=0,\cdots,k'-2$, $b_{k'-1}(\delta_0)\neq 0$,则由定理 1.3 知当 $|\varepsilon|+|\delta-\delta_0|$ 充分小时(1.13)在原点附近至多有 $k'-1(\leqslant k-1)$ 个极限环. 这与 k 个极限环的存在性矛盾,于是必有 $b_j(\delta_0)=0$, $j=0,\cdots,k-1$. 同上,由条件(ii),当 $(\delta_1,\cdots,\delta_k)=\varphi(\delta_{k+1},\cdots,\delta_m)$ 时(1.13)在原点有中心奇点,故由定理 1.4 知当 $|\varepsilon|+|\delta-\delta_0|$ 充分小时(1.13)知至多有 $k-1$ 个局部极限环,也矛盾. 从而定理得证. 证毕.

在给出定理 1.5 的应用例子之前，先证明一个预备引理.

引理 1.3 考虑 C^1 系统

$$\dot{x} = y - F(x),\ \dot{y} = -g(x), \tag{1.36}$$

其中 $F(0)=g(0)=0$, $g'(0)>0$. 设存在连续函数 $C: R\to R$, 使当 $|x|$ 充分小 $F(x)=C(G(x))$, 其中 $G(x)=\int_0^x g(u)\mathrm{d}u$, 则原点必是(1.36)的初等中心奇点.

证明 当 $|x|$ 小时，函数 $G(x)$ 分别在 $x>0$ 与 $x<0$ 上单调，于是存在连续函数 $x_2(z)\leqslant 0\leqslant x_1(z)$, 使当 $z>0$ 充分小时 $G(x_i(z))=z$, $i=1,2$, 因此变换 $z=G(x)$ 把(1.36)化为两个方程

$$\dot{z} = g(x_i(z))[y - F(x_i(z))],\ \dot{y} = -g(x_i(z)),\ i = 1,2,$$

或

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = F(x_i(z) - y),\ i = 1,2. \tag{1.37}$$

注意 $F(x)=C(G(x))$, 即 $F(x_1(z))=F(x_2(z))=C(z)$, 从而(1.37)中两个方程等同. 于是方程(1.36)过原点附近正 y 轴任一点的位于右半平面的正半轨(线段)与该点的位于左半平面的负半轨(线段)在变换 $z=G(x)$ 下的象完全重合，从而此两轨线段与负 y 轴的交点是同一点，这意味着(1.36)在原点邻域的任一轨线都是闭的. 证毕.

利用第一章定理 4.8(iii)可给出上述引理更简明的证明.

例 1.2 考虑四次 Liénard 方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \varepsilon(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4), \\ \dot{y} &= -(x + x^2), \end{aligned} \tag{1.38}$$

其中 ε 为小参数, $a=(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 为有界参数，我们断言，(1.38)在原点的环性数是 2.

为证这一结论，设

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3,$$

则式(1.18)成立且 $\mu=1$，于是利用式(1.20)可知(1.38)的一阶 Melnikov 函数为

$$M(h) = \sum_{i=1}^{4} a_i M_i(h), \ M_i(h) = \oint_{H=h} x^i \mathrm{d}y, \ i \geqslant 1, \tag{1.39}$$

注意到沿 $H=h$ 成立 $x^2=(2h-y^2)-\frac{2}{3}x^3$，可知

$$M_2(h) = \oint_{H=h} (2h - y^2 - \frac{2}{3}x^3)\mathrm{d}y = -\frac{2}{3}M_3(h),$$

$$M_4(h) = \oint_{H=h} \left[(2h - y^2)^2 - \frac{4}{3}x^3(2h - y^2) + \frac{4}{9}x^6\right]\mathrm{d}y$$

$$= \oint_{H=h} \left[-\frac{4}{3}x^3(x^2 + \frac{2}{3}x^3) + \frac{4}{9}x^6\right]\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{4}{3}M_5(h) - \frac{4}{9}M_6(h),$$

将以上两式代入(1.39)可得

$$M(h) = \delta_1 M_1(h) + \delta_2 M_3(h) + \delta_3 M_5(h) - \frac{4}{9}a_4 M_6(h), \tag{1.40}$$

其中 $\delta=(\delta_1, \delta_2, \delta_3)=\left(a_1, a_3-\frac{2}{3}a_2, -\frac{4}{3}a_4\right)$，应用 Green 公式把线积分 M_1, M_3, M_5 与 M_6 化为二重积分，而后引入极坐标变换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$，注意到由 $H(x, y)=h$ 给出的局部闭轨在极坐标下可表示为 $r=r(\theta, h)=\sqrt{2h}+O(h)$，可得

$$M_{2i+1}(h) = -\iint_{H\leqslant h}(2i+1)x^{2i}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -(2i+1)\int_0^{2\pi}\cos^{2i}\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2h}+O(h)} r^{2i+1}\mathrm{d}r$$

$$= N_{i0}h^{i+1} + O(h^{i+2}),\ i = 0,1,2,$$

$$M_6(h) = -\iint_{H\leqslant h} 6x^5\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = O(h^4),$$

其中

$$N_{i0} = -\frac{(2i+1)2^i}{(i+1)}\int_0^{2\pi}\cos^{2i}\theta\,\mathrm{d}\theta \neq 0,\ i = 0,1,2.$$

将以上诸式代入(1.40)我们有

$$M(h) = b_0h + b_1h^2 + b_2h^3 + O(h^4),$$

其中

$$b_0 = N_{00}\delta_1,\quad b_1 = (*)\delta_1 + N_{10}\delta_2,$$

$$b_2 = (*)\delta_1 + (*)\delta_2 + N_{20}\delta_3,$$

式中(*)代表常数,于是

$$\det\frac{\partial(b_0,\ b_1,\ b_2)}{\partial(\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3)} = N_{00}N_{10}N_{20} \neq 0.$$

又易知当 $\delta = 0$ 时,有 $F(x) = 2\varepsilon a_2 G(x)$,此时由引理 1.3 知(1.38)以原点为中心奇点. 于是由定理 1.5 即知(1.38)的 Hopf 环性数是 2.

注 1.1 若(1.29)改为

$$M(h,\ \delta) = b_0(\delta)h^2 + b_1(\delta)h^3 + \cdots + b_k(\delta)h^{k+2} + O(h^{k+3}),\tag{1.41}$$

且设对任意 $\delta\in D$,原点恒为(1.13)的细焦点,又设定理 1.4 的其他

条件不变,则可证该定理的结论仍成立. 对定理 1.5 有类似结论.

注 1.2 由定理 1.4 的证明易知,如果定理 1.4 的条件(i)成立,且 $b_k(\delta_0)\neq 0$,则存在(ε,δ)且 $0<|\varepsilon|\ll 1$, $|\delta-\delta_0|\ll 1$,使(1.13)在原点邻域内有 k 个极限环.

本节定理 1.1 已广为人知,在许多书中都有介绍,定理 1.2 曾先后在[65]及[146]中出现,这一定理的证明思想在[82]中用来讨论一类余维二的分支中极限环的惟一性. 虽然这两个定理的证明具有类似性,但其意义具有区别. 详之,定理 1.1 是说一阶细焦点在扰动下改变稳定性成为粗焦点时必产生惟一的极限环,而定理 1.2 则给出了中心奇点产生惟一极限环的条件.

与定理 1.3 的结论(ii)有关的结果曾先后在[65]与[84]中用不同的方法证明,而定理 1.3(i)与定理 1.4、1.5 均是作者最近得到的结果,见[49],然而定理 1.4 中利用一阶 Melnikov 函数及有中心的条件来讨论环性数的思想曾在[40]中讨论同宿环的环性数时用到过.

以后我们将证明比方程(1.38)更一般的 n 次 Liénard 系统

$$\dot{x}=y-\varepsilon\sum_{i=1}^{n}a_ix^i,\ \dot{y}=-(x+x^2),$$

Hopf 环性数为$\left[\dfrac{2n-1}{3}\right]$,而且这一数也是该方程在整个平面上的环性数.

最后指出,即使(1.13)为解析系统,式(1.19)中的函数 $H(B)$ 关于 h 在 $h=0$ 一般只为 C^1 光滑的(见[61]).

§2 Poincaré 分支与环性数

本节仍考虑 C^∞ 系统(1.13)且假设(1.18)成立,于是由定理 1.3(i)知存在 $h^*>0$ 使当 $\varepsilon=0$ 时(1.13)有闭轨族 L_h,由 $H(x,y)=h$ 给出,其中 $h\in(0,h^*)$,且由(1.20)给出的函数 M 在$[0,h^*)$上为 C^∞ 的,我们首先研究这族闭轨的扰动分支,给出获得闭

轨族环性数的方法,其次应用这一方法来讨论一类多项式 Liénard 系统,并给出其环性数,更多的应用将在以后给出.

2.1 Poincaré 分支的一般理论

类似于定义 1.2,我们引入下列概念

定义 2.1 设对 $h_0 \in (0, h^*)$,存在 $\varepsilon_0 > 0, k \geq 0, D$ 的子集 U 与 L_{h_0} 的邻域 V,使当 $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$, $\delta \in U$ 时,(1.13)在 V 中至多有 k 个极限环,且 k 个极限环可以出现,则称 k 为(1.13)当 $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$, $\delta \in U$ 时在 L_{h_0} 的环性数,有时也说 k 为 L_{h_0} 关于(1.13)的环性数.

定义 2.2 记 $S = \bigcup_{h < h^*} L_h$. 如果 S 不是全平面且存在 k 使对 S 的任一紧集 V 及 R^m 的任一紧集 D,都存在 $\varepsilon_0 > 0$,使当 $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0, \delta \in D$ 时,(1.13)在 V 中至多有 k 个极限环,且存在这样的(ε, δ)使在(1.13)在 V 中可以有 k 个极限环,则称 k 为(1.13)在开集 S 内的环性数,有时也说 k 为 S 关于(1.13)的环性数.

我们先来讨论每个闭轨的环性数. 取定 $h_0 \in (0, h^*)$及点 $A(h_0) \in L_{h_0}$,过点 $A(h_0)$作一截线 l,例如可取 l 为 L_{h_0} 在 $A(h_0)$ 的法线,当 $h - h_0$ 充分小时,L_h 与 l 有交点 $A(h)$. 设(1.13)过点 $A(h)$的轨道 $\gamma(h, \varepsilon, \delta)$正向绕 L_{h_0} 一周后交 l 于点 $B(h, \varepsilon, \delta)$,如图 2.1 所示,则与(1.19)类似有

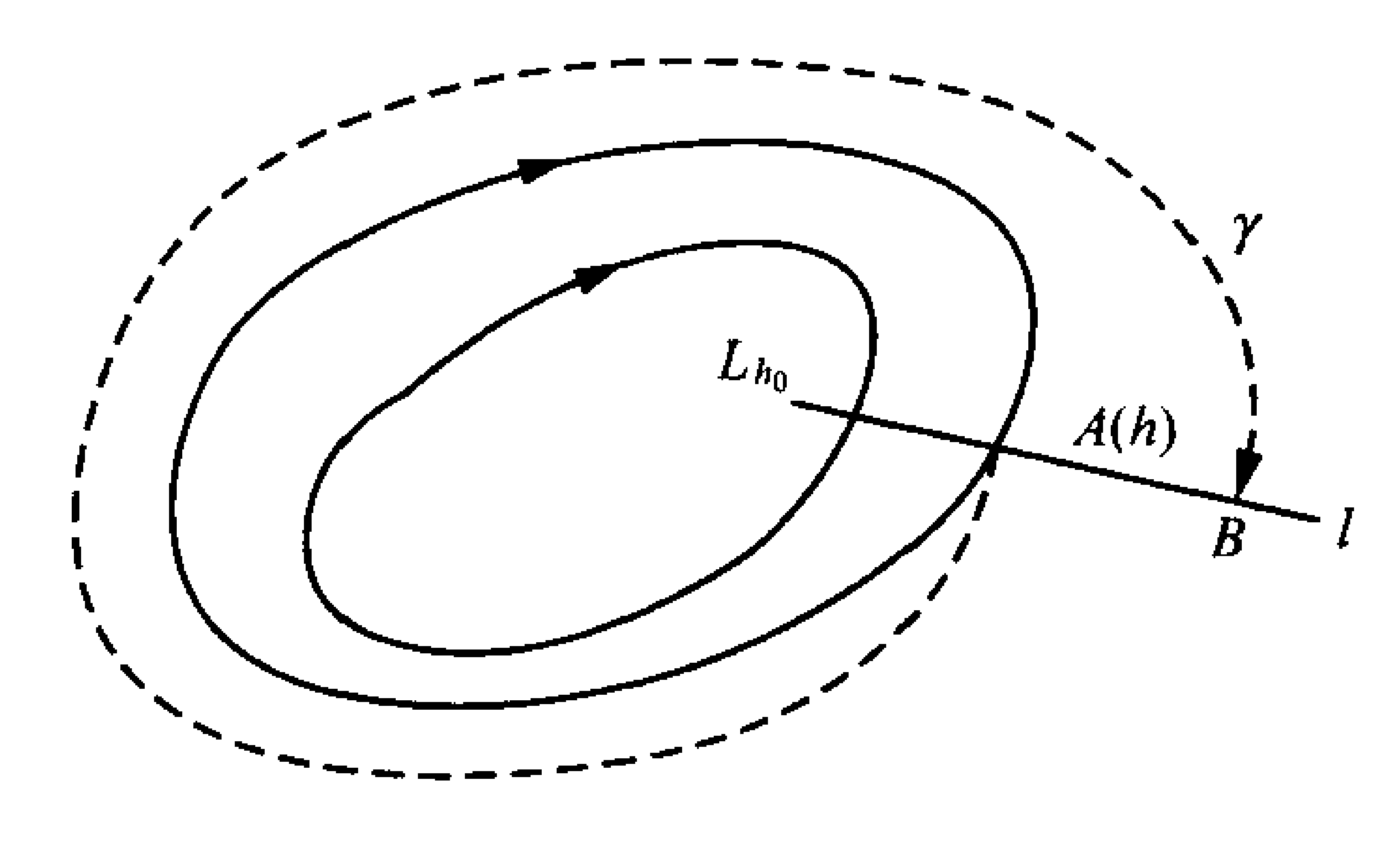


图 2.1

$$H(B)-H(A)=\varepsilon[M(h,\ \delta)+O(\varepsilon)]\equiv\varepsilon F(h,\ \varepsilon,\delta),\tag{2.1}$$

其中 M 仍由(1.20)给出.

另一方面,设 n_0 表示 l 的单位方向矢量,则点 A 与 B 可分别写为

$$A(h)=A(h_0)+a(h)n_0,$$

$$B(h,\ \varepsilon,\delta)=A(h_0)+b(h,\ \varepsilon,\ \delta)n_0,$$

因此由微分中值定理知

$$\begin{aligned}H(B)-H(A)&=DH(A+\theta(B-A))(B-A)\\&=[DH(A(h_0))\cdot n_0+o(l)]\\&\quad\cdot(b(h,\ \varepsilon,\ \delta)-a(h)).\end{aligned}$$

因为 $DH(A(h_0))\cdot n_0\neq 0$,于是由上式知轨线 $\gamma(h,\ \varepsilon,\delta)$为闭轨当且仅当 $B=A$,当且仅当 $H(B)=H(A)$,亦即当$|\varepsilon|$充分小时(1.13)在 L_{h_0} 附近的闭轨个数与函数 $F(h,\ \varepsilon,\delta)$关于 h 在h_0 附近的零点个数成一一对应. 注意到函数 M 与 F 均为C^∞的,可将 M 时写成下列展式

$$\begin{aligned}M(h,\ \delta)=&\ a_0(\delta)+a_1(\delta)(h-h_0)+\cdots\\&+a_k(\delta)(h-h_0)^k+O(|h-h_0|^{k+1}).\end{aligned}\tag{2.2}$$

对函数 F 利用 Rolle 定理,且将 $a_0,\ a_1,\cdots,a_{k-1}$作为新参数(利用隐函数定理)易证

定理 2.1 设(2.2)成立且 $k\geqslant 0,\ h_0\in(0,\ h^*)$,又设存在 $\delta_0\in D$使$a_k(\delta_0)\neq 0,a_j(\delta_0)=0,\ j=0,\cdots,k-1$,则存在 $\varepsilon_0>0$ 及 L_{h_0}的邻域 V,使当$0<|\varepsilon|<\varepsilon_0,\ |\delta-\delta_0|<\varepsilon_0$ 时(1.13)在 V 中至多有k 个极限环,若 k 为奇数,则(1.13)在 V 中必有极限环.

如果进一步有

$$\operatorname{rank}\frac{\partial(a_0,\cdots,a_{k-1})}{\partial(\delta_1,\cdots,\delta_m)}(\delta_0)=k,m\geqslant k,$$

则在$(\varepsilon,\delta)=(0,\ \delta_0)$的任一小邻域内都有$(\varepsilon,\delta)$使(1.13)在 V 中有k 个极限环,亦即 L_{h_0}的环性数为 k.

由上述定理即得

推论 2.1 设 $h\in(0,\ h^*)$且当$|\varepsilon|+|\delta-\delta_0|\ll 1$ 时 L_{h_0} 的环性数至少为 k,则 $h=h_0$ 必是函数 $M(h,\ \delta_0)$的根且其重数至少是 k.

在许多情况下(例如(1.13)为多项式系统)函数 M 具有下述形式

$$M(h,\ \delta)=\sum_{i=1}^{n}b_i(\delta)I_i(h),\tag{2.3}$$

而且当(1.13)中的函数 p 与 q 关于δ 为线性时上式中的系数 b_i 关于δ 也是线性的. 现设 $I_1(h)$满足

$$I'_1(0)\neq 0,I_1(h)\neq 0,\ 0<h<h^*,\tag{2.4}$$

则可将(2.3)写成

$$\begin{aligned}&M(h,\ \delta)=I_1(h)N(h,\ b),\ b=(b_1,\cdots,b_n),\\&N(h,\ b)=\sum_{i=1}^{n}b_iJ_i(h),\ J_i(h)=I_i(h)/I_1(h).\end{aligned}\tag{2.5}$$

我们证明

定理 2.2 设(2.3)~(2.5)成立,且(1.13)的右端函数关于δ 为线性的,又设

(i) $\operatorname{rank}\dfrac{\partial(b_1,\cdots,b_n)}{\partial(\delta_1,\cdots,\delta_m)}=n,\ n\leqslant m$;

(ii) 存在向量函数 $b^*(\varepsilon)=O(\varepsilon)$使对开集 $S=\bigcup\limits_{h<h^*}L_h$ 的任

何紧子集 V,都有 $\varepsilon_1=\varepsilon_1(V)>0$ 使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_1$ 且 $b=b^*(\varepsilon)$ 时(1.13)在 V 中的所有非平凡轨道都是周期的;

(iii) 对每个(固定的)$b\neq 0$,(2.5)中的函数 $N(h, b)$关于 h 在$[0, h^*)$上至多有 k 个根(重数计算在内),且存在 $b\neq 0$ 使 $N(h, b)$在$(0, h^*)$内存在 k 个根,则(1.13)在非闭区域 S 内的环性数是k.

证明 由条件(i),不失一般性可设

$$\det\frac{\partial(b_1,\cdots,b_n)}{\partial(\delta_1,\cdots,\delta_n)}\neq 0,$$

于是由隐函数定理知,线性方程组 $b=b(\delta)$有解

$$\delta_i=\delta_i(b,\ \delta_{n+1},\cdots,\delta_m),\ i=1,\cdots,n.$$

将上式代入(2.1)并注意到(2.5)可得

$$\begin{aligned}F(h,\ \varepsilon,\ \delta)&=I_1(h)[N(h,\ b)+O(\varepsilon)]\\&\equiv F^*(h,\ \varepsilon,\ b,\ \delta_{n+1},\cdots,\delta_m),\end{aligned}\qquad(2.6)$$

首先由条件(iii)知存在 $b\neq 0$ 使 $N(h, b)$在$(0, h^*)$上有 k 个单根,进一步由(2.6)知,当$|\varepsilon|$充分小时,$F(h, \varepsilon, \delta)$在$(0, h^*)$上可以有 k 个根,于是存在 $\delta\in R^m$ 及S 的紧集 V,使当$|\varepsilon|$充分小时(1.13)在 V 中有k 个闭轨,于是由定义 2.2 知,如果定理结论不成立,则存在点列$\{(\varepsilon_l, \delta^{(l)})\}$,$R^m$ 中的紧集D 及S 的紧集 V,且 $\varepsilon_l\to 0$(当 $l\to\infty$时),$\delta^{(l)}\in D$,使当$(\varepsilon, \delta)=(\varepsilon_l, \delta^{(l)})$时(1.13)在 V 中有$k+1$ 个极限环. 由于 V 紧,必存在整数 $r\geqslant 0$, $k_j>0$, $j=0,\cdots,r$,及 $0\leqslant h_0<h_1<\cdots<h_r<h^*$ 使

$$k_0+k_1+\cdots+k_r=k+1,\qquad(2.7)$$

且当$(\varepsilon, \delta)=(\varepsilon_l, \delta^{(l)})$且 $l\to\infty$时(1.13)有 k_j 个极限环以 L_{h_j} 为极限. 注意到 D 为紧,可设 $\delta^{(l)}\to\delta_0\in D$,记 $b_0=b(\delta_0)$,并考虑函数 $M(h, \delta_0)=I_1(h)N(h, b_0)$,由(2.4)及推论 1.1(当 $h_0=0$

时)和推论 2.1 知每个 h_j 都是 $N(h, b_0)$ 的根,且重数至少是 k_j,于是由(2.7)知 $N(h, b_0)$ 在区间 $[0, h^*)$ 上根的总重数至少是 $k+1$,于是由条件(iii)必有 $b_0=0$. 又由条件(ii)与(2.6)知

$$F^*(h, \varepsilon, b^*(\varepsilon), \delta_{n+1}, \cdots, \delta_m) \equiv 0,$$

$$0 \leqslant h \leqslant h_r, \ 0 < |\varepsilon| < \varepsilon_1.$$

于是若令 $a = b - b^*(\varepsilon) = (a_1, \cdots, a_n)$ 则由微分中值定理知对 $0 \leqslant h \leqslant h_r, 0 < |\varepsilon| < \varepsilon_1$ 及 $|a| < \varepsilon_1$ 一致成立

$$\begin{aligned} F^* &= \sum_{i=1}^{n} a_i F_i(h, \varepsilon, a, \delta_{n+1}, \cdots, \delta_m) \\ &= I_1(h)[N(h, a) + O(\varepsilon)]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

进一步令 $\mu = |a|, c = a/\mu = (c_1, \cdots, c_n)$,则由(2.6),(2.8)及(2.5)中 N 的形式可得

$$\begin{aligned} F(h, \varepsilon, \delta) &= \mu \sum_{i=1}^{n} c_i F_i = \mu I_1(h)[N(h, c) + O(\varepsilon)] \\ &= \mu I_1(h) G(h, \varepsilon, c, \delta_{n+1}, \cdots, \delta_m). \end{aligned} \tag{2.9}$$

设

$$a^{(l)} = b(\delta^{(l)}) - b^*(\varepsilon_l), \ c^{(l)} = \frac{a^{(l)}}{|a^{(l)}|}, \ l \geqslant 1,$$

由 $b_0 = 0$ 知 $a^{(l)} \to 0$(当 $l \to \infty$ 时),且 $\{c^{(l)}\}$ 有聚点,不妨设 $c^{(l)} \to c_0$(当 $l \to \infty$ 时),前面已得出当 $(\varepsilon, \delta) = (\varepsilon_l, \delta^{(l)}) = (\varepsilon_l, \delta_1^{(l)}, \cdots, \delta_m^{(l)})$ 时,(1.13)在 L_{h_j} 邻域内有 k_j 个极限环,从而可设 $a^{(l)} \neq 0$ 且当 $(\varepsilon, c) = (\varepsilon_l, c^{(l)})$ 及 $\delta_i = \delta_i^{(l)}, i = n+1, \cdots, m$ 时,(2.9)中的函数 G 关于 h 有 k_j 个根以 h_j 为极限(当 $l \to \infty$ 时),故由 Rolle 定理,并注意到

$$G(h, 0, c, \delta_{n+1}, \cdots, \delta_m) = N(h, c),$$

可证每个正的 h_j 必是$N(h, c_0)$的根且其重数至少是 k_j ($0\leqslant j\leqslant r$),于是再由(2.7)可知若 $h_0>0$,则 $N(h, c_0)$在区间$[0, h^*)$上至少有 $k+1$ 个根(重数计算在内),这与条件(iii)矛盾(因为此时有$|c_0|=1$).

现设 $h_0=0$,只须证 $h=0$ 为 $N(h, c_0)$的至少 k_0 重根. 为此,由(1.25),与(2.9)类似可得

$$rP(r, \varepsilon, \delta)-r^2=\varepsilon\mu r^2 F_0(r, \varepsilon, c, \delta_{n+1},\cdots,\delta_m),$$

于是由(2.1)与(2.9)可得

$$F_0(\sqrt{h}, 0, c, \delta_{n+1},\cdots,\delta_m)=\frac{I_1(h)}{h}N(h, c).$$

另一方面,当$(\varepsilon, c)=(\varepsilon_l, c^{(l)})$及 $\delta_i=\delta_i^{(l)}$, $n+1\leqslant i\leqslant m$ 时C^∞函数 F_0 关于 r 有 $2k_0$ 个根趋于零(当 $l\to\infty$),故必有$F_0|_{\varepsilon=0, c=c_0}=O(r^{2k_0})$,从而由上式及(2.4)知 $N(h, c_0)=O(h^{k_0})$,即为所证. 证毕.

注 2.1 由定理 2.2 的证明知,若(2.3)~(2.5)成立,且存在$\varepsilon_0>0$使对紧集 D 中的一切δ 有$|b|\geqslant\varepsilon_0$,则只要定理 2.2 的条件(iii)成立,就必存在 $\varepsilon_1>0$ 使其结论对 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_1$, $\delta\in D$ 成立,而若定理 2.2 的条件(iii)减弱为“$N(h, b)$关于 h 在$[0, h^*)$上至多有 k 个根(重数计算在内),则必存在 $\varepsilon_1>0$,使得当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_1$, $\delta\in D$ 时(1.13)在区域 S 内至多有k 个环.

注 2.2 基于注 1.1,如果(2.4)的第一式换为 $I'_1(0)=0$, $I''_1(0)\neq0$,且设对任意 $\delta\in D$ 原点恒为(1.13)的细焦点,又设定理 2.2 的其他条件均成立,则该定理的结论仍然成立.

注 2.3 如果式(2.4)与(2.5)中的函数 $I_1(h)$换成满足$I_0(0)=0$的$[0,h^*)$上某一 C^∞ 函数 $I_0(h)$,则定理 2.2 及上述两个注仍成立.

如果定理 2.2 的条件不成立,那么为了获得(1.13)的环性数,

我们需利用高阶 Melnikov 函数. 将式中的函数 F 按 ε 的幂展开可得

$$F(h,\varepsilon,\delta)=M_1(h,\delta)+\varepsilon M_2(h,\delta)+\varepsilon^2M_3(h,\delta)+\cdots,$$

我们称 $M_i(h,\delta)$为(1.13)的第 i 阶 Melnikov 函数. 仍设(2.3)式成立,又设 M_2 具有下述形式

$$M_2(h,\delta)=\sum_{i=1}^{n}a_i(\delta)I_i(h)+\sum_{i=n+1}^{m}b_i(\delta)I_i(h),\ m>n,\tag{2.10}$$

记

$$N(h,b)=\sum_{i=1}^{m}b_iJ_i(h),$$
$$J_i(h)=I_i(h)/I_1(h),\ b=(b_1,\cdots,b_m),\tag{2.11}$$

则与定理 2.2 完全类似可证

定理 2.3 设(2.3)、(2.4)、(2.10)与(2.11)成立,且函数 p, q 关于 δ 为线性的,又设

(i) $\operatorname{rank}\dfrac{\partial(b_1,\cdots,b_m)}{\partial(\delta_1,\cdots,\delta_m)}=m$;

(ii) 存在向量函数 $b^*(\varepsilon)=O(\varepsilon)\in R^m$ 使对S 的任何紧子集 V,都有 $\varepsilon_1>0$,使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_1$ 且 $b=b^*(\varepsilon)$时,(1.13)在 V 中的所有非平凡轨道都是周期的;

(iii) 对每个(固定的)$b\neq0$,(2.11)中的函数 $N(h,b)$关于 h 在$[0,h^*)$上至多有 k 个根(重数计算在内),且存在 $b\neq0$ 使 N 在$(0,h^*)$内可以有 k 个根,则(1.13)在 S 内的环性数是k.

事实上,令 $b_i=b_i(\delta)+\varepsilon a_i(\delta)$, $1\leqslant i\leqslant n$ 及$b_j=b_j(\delta)$, $n+1\leqslant j\leqslant m$, $b=(b_1,\cdots,b_m)$,则

$$F(h,\varepsilon,\delta)=\sum_{i=1}^{n}b_iI_i+\varepsilon\sum_{i=n+1}^{m}b_iI_i+O(\varepsilon^2|b|)$$

$$\equiv F^*(h, \varepsilon, \delta).$$

进一步令

$$\mu = |(b_1, \cdots, b_n, \varepsilon b_{n+1}, \cdots, \varepsilon b_m)|,$$

$$\mu_i = \frac{b_i}{\mu}, 1 \leqslant i \leqslant n, \mu_j = \frac{\varepsilon b_j}{\mu}, n+1 \leqslant j \leqslant m,$$

并注意到 $\varepsilon |b| \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} (\varepsilon m |b_i|) \leqslant m\mu$,可知

$$F^*(h, \varepsilon, \delta) = \mu\left[\sum_{i=1}^{m} \mu_i I_i + O(\varepsilon\mu)\right], |(\mu_1, \cdots, \mu_m)| = 1.$$

因此与定理 2.2 类似可证定理 2.3 成立.

若在(1.18)中 $\mu = 1$ 且设

$$p(x, y, \varepsilon, \delta) = p_1(x, y, \delta) + \varepsilon p_2(x, y, \delta) + O(\varepsilon^2),$$

$$q(x, y, \varepsilon, \delta) = q_1(x, y, \delta) + \varepsilon q_2(x, y, \delta) + O(\varepsilon^2),$$

则当 $M(h, \delta) = 0$ 时函数 $M_2(h, \delta)$ 有下述表达式

$$\begin{aligned} M_2(h, \delta) &= \oint_{L_h} \left[fq_2 - gp_2 + \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y}\right)\int_0^t (fq_1 - gp_1)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t \\ &= \oint_{L_h} \left[fq_2 - gp_2 - (fq_1 - gp_1)\int_0^t \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2.12}$$

公式(2.12)最初是由 Li B. 与 Zhang Z. ([84])给出的,但要求 L_h 的周期 $T(h)$ 为 h 的严格增加函数,后由 Jiang Q. 与 Han M. ([77])用完全不同的方法证明了(2.12),而且不要求 $T(h)$ 的单调性. 事实上,从[77]中(2.12)的证明过程不难发现,当 $M(h, \delta) \neq 0$ 时(2.12)成为

$$M_2(h, \delta) = M(h, \delta)K_1(h, \delta) + \oint_{L_h} \Big[fq_2 - gp_2$$

$$+\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}+\frac{\partial q_1}{\partial y}\right)\int_0^t (fq_1 - gp_1)\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t$$

$$= M(h,\delta)K_2(h,\delta)+\oint_{L_h}\Big[fq_2 - gp_2$$

$$-(fq_1 - gp_1)\int_0^t\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}+\frac{\partial q_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t,$$

其中

$$K_1(h,\delta)=[u'_t(0,h)T'(h)+u_h(0,h)]$$

$$\wedge\ (p_1(A(h),\delta),\ q_1(A(h),\delta)),$$

$$K_2(h,\delta)=K_1(h,\delta)+\oint_{L_h}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}+\frac{\partial q_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}t,$$

上式中 $u(t,h)$为 L_h 的满足$u(0,h)=A(h)$的参数方程.

2.2　一类 Liénard 方程的环性数

本小节我们应用定理 2.2 来讨论一类 Liénard 方程的环性数,为此先给出一个预备定理.

定理 2.4　考虑下述 C^1 系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p(y)-\varepsilon[F_1(x,a)+F_2(x,b)],\\ \dot{y} &= -g(x),\end{aligned}\tag{2.13}$$

其中 $a\in A\subset R^n$, $b\in B\subset R^m$ 且 A,B 为紧集. 设下列条件成立:

(i) $p(0)=0$, p 为严格增加函数,且

$$\lim_{\substack{|y|\to\infty\\ r\to 0}}\frac{p'(y+r)}{p^2(y)}=0;$$

(ii) $g(-x)=-g(x)$, $G(+\infty)=+\infty$,其中 $G(x)=\int_0^x g(x)\mathrm{d}x$;

(iii) $F_1(-x,a)=-F_1(x,a)$, $F_2(-x,b)=F_2(x,b)$;

(iv) 存在 $x_0=x_0(A)>0$,使当 $x\geqslant x_0$ 时,$F_1(x, a)>0$, $g(x)>0$,且

$$\inf_{\substack{a\in A\\ x\geqslant x_0}}\int_0^x F_1(x, a)g(x)\mathrm{d}x > 0,$$

则存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(A, B)>0$ 及有界区域 $D=D(A, B)\subset R^2$,使对满足 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$, $a\in A$, $b\in B$ 的一切 (ε, a, b),方程(2.13)的任何闭轨都位于 D 中.

证明 设 $|y_0|$ 充分大,考虑(2.13)过点 $(0, y_0)$ 的轨线 $L(y_0)$. 由于 A, B 为紧集,$p(y)$严格增加,必存在 $M_0>0$,$\varepsilon_1>0$ 使对一切 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_1$,$a\in A$, $b\in B$ 及 $|x|\leqslant x_0(A)$, $|y|\geqslant M_0$ 有

$$\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right| = \left|\frac{g(x)}{p(y)-\varepsilon(F_1+F_2)}\right| \leqslant M_0,$$

因此利用常微分方程比较定理知存在 $M_1>0$,使对 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_1$, $a\in A$, $b\in B$, $|y_0|\geqslant M_1$,轨线 $L(y_0)$必与直线 $x=\pm x_0$ 相交,该轨线位于带域 $|x|\leqslant x_0$ 中的连通段可表示为

$$y = y(x, y_0),\ y(0, y_0) = y_0,\ |x|\leqslant x_0,$$

而且极限

$$\lim_{|y_0|\to\infty}|y(x, y_0)| = \infty \tag{2.14}$$

对 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_1$, $a\in A$, $b\in B$ 及 $|x|\leqslant x_0$ 一致成立. 为确定计,以下设 $\varepsilon>0$. 往证存在 $M_2>0$ 使对 $0<\varepsilon<\varepsilon_1$, $a\in A$, $b\in B$ 一致成立:

$$\text{当} |y_0|\geqslant M_2 \text{ 时},\qquad y(x_0, y_0)<y(-x_0, y_0). \tag{2.15}$$

为此,令

$$V(x, y) = \int_0^y p(u)\mathrm{d}u + G(x),$$

易见沿(2.13)的轨线有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=\frac{-\varepsilon(F_1+F_2)g}{p(y)-\varepsilon(F_1+F_2)},$$

于是

$$V(x_0,\ y(x_0,\ y_0))-V(-x_0,\ y(-x_0,\ y_0))$$

$$=\int_{-x_0}^{x_0}\frac{-\varepsilon(F_1+F_2)g\mathrm{d}x}{p(y)-\varepsilon(F_1+F_2)}. \tag{2.16}$$

若 $p_+\equiv p(+\infty)<+\infty$,则由(2.14)与(2.16)知,对 $0<\varepsilon<\varepsilon_1$, $a\in A$, $b\in B$ 一致成立

$$\lim_{y_0\to+\infty}p(y_0)[V(x_0,\ y(x_0,\ y_0))-V(-x_0,\ y(-x_0,\ y_0))]$$

$$=\int_{-x_0}^{x_0}\frac{-\varepsilon(F_1+F_2)g\mathrm{d}x}{1-\varepsilon(F_1+F_2)/p_+}=-\varepsilon\left[\int_{-x_0}^{x_0}(F_1+F_2)g\mathrm{d}x+O(\varepsilon)\right]$$

$$=-2\varepsilon\left[\int_0^{x_0}F_1g\mathrm{d}x+O(\varepsilon)\right], \tag{2.17}$$

其中最后一步利用了 F_1 与 g 为 x 的奇函数及 F_2 为 x 的偶函数.

设 $p_+=+\infty$,由(2.13)知对 $|x_i|\leqslant x_0$ 成立

$$y(x_2,\ y_0)-y(x_1,\ y_0)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{-g\mathrm{d}x}{p(y(x,\ y_0))-\varepsilon(F_1+F_2)},$$

由此及(2.14)知,对 $0<\varepsilon<\varepsilon_1$, $a\in A$, $b\in B$ 及 $|x_i|\leqslant x_0$ 一致成立

$$\lim_{y_0\to+\infty}|y(x_2,\ y_0)-y(x_1,\ y_0)|=0,$$

由于存在 $|x^*|\leqslant x_0$,使

$$y(x^*,\ y_0)=\min_{|x|\leqslant x_0}y(x,\ y_0)\equiv y^*,$$

于是对 $0<\varepsilon<\varepsilon_1$, $0<\theta<1, a\in A$, $b\in B$ 及 $|x|\leqslant x_0$ 一致有

$$\lim_{y_0\to+\infty}[(y^* - y_0) - \theta(y(x, y_0) - y_0)] \equiv \lim_{y_0\to+\infty} r = 0.$$

利用微分中值定理及(2.13)知存在 $0<\theta<1$ 使

$$\begin{aligned} & p(y(x, y_0)) - p(y_0) \\ &= p'(y_0 + \theta(y(x, y_0) - y_0))(y(x, y_0) - y_0) \\ &= \int_0^x \frac{p'(y_0 + \theta(y(x, y_0) - y_0))g(u)}{p(y(u, y_0)) - \varepsilon(F_1(u, a) + F_2(u, b))}\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

于是由条件(i)知

$$\left|\frac{p(y(x, y_0))}{p(y_0)} - 1\right| \leqslant \left|\int_0^x \frac{p'(y^* - r)|g|}{p(y^*)[p(y^*) - \varepsilon(F_1 + F_2)]}\mathrm{d}u\right|$$
$$\to 0 \quad (\text{当 } y_0 \to +\infty \text{ 时})$$

对 $0<\varepsilon<\varepsilon_1$, $a\in A$, $b\in B$ 及 $|x|\leqslant x_0$ 一致成立. 从而由(2.16)及(2.17)的推导知,(2.17)对 $p_+ = +\infty$ 的情况仍成立,且其中 $O(\varepsilon)=0$. 同理可证(2.17)对 $y_0\to-\infty$ 也成立,于是注意到已设 $\varepsilon>0$,由条件(iv)知,存在 $M_2>0$,使当 $|y_0|\geqslant M_2$ 时,对 $0<\varepsilon<\varepsilon_1, a\in A$, $b\in B$,一致有

$$p(y_0)[V(x_0, y(x_0, y_0)) - V(-x_0, y(-x_0, y_0))] < 0.$$

由于 G 为偶函数,上式即

$$p(y_0)\int_{y(-x_0, y_0)}^{y(x_0, y_0)} p(y)\mathrm{d}y < 0,$$

由此即得(2.15).

注意到 V 是未扰系统(2.13)$|_{\varepsilon=0}$ 的首次积分且是无穷大函数(亦即当 $|x| + |y|\to\infty$ 时 $V(x, y)\to\infty$),方程(2.13)关于(ε, a, b)连续,且 A 与 B 为紧集,可知存在 $M_3>M_2$ 及 $0<\varepsilon_0\leqslant\varepsilon_1$,使当 $0<\varepsilon<\varepsilon_0, a\in A$, $b\in B$ 时,(2.13)过点(0, M_3)的正半

轨线 $L^+(M_3)$必与负 y 轴相交,且该交点位于点$(0, -M_2)$的下方,后与半直线 $x=-x_0, y>0$ 相交,且该交点在$(-x_0, M_2)$的上方. 如图 2.2 所示.

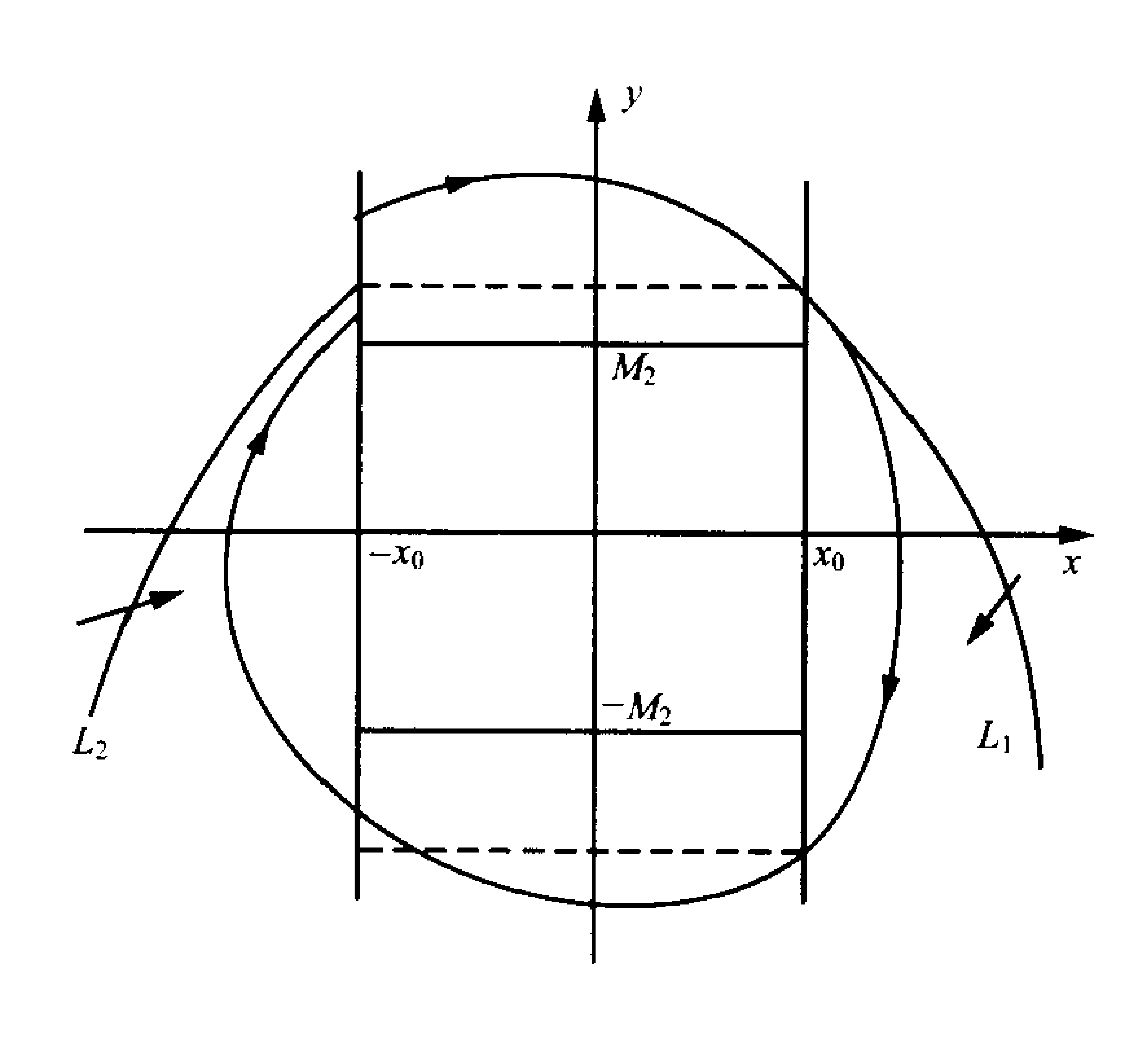


图 2.2

下面只需证明,对任意 $0<\varepsilon<\varepsilon_0, a\in A, b\in B$ 及 $y_0\geqslant M_3$,方程(2.13)的过$(0, y_0)$的轨线 $L(y_0)$都是非闭的. 事实上,对 $y_0\geqslant M_3$,若 $L(y_0)$不与负 y 轴相交,则显然 $L(y_0)$不是闭轨,若 $L(y_0)$与负 y 轴相交,设其交点为$(0, y'_0)$,则由 M_3 的取法知 $y'_0<-M_2$,于是由(2.15)知

$$y(x_0, y_0)<y(-x_0, y_0), \quad y(x_0, y'_0)<y(-x_0, y'_0). \tag{2.18}$$

考虑方程

$$\dot{x}=p(y)-\varepsilon F_2(x, b), \quad \dot{y}=-g(x) \tag{2.19}$$

过点$(0, y(x_0, y_0))$的正半轨线位于 $x\geqslant 0$ 中的部分,记其为 L_1,

L_1 关于 y 轴的对称线记为 L_2，由条件(ii)与(iii)知 L_2 也是(2.19)的轨线，当 $y_0=M_3$ 时，L_1 与 L_2 如图 2.2 所示. 注意到方程(2.13)与(2.19)的向量场的方向分别是 $(P,\ Q)=(p(y)-\varepsilon F_1-\varepsilon F_2,\ -g)$ 与 $(P_0,\ Q_0)=(p(y)-\varepsilon F_2,\ -g)$，由条件(ii)~(iv)及 $\varepsilon>0$ 知

$$(P,Q)\cdot(Q_0,\ -P_0)=-\varepsilon gF_1>0,\ |x|\geqslant x_0. \tag{2.20}$$

若 L_2 恒位于直线 $x=-x_0$ 左侧，则由(2.20)知(2.13)从 L_2 上任一点出发的正半轨线都进入其下方，因此，由(2.18)第一式知 $L(y_0)$ 必不能是闭轨. 若 L_2 与直线 $x=-x_0$ 有交点，记为 $(-x_0,\ y_0^*)$，则 L_1 与直线 $x=x_0$ 有交点 $(x_0,\ y_0^*)$，同上，由(2.20)知，成立 $y(x_0,\ y'_0)>y_0^*$，于是由(2.18)第二式知 $y(-x_0,\ y_0')>y_0^*$，再由(2.20)及(2.18)第一式，仿上可知 $L(y_0)$ 也不能闭. 证毕.

现在我们来考虑 n 次 Liénard 系统

$$\dot{x}=y-\varepsilon\sum_{i=1}^{n}a_ix^i,\ \dot{y}=-x. \tag{2.21}$$

用 m 表示 $\frac{n-1}{2}$ 的整数部分，即 $m=\left[\frac{n-1}{2}\right]$，我们要证明下述定理.

定理 2.5 (i) 对任意给定的平面有界集 U 与正数 $M>0$，都存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(U,\ M)>0$，使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$，$|a_i|\leqslant M(i=1,\cdots,n)$ 时方程(2.21)在 U 中至多有 m 个极限环. 此外，对每个 $h\geqslant 0$ 方程(2.21)在圆周 $x^2+y^2=2h$ 的环性数是 m. (ii) 对任意给定数 $K>0$，$M>0$，存在 $\varepsilon_0>0$，使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$，$|a_{2m+1}|\geqslant K$，$|a_j|\leqslant M(0\leqslant j\leqslant n,\ j\neq 2m+1)$ 时(2.21)在整个平面上至多有 m 个极限环.

证明 记 $H(x,\ y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，则由(1.20)知(2.21)的一

阶 Melnikov 函数为

$$M(h,\ a)=\sum_{i=1}^{n}a_i\oint_{H=h}x^i\,\mathrm{d}y=\sum_{j=1}^{m+1}a_{2j-1}A_jh^j,$$

$$a=(a_1,\cdots,a_n),\ A_j=2^j\int_0^{2\pi}\cos^{2j}t\,\mathrm{d}t,\ j=1,\cdots,m+1.$$

令 $b=(a_1,\ a_3,\cdots,a_{2m+1})\in R^{m+1}$, $N(h,\ b)=\sum_{j=1}^{m+1}a_{2j-1}A_jh^{j-1}$，则对任意 $b\neq0$, N 关于 h 在 $h\geqslant0$ 上至多有 m 个根. 且可以有 m 个正根. 又注意到 $\operatorname{rank}\dfrac{\partial b}{\partial a}=m+1\leqslant n$，且当 $b=0$ 时，(2.21)的轨线关于 y 轴对称，故对任何紧集 $V\subset R^2$，都存在 $\varepsilon_1>0$，使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_1$, $b=0$ 时，(2.21)在 V 的轨线都是闭的. 于是结论(i)的前半部分由定理 2.2 即得. 而后半部分由定理 2.1 即知.

为证结论(ii)，先设 $|a_{2m+1}|=K$，则由定理 2.4 知，存在 $\varepsilon_1>0$ 及有界区域 $U=U(K,\ M)\subset R^2$，使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$，$|a_{2m+1}|=K$，$|a_j|\leqslant M(1\leqslant j\leqslant n,\ j\neq2m+1)$ 时，(2.21)的所有闭轨都位于 U 内. 再由结论(i)，存在 $0<\varepsilon_0<\varepsilon_1$ 使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$，$|a_{2m+1}|=K$，$|a_j|\leqslant M(0\leqslant j\leqslant n,\ j\neq2m+1)$ 时，(2.21)在 U 中至多有 m 个极限环，于是当 $|a_{2m+1}|=K$ 时，结论(ii)得证. 对 $|a_{2m+1}|>K$，令 $\eta\in(0,1)$ 满足 $\eta^{2m}=\dfrac{K}{|a_{2m+1}|}$，在(2.21)中$(x,\ y)$换为$(\eta x,\ \eta y)$，可得

$$\dot{x}=y-\varepsilon\sum_{i=1}^{n}b_ix^i,\ \dot{y}=-x,$$

其中 $b_i=a_i\eta^{i-1}$, $i=1,\cdots,n$，由 η 的选取知

$$|b_{2m+1}|=K,\ |b_i|\leqslant|a_i|\leqslant M,\ i=1,\cdots,n,\ i\neq2m+1,$$

于是对上述方程利用已证的结论，即得结论(ii). 证毕.

注意到对方程(2.21)来说函数 $M(h,\ a)$ 与 $a_2,\cdots,a_{2m}$ 无关.

设 $F(h, \varepsilon, a)$表示由(2.1)定义的方程(2.21)的后继函数,我们提出下列公开问题:F 与 $a_2,\cdots,a_{2m}$ 无关吗?我们认为是无关的.

我们猜想定理2.5的结论(i)对 $U=R^2$ 成立. 要证这一结论涉及(2.21)的关于充分小的 ε 为无界的极限环的分支,这是一个很困难的问题,目前尚无有效的一般方法. 在一些特殊条件下 Han M.([36])与 Brows 等([5])讨论了多项式的赤道的扰动分支,最近 Dumortier 等([22])把一类二次系统的异宿环化为一三次系统的有限异宿环来考虑. 此外,我们指出 Melnikov 函数方法不能直接用来讨论无界奇闭轨的扰动分支.

最后我们指出单参数扰动与多参数扰动的区别. 考虑一般的扰动系统(1.13),且设(1.18)成立. 如果让量 δ 固定,则可把(1.13)视为只含参数 ε 的扰动. 我们提出这样一个问题:设已证对某一给定的系统(1.13),对每个固定的 $\delta\in R^m$ 都存在 $\varepsilon^*=\varepsilon^*(\delta)>0$,使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon^*$ 时,(1.13)在某区域内至多有 k 个极限环或有一族闭轨(这一结论的证明方法一般是这样的,先证一阶 Melnikov 函数 $M_1(h, \delta)$至多有 k 个根,当 $M_1\equiv 0$ 时,再证二阶 Melnokov 函数 $M_2(h, \delta)$至多有 k 个根,直到发现 $l\geqslant 1$, 使当 $M_j\equiv 0,\ j=1,\cdots,l-1,\ M_l\neq 0$ 时,$M_l(h, \delta)$至多有 k 个根,而当 $M_j\equiv 0,\ j=1,\cdots,l$ 时,有 $M_j\equiv 0,\ j\geqslant l+1$,从而 $F\equiv 0$),这是否蕴含当 ε 与 δ 都变化时,所述系统在该区域内至多有 k 个极限环? 不难给出反例,说明问题的答案是否定的,下述七次 Liénard 系统就是这样一个例子:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y-\varepsilon[a_1x+a_2x^3-a_3^2x^5+\varepsilon a_3x^7],\\ \dot{y} &= -x.\end{aligned}\tag{2.22}$$

可证对每个固定的 $0\neq a=(a_1, a_2, a_3)\in R^3$,存在 $\varepsilon^*(a)>0$,使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon^*$ 时,(2.22)在原点邻域内至多有 2 个极限环,当 $a=0$ 时,原点是(2.22)的中心. 但当 a 与 ε 同时变动,且 $|\varepsilon|+|a|$ 充分小时,(2.22)在原点的环性数是 3. 这说明必成立

$$\liminf_{a\to 0} \varepsilon^*(a) = 0.$$

事实上,注意到对(2.22)有

$$M(h, a) = -\pi h\left[a_1 + \frac{3}{4}a_2 h - \frac{5}{8}a_3^2 h^2\right],$$

由定理1.3及定理2.5,只须证明(2.22)在原点的环性数为3. 为此先考虑系统

$$\dot{x} = y - c_1 x^5(c_2 - c_3 x^2),\ \dot{y} = -x. \tag{2.23}$$

对(2.23)引入极坐标可得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{c_1 r^5 \cos^6\theta(c_2 - c_3 r^2\cos^2\theta)}{1 - c_1 r^4 \sin\theta\cos^5\theta(c_2 - c_3 r^2\cos^2\theta)}, \tag{2.24}$$

方程(2.24)的当 $\theta = 0$ 时以 r_0 为初值的解具有形式

$$r(\theta, r_0, c) = r_0 + c_1 r_0^5[c_2(A(\theta) + O(r_0^4)) - c_3 r_0^2(B(\theta) + O(r_0^2))],$$

其中

$$A(\theta) = \int_0^\theta \cos^6 t\,\mathrm{d}t,\ B(\theta) = \int_0^\theta \cos^8 t\,\mathrm{d}t.$$

易知 $A(2\pi) = \frac{5}{8}\pi, B(2\pi) = \frac{35}{64}\pi$, 因此,当 $0 < c_2 \ll c_3$ 时,存在惟一的 $r_0 = \sqrt{\frac{8c_2}{7c_3}} + O\left(\frac{c_2}{c_3}\right)$ 使 $r(2\pi, r_0, c) = r_0$,故令 $c_1 = \varepsilon a_3$, $c_2 = a_3$, $c_3 = \varepsilon$,可知当 $a_1 = a_2 = 0$, $0 < a_3 \ll \varepsilon$ 时,(2.22)在原点邻域内有稳定极限环 L_1. 现固定(ε, a_3)且让 a_1, a_2 变动使有 $0 < -a_1 \ll a_2 \ll a_3$,则原点已两次改变稳定性,从而此时在 L_1 内部必有两个极限环(它们是从原点分支出来的),这两个极限环的存在性也可通过分析(2.22)的后继函数而得到. 于是当 $0 < -a_1 \ll a_2 \ll a_3 < \varepsilon$ 时,(2.22)在原点邻域内有三个极限环.

关于闭轨族产生极限环的问题在书[131]与[65]中有系统研究,定理2.1(的前半部分)就可在这些书中找到. 定理2.2~2.5与定理1.3~1.5均是作者最近获得的,见[49]~[51],其中定理2.5且 n 为奇数的情况曾在Albrecht[1]中用不同的方法所得到.

§3 同宿分支

本节研究同宿轨的分支,就一般理论而言,研究同宿轨的分支比研究Hopf分支与Poincaré分支要困难得多. 尽管如此,相当系统的一般理论已经形成,而且在多项式系统极限环的研究方面已有广泛的应用. 本节着重讨论同宿轨产生惟一和惟二极限环的条件. 更多个极限环的分支问题只作简单介绍.

3.1 极限环的惟一性

考虑 C^n 系统($n\geqslant1$)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) + \varepsilon f_0(x, y, \varepsilon, \delta),\\ \dot{y} &= g(x, y) + \varepsilon g_0(x, y, \varepsilon, \delta),\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中 ε 为小参数,$\delta\in D\subset R^m$,D 为有界集,$m\geqslant1$,设当 $\varepsilon=0$ 时(3.1)有轨线 $L: z=z(t)=(x(t), y(t))$, $t\in R$,且存在鞍点 S_0 使

$$\lim_{t\to+\infty} z(t) = \lim_{t\to-\infty} z(t) = S_0.$$

我们曾称这种轨线为同宿轨,而 L 与 S_0 一起(或 L 本身)又称为同宿环. 为确定计,设 L 为顺时针定向的,S_0 为双曲鞍点,则有图3.1中所示的两种情况.

由于类似性,以下只对第一种情况进行讨论. 注意到 S_0 的双曲性,当 ε 充分小时,(3.1)在 S_0 附近有惟一的鞍点 $S(\varepsilon, \delta)$,也为双曲的,且(3.1)在 L 附近有位于 $S(\varepsilon,\delta)$ 的稳定(不稳定)流形上的分界线 $L^s(\varepsilon, \delta)(L^u(\varepsilon,\delta))$,设它们的参数方程分别为

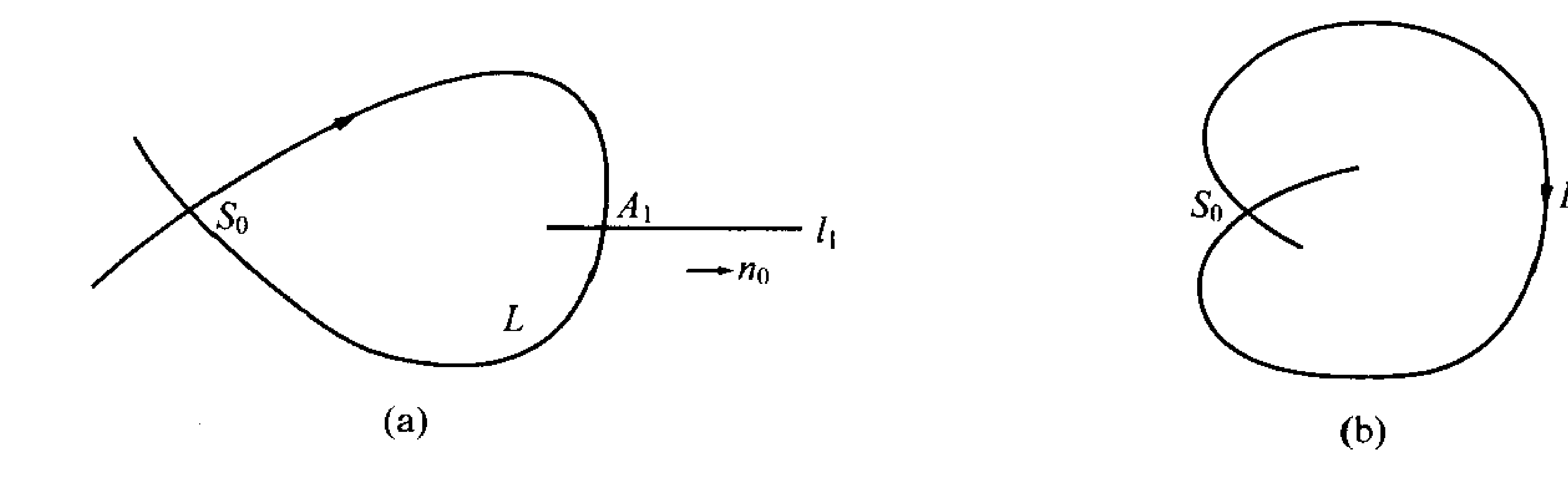


图 3.1 顺时针定向的同宿轨

$$L^s: z = z^s(t, \varepsilon, \delta) = (x^s(t, \varepsilon, \delta), y^s(t, \varepsilon, \delta)), \quad t \geqslant 0,$$

$$L^u: z = z^u(t, \varepsilon, \delta) = (x^u(t, \varepsilon, \delta), y^u(t, \varepsilon, \delta)), \quad t \leqslant 0.$$

任取点 $A_1 \in L$,过点 A_1 作(3.1)的截线 l_1,与单位向量

$$n_0 = \frac{1}{|f(A_1), g(A_1)|}(-g(A_1), f(A_1))$$

同向. 又设 L^s, L^u 与 l_1 的交点分别为 A^s 与 A^u,则由于(3.1)为自治系统,可设

$$A_1 = z(0),\ A^s = z^s(0, \varepsilon, \delta),\ A^u = z^u(0, \varepsilon, \delta). \quad (3.2)$$

可证

引理 3.1 设(3.2)成立,则当 ε 充分小时,一致成立

$$z^s(t, \varepsilon, \delta) = z(t) + \varepsilon z_1^s(t, \delta) + o(\varepsilon),\ t \geqslant 0,$$

$$z^u(t, \varepsilon, \delta) = z(t) + \varepsilon z_1^u(t, \delta) + o(\varepsilon),\ t \leqslant 0,$$

其中 z_1^s, z_1^u 分别在 $t \geqslant 0, t \leqslant 0$ 上有界.

证明 以第一式为例证之. 不妨设鞍点 S 恒位于原点. 由稳定流形定理可以设存在原点的邻域 U,使 L^s 在 U 中的部分可表示为 $x = W(y, \varepsilon, \delta) = O(y^2)$, $0 \leqslant -y \ll 1$,又存在常数 $t_1 > 0$,使对一切 $t \geqslant t_1$ 有 $z^s(t, \varepsilon, \delta), z(t) \in U$,于是当 $t \geqslant t_1$ 时,y^s 满足方程

$$\dot{y} = g(W, y) + \varepsilon g_0(W, y, \varepsilon, \delta) \equiv G(y, \varepsilon, \delta),$$

$$G_y(0, 0, \delta) < 0.$$

由于当 $t \geqslant t_1$ 时，$y(t)$是上述方程当 $\varepsilon = 0$ 时的解，故存在 $t'_1 = t_1 + t_0$，$t_0 = O(\varepsilon)$使 $y^s(t'_1, \varepsilon, \delta) = y_1(t_1)$. 令

$$y^*(t) = y^s(t + t_0, \varepsilon, \delta), \tilde{y}(t) = y^*(t) - y(t),$$

则 $\tilde{y}$ 满足

$$\tilde{y}'(t) = A(t)\tilde{y}(t) + G(y(t), \varepsilon, \delta) - G(y(t), 0, \delta),$$

其中

$$A(t) = \int_0^1 G_y(y(t) + s\tilde{y}(t), \varepsilon, \delta)\mathrm{d}s.$$

于是由常数变易公式知

$$\tilde{y}(t) = \int_{t_1}^t e^{\int_s^t A(u)\mathrm{d}u}[G(y(s), \varepsilon, \delta) - G(y(s), 0, \delta)]\mathrm{d}s,$$

由于 $G_y(0, 0, \delta) < 0$，只要 U 适当小可使 G_y 在 U 的闭包中为负，从而存在常数 $\alpha < 0$，使对 $t \geqslant t_1$ 有 $A(t) < \alpha$，于是由上式知

$$\tilde{y}(t) = y^s(t + t_0, \varepsilon, \delta) - y(t) = O(\varepsilon), t \geqslant t_1.$$

注意到 $x^s = W(y^s, \varepsilon, \delta)$，利用微分中值定理又可知

$$x^s(t + t_0, \varepsilon, \delta) - x(t) = O(\varepsilon), t \geqslant t_1,$$

从而

$$z^*(t, \varepsilon, \delta) \equiv z^*(t + t_0, \varepsilon, \delta) = z(t) + O(\varepsilon), t \geqslant t_1,$$

在有限区间$[-|t_0|, t_1]$上利用解对初值与参数的可微性定理以及 $z^*(t_1, \varepsilon, \delta) = z(t_1) + O(\varepsilon)$，又知

$$z^*(t, \varepsilon, \delta) = z(t) + O(\varepsilon), -|t_0| \leqslant t \leqslant t_1.$$

从而由 $t_0=O(\varepsilon)$知

$$z^s(t,\varepsilon,\delta)=z(t-t_0)+O(\varepsilon)=z(t)+O(\varepsilon),\ t\geqslant 0.$$

由此即得结论．证毕．

现设

$$A^s=A_1+a^s(\varepsilon,\delta)n_0,\ A^u=A_1+a^u(\varepsilon,\delta)n_0,$$

则由(3.2),向量 A^u-A^s 的有向长度为

$$d(\varepsilon,\delta,A_1)=a^u(\varepsilon,\delta)-a^s(\varepsilon,\delta)$$
$$=\langle n_0,z^u(0,\varepsilon,\delta)-z^s(0,\varepsilon,\delta)\rangle,$$

其中$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示向量内积．由引理 3.1 知

$$d(\varepsilon,\delta,A_1)=\varepsilon\langle n_0,z_1^u(0,\delta)-z_1^s(0,\delta)\rangle+o(\varepsilon),\tag{3.3}$$

下面导出量$\langle n_0,z_1^u(0,\delta)-z_1^s(0,\delta)\rangle$的表达式．令

$$r(t)=(-g(z(t)),f(z(t))),$$

$$Q(t)=\langle r(t),z_1^u(t,\delta)-z_1^s(t,\delta)\rangle=Q^u(t)-Q^s(t),$$

其中 $Q^{u,s}(t)=\langle r(t),z_1^{u,s}(t,\delta)\rangle$.

引理 3.2 在上述记法下,成立下式

$$Q^s(t)\exp\left(-\int_0^t(f_x+g_y)(z(t))\mathrm{d}t\right)\to 0,\ 当\ t\to+\infty\ 时,$$

$$Q^u(t)\exp\left(-\int_0^t(f_x+g_y)(z(t))\mathrm{d}t\right)\to 0,\ 当\ t\to-\infty\ 时,$$

证明 以第一式为例证之．由引理 3.1 知,z_1^s 在 $t\geqslant 0$ 上有界,因此只须证

$$r(t)\exp\left(-\int_0^t(f_x+g_y)(z(t))\mathrm{d}t\right)\to 0,\ 当\ t\to+\infty\ 时.$$

不妨设 S_0 在原点且

$$f(x,\ y) = \lambda_1 x + O(|x,\ y|^2),$$

$$g(x,\ y) = \lambda_2 y + O(|x,\ y|^2),\ \lambda_2 < 0 < \lambda_1,$$

取 $\mu \in (0,1)$充分小,使 $\lambda_2(1-\mu)+\mu-\lambda_1-\lambda_2<0$. 由第一章稳定流形定理的推论知,存在常数 $N>0$ 及充分大的 $t_1>0$,使当 $t \geqslant t_1$时成立

$$|r(t)| \leqslant N e^{\lambda_2(1-\mu)(t-t_1)},$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 - \mu < (f_x + g_y)(z(t)) < \lambda_1 + \lambda_2 + \mu,$$

因此

$$-\int_0^t (f_x + g_y)(z(t))\mathrm{d}t \leqslant -\int_0^{t_1} (f_x + g_y)(z(t))\mathrm{d}t$$
$$+ (\mu - \lambda_1 - \lambda_2)(t - t_1),$$

由此及 μ 的选取即得证明. 证毕.

引理 3.3 设

$$M(\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (fg_0 - gf_0)\exp\left(-\int_0^t (f_x + g_y)\mathrm{d}\tau\,|_{\varepsilon=0,\ z=z(t)}\right)\mathrm{d}t, \tag{3.4}$$

则

$$d(\varepsilon,\ \delta,\ A_1) = \frac{\varepsilon M(\delta)}{|f(A_1),\ g(A_1)|} + o(\varepsilon).$$

证明 记 $h(z,\ \varepsilon) = (f+\varepsilon f_0,\ g+\varepsilon g_0)$,将引理 3.1 中 z^s 的展式代入(3.1)并对 ε 求导,再令 $\varepsilon=0$ 可得

$$\dot{z}_1^s = h_z(z(t),\ 0)z_1^s + h_\varepsilon(z(t),\ 0),$$

于是由 Q^s 的定义知

$$\dot{Q}^s = \langle \dot{r}, z_1^s \rangle + \langle r, h_z(z, 0) z_1^s \rangle + \langle r, h_\varepsilon(z, 0) \rangle.$$

因为

$$\dot{r} = (-Dgh, Dfh)_{\varepsilon=0} = (-g_x f - g_y g, f_x f + f_y g),$$

$$\langle r, h_z(z, 0) z_1^s \rangle = \langle -gDf + fDg, z_1^s \rangle,$$

$$-gDf + fDg = (-gf_x + fg_x, -gf_y + fg_y),$$

可知

$$\langle \dot{r}, z_1^s \rangle + \langle r, h_z z_1^s \rangle = (f_x + g_y) Q^s,$$

因此

$$\dot{Q}^s = (f_x + g_y) Q^s + fg_0(z, 0, \delta) - gf_0(z, 0, \delta),$$

由此解得

$$\exp\left(-\int_0^t (f_x + g_y) \mathrm{d}t\right) Q^s(t)$$

$$= Q^s(0) + \int_0^t (fg_0 - gf_0)_{\varepsilon=0} \exp\left(-\int_0^t (f_x + g_y) \mathrm{d}\tau\right) \mathrm{d}t.$$

令 $t \to +\infty$,并利用引理 3.2 可得

$$Q^s(0) = -\int_0^{+\infty} (fg_0 - gf_0)_{\varepsilon=0} \exp\left(-\int_0^t (f_x + g_y) \mathrm{d}\tau\right) \mathrm{d}t.$$

同理可得

$$Q^u(0) = -\int_0^{-\infty} (fg_0 - gf_0)_{\varepsilon=0} \exp\left(-\int_0^t (f_x + g_y) \mathrm{d}\tau\right) \mathrm{d}t,$$

于是由 r, Q 和 n_0 的定义知

$$\langle n_0, z_1^u(0, \delta) - z_1^s(0, \delta) \rangle = \frac{Q(0)}{|r(0)|} = \frac{M(\delta)}{|f(A_1), g(A_1)|},$$

从而由(3.3)即得证明. 证毕.

由于已设同宿轨 L 为顺时针定向的，分界线 L^s 与 L^u 的相对位置与函数 d 的符号的关系由图 3.2 给出.

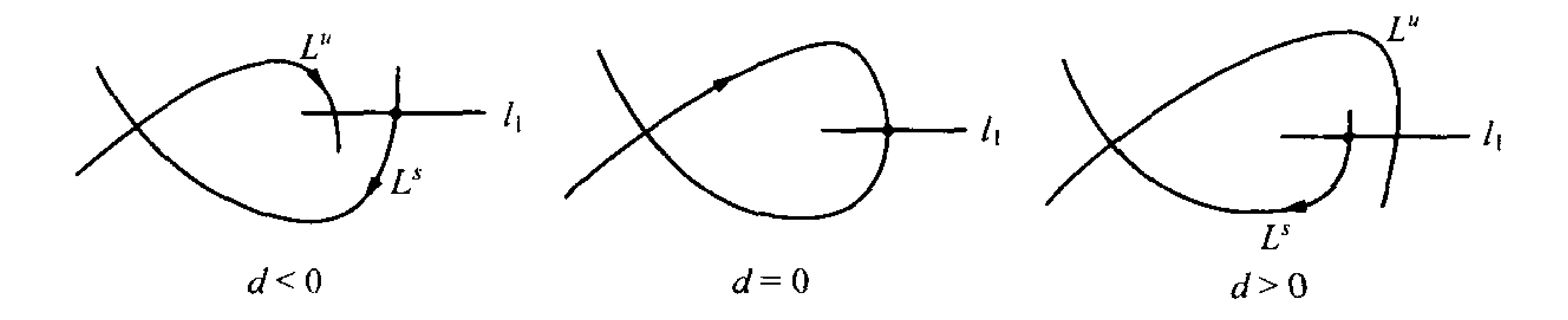


图 3.2　L^s 与 L^u 的相对位置

截线 l_1 上点 $A^s(=L^s\cap l_1)$左侧的任一点 A 可表示为

$$A = A_1 + an_0,\ a \leqslant a^s(\varepsilon,\ \delta),$$

设(3.1)从点 A 出发的正半轨线与 l_1 的后继交点为 B，则它可表示为

$$B = A_1 + P(a,\ \varepsilon,\ \delta)n_0,\ a < a^s(\varepsilon,\delta).$$

易见

$$\lim_{a\to a^s-0} P(a,\ \varepsilon,\ \delta) = a^u(\varepsilon,\delta).$$

我们称函数 $P: l_1\to l_1$ 为(3.1)在 L 附近的 Poincaré 映射，其定义域为 $a\leqslant a^s(\varepsilon,\delta)$且$|a|$充分小，而称 $F(a,\ \varepsilon,\ \delta)\equiv P(a,\ \varepsilon,\ \delta)-a$ 为(3.1)在 L 附近的后继函数. 于是

$$\begin{aligned}F(a^s,\ \varepsilon,\ \delta) &= a^u(\varepsilon,\ \delta) - a^s(\varepsilon,\ \delta)\\ &= d(\varepsilon,\ \delta,\ A_1).\end{aligned} \tag{3.5}$$

引理 3.4　存在 C^n 函数 $\mu(F,\ a,\ \varepsilon,\delta)=O(F)$使成立

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -1 + \frac{1}{1+\mu(F,\ a,\ \varepsilon,\ \delta)}$$

$$\cdot \exp\int_{\widehat{AB}} [f_x + g_y + \varepsilon(f_{0x} + g_{0y})]\mathrm{d}t,$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial F}(0,0,0,\delta)$$

$$= \left\langle \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}(A_1)n_0, \frac{(f(A_1), g(A_1))}{|f(A_1), g(A_1)|} \right\rangle.$$

证明 设 h 如前,并记 $h_a = h(A_1 + an_0, \varepsilon)$,又设 $z(t, A, \varepsilon)$表示满足 $z(0, A, \varepsilon) = A$ 的解,则存在 $\tau = \tau(a, \varepsilon)$ 使 $B = z(\tau, A, \varepsilon)$,于是

$$z(\tau, A, \varepsilon) = A_1 + (F(a, \varepsilon, \delta) + a)n_0,$$

上式两边对 A 求导得

$$\left(\frac{\partial F}{\partial a} + 1\right)n_0 = \frac{\partial z}{\partial t}(\tau, A, \varepsilon)\frac{\partial \tau}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial A}n_0$$

$$= h_p \frac{\partial \tau}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial A}(\tau, A, \delta)n_0, \qquad (3.6)$$

其中 $h_p = h(A_1 + P(a, \varepsilon, \delta)n_0, \varepsilon)$,与 n_0 类似,设 n_p 表示与 h_p 垂直的单位向量,则对式(3.6)两边与 n_p 取内积,可得

$$\frac{\partial F}{\partial a} + 1 = \left\langle n_p, \frac{\partial z}{\partial A}(\tau, A, \varepsilon)n_0 \right\rangle \Big/ \langle n_p, n_0 \rangle. \qquad (3.7)$$

因为$\frac{\partial z}{\partial A}(t, A, \varepsilon)$是线性方程

$$\dot{z} = \frac{\partial h}{\partial z}(z(t, A, \varepsilon), \varepsilon)z \qquad (3.8)$$

的基本解矩阵,而$\frac{\partial z}{\partial t}(t, A, \varepsilon)$是(3.8)的一个解,又注意到

$$\frac{\partial z}{\partial A}(0, A, \varepsilon) = Id, \frac{\partial z}{\partial t}(0, A, \varepsilon) = h_a,$$

由解的惟一性可得

$$\frac{\partial z}{\partial A}(t, A, \varepsilon)h_a = \frac{\partial z}{\partial t}(t, A, \varepsilon),$$

特别,取 $t=\tau(A,\varepsilon)$,由上式得

$$\frac{\partial z}{\partial A}(\tau, A, \varepsilon)h_a = h_p. \tag{3.9}$$

设

$$\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial A}(\tau, A, \varepsilon)n_0 = \varepsilon_1 h_p + \varepsilon_2 n_0, \\ &h_p = (1+\mu)h_a + \varepsilon_3 n_0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

则由(3.9)与(3.10)知

$$\frac{\partial z}{\partial A}(\tau, A, \varepsilon)h_p = (1+\mu+\varepsilon_3\varepsilon_1)h_p + \varepsilon_3\varepsilon_2 n_0,$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial A}(\tau, A, \varepsilon)(h_p, n_0) = (h_p, n_0)\begin{bmatrix} 1+\mu+\varepsilon_3\varepsilon_1 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3\varepsilon_2 & \varepsilon_2 \end{bmatrix},$$

故有

$$\det\frac{\partial z}{\partial A}(\tau, A, \varepsilon) = (1+\mu)\varepsilon_2.$$

另一方面,由式(3.10)第一式得

$$\left\langle n_p, \frac{\partial z}{\partial A}n_0\right\rangle = \varepsilon_2\langle n_p, n_0\rangle,$$

因此由(3.7)知

$$\frac{\partial F}{\partial a} + 1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{1+\mu}\det\frac{\partial z}{\partial A}(\tau, A, \varepsilon),$$

由于 $\frac{\partial z}{\partial A}$ 是(3.8)的基解矩阵,且 $\left.\frac{\partial z}{\partial A}\right|_{t=0} = Id$,由 Liouvill 公式知(见第一章引理 1.4 的证明)

$$\det \frac{\partial z}{\partial A}(\tau, A, \varepsilon) = \exp\int_0^\tau \operatorname{tr} \frac{\partial h}{\partial z}(z(\tau, A, \varepsilon), \varepsilon)\mathrm{d}t,$$

因此引理中$\frac{\partial F}{\partial a}$的表达式成立，且由(3.10)第二式得

$$h_p - h_a = \mu h_a + \varepsilon_3 n_0,$$

上式两边与 $h(A_1, 0)$取内积，得到 $\mu = \langle h_p - h_a, h(A_1, 0)\rangle / \langle h_a, h(A_1, 0)\rangle$，注意到

$$h_p - h_a = h(A + Fn_0, \varepsilon) - h(A, \varepsilon) = O(F),$$

可知 μ 关于(F, A, ε)为 C^n 的，且

$$\left.\frac{\partial \mu}{\partial F}\right|_{F=0} = \left\langle \frac{\partial h}{\partial z}(A_1, 0)n_0, \frac{h(A_1, 0)}{|h(A_1, 0)|} \right\rangle + O(|a, \varepsilon|).$$

证毕.

定理 3.1 记 $\sigma_0 = (f_x + g_y)(S_0)$. 若 $\sigma_0 \neq 0$，则

(i) 当 $\sigma_0 < 0(>0)$时同宿轨 L 为内侧稳定(不稳定)的；

(ii) 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 及 L 的邻域 V，使当 $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$, $\delta \in D$ 时，(3.1)在 V 中至多有一个极限环，且极限环存在当且仅当 $\sigma_0 d(\varepsilon, \delta, A_1) > 0$，而且其稳定性由 σ_0 的符号决定.

证明 不妨设 $\sigma_0 < 0$. 取 S_0 的邻域 U，使当$|\varepsilon|$充分小且$(x, y) \in U$ 时，有

$$f_x + g_y + \varepsilon(f_{0x} + g_{0y}) < \sigma_0/2 < 0,$$

又设 L_1 表示轨线段 AB 与 U 的交，L_2 表示 AB 的其余部分，则

$$\int_{L_1} [f_x + g_y + \varepsilon(f_{0x} + g_{0y})]\mathrm{d}t \to -\infty \quad (\text{当 } a \to a^s),$$

而

$$\int_{L_2} [f_x + g_y + \varepsilon(f_{0x} + g_{0y})]\mathrm{d}t$$

趋于一有界量,故由引理 3.4 知

$$\frac{\partial F}{\partial a} \to -1 \quad (\text{当 } a \to a^s).$$

注意到 $a^s = O(\varepsilon)$,可知当 $-a>0$ 充分小时,有 $F(a, 0, \delta) > F(0,0,\delta)=0$,且当 $|\varepsilon| + |a|$ 充分小时 F 关于 a 至多有一个根,于是 L 为稳定的,且(3.1)在其附近至多有一个极限环.

取 $a_0<0$,且 $|a_0|$ 充分小,使 $F(a_0, 0, \delta)>0$,则存在 $\varepsilon_0>0$,使当 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 时,$F(a_0, \varepsilon, \delta)>0$,而由(3.5)知当 $d(\varepsilon, \delta, A_1)<0(>0)$ 时,$F(a^s, \varepsilon, \delta)<0(>0)$,故由 F 的连续性知当 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 且 $d(\varepsilon, \delta, A_1)<0(>0)$ 时,F 在区间 $(a_0, a^s(\varepsilon,\delta))$ 上有奇(偶)数个根,于是由极限环的惟一性知当 $|\varepsilon|<\varepsilon_0, d(\varepsilon, \delta, A_1)<0(>0)$ 时,(3.1)在 L 附近有惟一稳定极限环(没有极限环).证毕.

如果 $f_x + g_y \equiv 0$,则式(3.4)成为

$$M(\delta) = \oint_L (fg_0 - gf_0)\mathrm{d}t. \tag{3.11}$$

定理 3.2 设存在 C^{n+1} 类函数 $H(x, y)$ 使

$$H_y = f(x, y), \ H_x = -g(x, y). \tag{3.12}$$

(i) 当 $|\varepsilon|$ 充分小,$\delta \in D$ 时,(3.1)在 L 附近存在极限环的必要条件是存在 $\delta_0 \in D$ 使 $M(\delta_0)=0$;

(ii) 设 $M(\delta_0)=0$,又设

$$\sigma(\delta_0) \equiv (f_{0x} + g_{0y})(S_0, 0, \delta_0) \neq 0,$$

则存在 $\varepsilon_0>0$,L 的邻域 V,使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$, $|\delta-\delta_0|<\varepsilon_0$ 时,(3.1)在 V 中至多有一个极限环,且极限环存在当且仅当 $\sigma(\delta_0) \cdot d^*(\varepsilon, \delta)>0$,而且其稳定性由 $\varepsilon\sigma(\delta_0)$ 的符号决定,其中

$$d^*(\varepsilon, \delta) = \frac{1}{\varepsilon} d(\varepsilon, \delta, A_1) = \frac{M(\delta)}{|f(A_1), g(A_1)|} + o(1).$$

证明 首先证明

$$F(a, \varepsilon, \delta)=\varepsilon F^{*}(a, \varepsilon, \delta), \tag{3.13}$$

其中 F^* 在区域 $(-\varepsilon_1, a^s(\varepsilon, \delta))\times(-\varepsilon_1, \varepsilon_1)\times D$ 上一致连续，$\varepsilon_1>0$ 为适当小的常数. 事实上,由(3.12)与(3.1)知

$$\begin{aligned} H(B)-H(A) &= \varepsilon\int_{AB}(fg_0-gf_0)\mathrm{d}t \\ &= \varepsilon\int_{AB}((f+\varepsilon f_0)g_0-(g+\varepsilon g_0)f_0)\mathrm{d}t \\ &= \varepsilon\int_{AB}g_0\mathrm{d}x-f_0\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

另一方面,由微分中值定理知

$$\begin{aligned} H(B)-H(A) &= \int_0^1 DH(A+s(B-A))\mathrm{d}s(B-A) \\ &= \int_0^1 DH(A+sFn_0)n_0\mathrm{d}sF(a, \varepsilon, \delta), \end{aligned}$$

于是有

$$F^{*}(a, \varepsilon, \delta)=\frac{\int_{AB}g_0\mathrm{d}x-f_0\mathrm{d}y}{\int_0^1 DH(A+sFn_0)n_0\mathrm{d}s}.$$

注意到,由 n_0 的定义知

$$\int_0^1 DH(A+sFn_0)n_0\mathrm{d}s=|f(A_1),$$

$$g(A_1)|+O(|a, F|)>0,$$

从而(3.13)成立. 由(3.5),引理 3.4 及(3.13)又知

$$\begin{aligned} &F^{*}(a^s, \varepsilon, \delta)=d^{*}(\varepsilon, \delta), \\ &\frac{\partial F^{*}}{\partial a}=\frac{-1}{1+\mu}[\beta+O(F^{*})], \end{aligned} \tag{3.14}$$

其中

$$\beta = \omega(x_0, \varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{1 - x_0^{\varepsilon}}{\varepsilon}, & \varepsilon \neq 0, \\ -\ln x_0, & \varepsilon = 0, \end{cases} \tag{3.15}$$

$$x_0 = \exp\int_{AB} (f_{0x} + g_{0y})\mathrm{d}t,$$

易证

$$\lim_{(x_0, \varepsilon) \to (0, 0)} \omega(x_0, \varepsilon) = +\infty.$$

事实上,若上式不成立,则存在点列$(x_n, \varepsilon_n) \to (0, 0)$使$\omega(x_n, \varepsilon_n) \to k \in R$,则$1 - x_n^{\varepsilon_n} = \varepsilon_n \omega(x_n, \varepsilon_n) \to 0$,从而$\varepsilon_n \ln x_n \to 0$,于是当$n$充分大时

$$1 - x_n^{\varepsilon_n} = 1 - e^{\varepsilon_n \ln x_n} = -\varepsilon_n \ln x_n (1 + o(1)),$$

由此知,当$n \to \infty$时

$$\omega(x_n, \varepsilon_n) = \frac{1}{\varepsilon_n}(1 - x_n^{\varepsilon_n}) \to +\infty,$$

与$k < +\infty$矛盾.

由于

$$d^*(0, \delta) = \frac{M(\delta)}{|f(A_1), g(A_1)|},$$

由(3.14)第一式即知结论(i)成立. 如果$\sigma(\delta_0) < 0$,则当$(a, \varepsilon) \to (0,0)$, $\delta \to \delta_0$时有

$$\int_{AB} (f_{0x} + g_{0y})\mathrm{d}t \to -\infty, \text{从而 } x_0 \to 0,$$

于是由(3.14),与定理3.1完全类似可证结论(ii)成立. 若$\sigma(\delta_0) > 0$,则利用

$$\beta = -\omega(x_0^{-1}, -\varepsilon),$$

同样可证结论(ii)此时也成立. 证毕.

由定理 3.2 即得

推论 3.1 设(3.12)成立,又设存在 $\delta_0=(\delta_{10},\cdots,\delta_{m0})\in R^m$ 使

$$M(\delta_0)=0,\ M'_{\delta_1}(\delta_0)\neq 0,\ \sigma(\delta_0)\neq 0,$$

则存在连续函数 $\delta_1^*(\varepsilon,\delta_2,\cdots,\delta_m)=\delta_{10}+o(1)$ 及 $\varepsilon_0>0$,使对 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$, $|\delta-\delta_0|<\varepsilon_0$,(3.1)在 L 附近有(惟一)极限环当且仅当

$$\sigma(\delta_0)M'_{\delta_1}(\delta_0)(\delta_1-\delta_1^*(\varepsilon,\delta_2,\cdots,\delta_m))>0,$$

而(3.1)在 L 附近有同宿轨当且仅当 $\delta_1=\delta_1^*(\varepsilon,\delta_2,\cdots,\delta_m)$.

在参数空间,由方程 $\delta_1=\delta_1^*(\varepsilon,\delta_2,\cdots,\delta_m)$ 给出的曲线(面)称为同宿分支曲线(面). 定理 3.1 中的 $\sigma_0\neq 0$ 与定理 3.2 中的 $\sigma(\delta_0)\neq 0$ 常称为同宿分支的非退化条件.

本节引理 3.1~3.3 可推广到周期扰动系统,见[29],这些结果最初是 Melnikov([111])在 1963 年获得的,定理 3.1 中极限环的惟一性部分曾在[2]中对解析系统(3.1)给出证明,而引理 3.4 是从[13]中对定理 3.1 中极限环惟一性的证明中提炼出来的. 定理 3.2 及其推论则属于罗定军,韩茂安与朱德明([104]),这里的证明有所简化,条件也有所减弱.

从以上讨论,我们已经看到,定理 3.1 与定理 3.2 等对任何 C^1 系统(3.1)均成立,这对(3.1)的光滑性的要求达到了最低限度. 对解析系统(3.1),韩茂安与李良应([58])证明了下述定理(此处证略).

定理 3.3 设(3.1)为解析系统,且 L 为孤立同宿环(即 L 是渐近稳定的或负向渐近稳定). 如果对一切 $\delta\in D$ 有 $M(\delta)\neq 0$,则存在 $\varepsilon_0>0$, L 的邻域 U,使对一切 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$, $\delta\in D$,(3.1)在 U 中至多有一个极限环.

3.2 极限环的惟二性

本小节将利用(3.1)在鞍点的标准形进一步讨论极限环的惟

二性. 首先,不失一般性,恒设鞍点 S 在原点,其次,由第一章命题 6.4,对 $n\geqslant 2$,存在 C^{n-1} 类变换

$$T_\varepsilon^*:\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T_\varepsilon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(|x,\ y|), \tag{3.16}$$

把(3.1)化为下述形式

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \lambda_1(\varepsilon,\ \delta)u[1 + h_1(u,\ v,\ \varepsilon,\delta)], \\ \dot{v} &= \lambda_2(\varepsilon,\ \delta)v[1 + h_2(u,\ v,\ \varepsilon,\delta)], \end{aligned} \tag{3.17}$$

其中 $h_i = uvh_i^* \in C^{n-1}$, $h_i^* \in C^{n-2}$, $i=1,2,\lambda_1>0>\lambda_2$,设 $p>0$ 为适当小的正数,分别以点 $Q_0(0,\ -p)$, $R_0(p,\ 0)$为端点作截线 l'_1 与 l'_2 如下:

$$l'_1 = \{(u,\ v): v = -p,\ 0\leqslant u\leqslant p\},$$

$$l'_2 = \{(u,\ v): u = p,\ -p\leqslant v\leqslant 0\},$$

任取点 $Q(u_0,\ -p)\in l'_1$,方程(3.17)过点 Q 的正轨线必交 l'_2 于某点 $R(p,\ -D(u_0,\ \varepsilon,\delta))$,如图 3.3(a)所示.

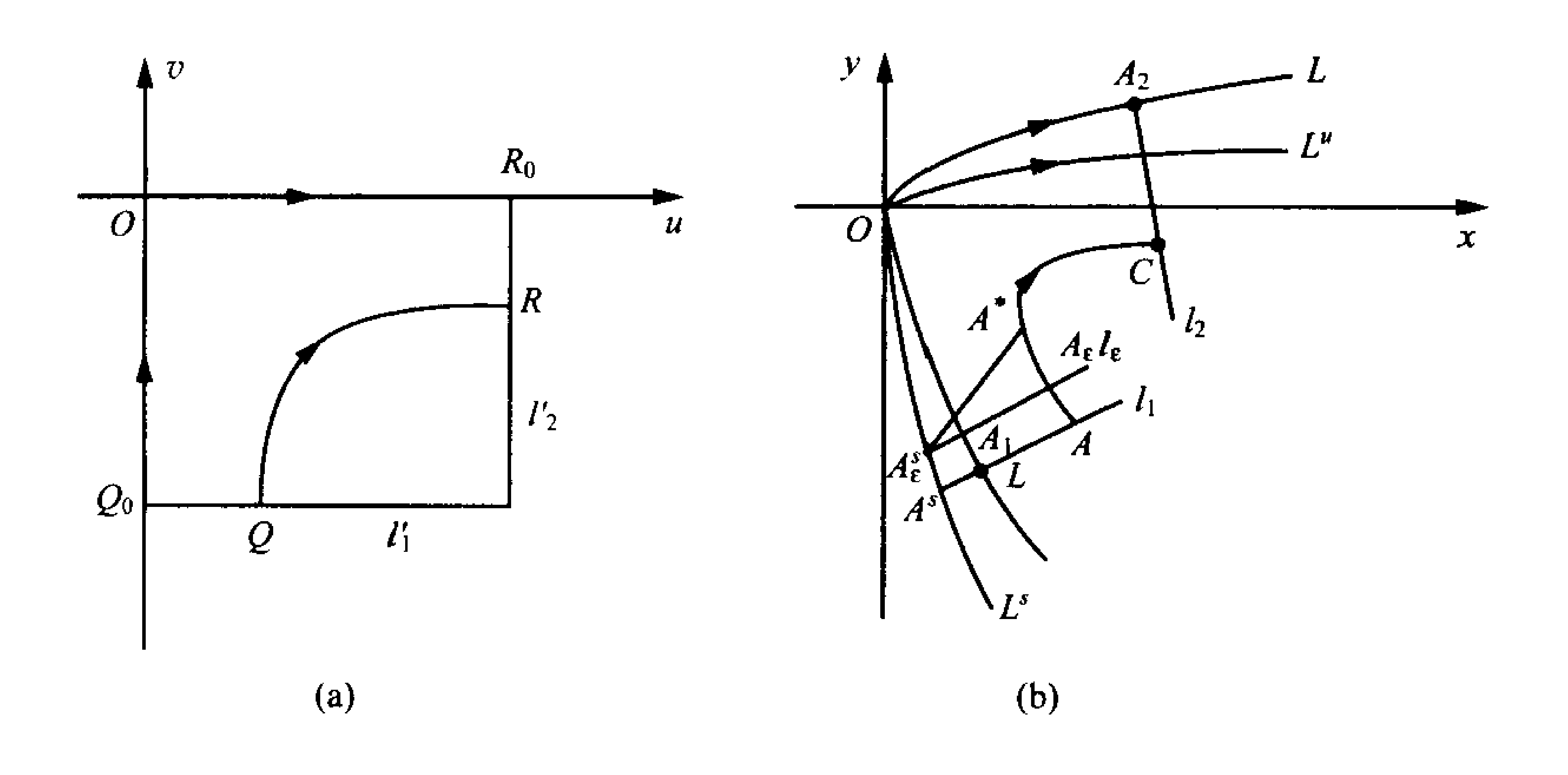


图 3.3 Dulac 映射

由鞍点性质知

$$\lim_{u_0 \to 0^+} D(u_0, \varepsilon, \delta) = 0,$$

因此,如补充定义 $D(0,\varepsilon, \delta)=0$,则 D 在 $0 \leqslant u_0 \leqslant p$ 上有定义且非负,称 D 为(3.17)的 Dulac 映射.

现取点 $A_1, A_2 \in L$ 满足

$$T_0^*(A_1) = Q_0, \ T_0^*(A_2) = R_0, \tag{3.18}$$

截线 l_1 的作法同前,过 A_2 作截线 l_2,其正向与向量

$$n'_0 = \frac{(-g(A_2), f(A_2))}{|f(A_2), g(A_2)|}$$

同向. 设(3.1)从点 $A \in l_1$ 出发的正半轨在原点附近与 l_2 交于点 C,则 C 可表示为

$$C = A_2 + P_1(a, \varepsilon, \delta)n'_0, \ a < a^s,$$

其中 $A = A_1 + an_0$. 当 $a \to a^s$ 时,P_1 有有限极限,记为 $a_2^u(\varepsilon,\delta)$,即

$$a_2^u(\varepsilon, \delta) \equiv P_1(a^s, \varepsilon,\delta),$$

则函数 P_1 对 $a \leqslant a^s$(且 $|a|$ 充分小)有定义,称 P_1 为(3.1)的 Dulac 映射.

下述引理给出了 Dulac 映射 D 与 P_1 的关系.

引理 3.5 存在 C^{n-1} 类函数

$$W_1(u, \varepsilon, \delta) = a^s(\varepsilon, \delta) - M_1(\varepsilon, \delta)u + o(u),$$

$$W_2(u, \varepsilon, \delta) = a_2^u(\varepsilon, \delta) - M_2(\varepsilon, \delta)u + o(u),$$

满足

$$\lim_{p \to 0} M_i(0, \delta) = \beta_i \sin\theta, \ i = 1,2.$$

其中 θ 为 L 的以原点为顶点的内角,

$$\beta_1 = \left| T_0^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right|,\ \beta_2 = \left| T_0^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right|,$$

使成立

$$\text{当 } a = W_1(u_0,\ \varepsilon,\ \delta) \text{ 时 } P_1 = W_2(D,\ \varepsilon, \delta),$$

或等价地 $P_1 \circ W_1 = W_2 \circ D$. 此外,如果要求 $\det T_0 = 1$,则有 $\beta_1 \beta_2 \sin\theta = 1$.

证明 记 $A_\varepsilon^s = (T_\varepsilon^*)^{-1}(Q_0)$, $A^* = (T_\varepsilon^*)^{-1}(Q)$,对给定的 $0 \leqslant u_0 < p$ 取 a 使 A^* 位于过点 A 的轨线上. 过 A_ε^s 作截线 l_ε,与 l_1 平行,又设(3.1)过 A 的轨线交 l_ε 于点 A_ε,如图 3.3(b)所示. 用 a_1 表示线段 $A_\varepsilon^s A^*$ 的长度,a_2 表示线段 $A_\varepsilon^s A_\varepsilon$ 的长度,对以 A_ε^s, A^* 与 A_ε 为顶点的三角形应用正弦定理可得

$$a_2 = a_1 \frac{\sin\angle A^*}{\sin\angle A_\varepsilon}. \tag{3.19}$$

由于水平线 $Q_0 Q$ 的原像弧 $(T_\varepsilon^*)^{-1}(Q_0 Q) \equiv \overset{\frown}{A_\varepsilon^s A^*}$ 为以 A_ε^s 与 A^* 为端点的光滑弧,从而该弧在其每一点处切线的斜率与线段 $A_\varepsilon^s A^*$ 的斜率当 $a_1 \to 0$ 时都趋于同一个量,因此,若记(3.1)在 A_ε^s 处的轨线切线与弧 $\overset{\frown}{A_\varepsilon^s A^*}$ 在 A_ε^s 处的切线有夹角 $\varphi_1(\varepsilon)$,而与 l_ε 有夹角 $\varphi_2(\varepsilon)$,则

$$\text{当 } a_1 \to 0 \text{ 时}, \angle A^* \to \varphi_1(\varepsilon),\ \angle A_\varepsilon \to \varphi_2(\varepsilon),$$

从而(3.19)可写为

$$a_2 = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} a_1 + o(a_1). \tag{3.20}$$

由于 l_ε 与 l_1 平行,易见

$$\varphi_2(\varepsilon) = \frac{\pi}{2} + O(\varepsilon). \tag{3.21}$$

下证

$$\lim_{p\to 0}\varphi_1(0) = \theta. \tag{3.22}$$

事实上,在 l'_1 上 Q_0 附近选取一点 Q_1,过 Q_1 作 l'_1 的垂线,与 u 轴交于点 Q_2,则当 $p\to 0$ 时 $(T_0^*)^{-1}(Q_0Q_1)\to(T_0^*)^{-1}(OQ_2)$,而这一极限位于 L 上,因此由 φ_1 的定义,当 $p\to 0$ 时 $\varphi_1(0)$的极限就是矢量$(T_0)^{-1}(0, 1)^T$ 与$(T_0)^{-1}(1,0)^T$ 的夹角 θ,即得(3.22).

另一方面,利用向量函数的微分中值定理,并注意到(3.16)可知

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left|(T_\varepsilon^*)^{-1}(Q) - (T_\varepsilon^*)^{-1}(Q_0)\right| \\
&= \left|\int_0^1 D(T_\varepsilon^*)^{-1}(Q_0 + s(Q - Q_0))(Q - Q_0)\mathrm{d}s\right| \\
&= \left|\int_0^1 [T_\varepsilon^{-1} + O(|u_0, p|)]\begin{pmatrix}u_0\\0\end{pmatrix}\mathrm{d}s\right| \\
&= N(\varepsilon, p)u_0 + o(u_0),
\end{aligned}$$

其中

$$N(0,0) = |T_0^{-1}(1, 0)^T| = \beta_1, \tag{3.23}$$

于是由(3.20)可得

$$\begin{aligned}
a_2 &= N(\varepsilon, p)\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}u_0 + o(u_0) \\
&\equiv K_1(u_0, \varepsilon, \delta),
\end{aligned} \tag{3.24}$$

且 K_1 关于 u_0 为 C^{n-1}类的,关于(ε, δ)为 C^n 的. 由(3.21),(3.22)与(3.23)知

$$\lim_{p\to0} N\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}\bigg|_{\varepsilon=0} = \beta_1\sin\theta.$$

又由于当 $a_2=0$ 时，$a=a^s(\varepsilon,\delta)$，当 $\varepsilon=0$ 时，$a=-a_2$，故存在 C^n 函数 $K_2(a_2,\varepsilon,\delta)=a^s(\varepsilon,\delta)-a_2(1+O(\varepsilon))$，使 $a=K_2(a_2,\varepsilon,\delta)$，于是，由(3.24)得

$$\begin{aligned} a &= K_2(K_1(u_0,\varepsilon,\delta),\varepsilon,\delta) \\ &= a^s(\varepsilon,\delta) - \left(N\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} + O(\varepsilon)\right)u_0 + o(u_0) \\ &\equiv W_1(u_0,\varepsilon,\delta). \end{aligned}$$

完全类似可证 $P_1=W_2(D,\varepsilon,\delta)$.

此外，若要求 $\det T_0=1$，则 T_0 为保面积的线性变换，因为 T_0^{-1} 把 (u,v) 上的正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 变为一平行四边形，其两边长分别为 β_1 与 β_2，且有一内角 θ，故必有 $\beta_1\beta_2\sin\theta=1$. 证毕.

引理 3.6 设 $G(u,v,\varepsilon,\delta)$ 为一 C^1 函数，且满足 $G(0,0,\varepsilon,\delta)=0$，则沿着(3.17)的轨线成立

(i) $\left(\int_{Q_0O}+\int_{OR_0}\right)G\mathrm{d}t = K(\varepsilon,\delta,p)=O(p)\in C^1$,

(ii) 设 $r_0=|\lambda_2(0,\delta)|/\lambda_1(0,\delta)$，则对任何 $0<k<\dfrac{r_0}{1+r_0}$ 有 $\int_{QR}G\mathrm{d}t = K(\varepsilon,\delta,p)+o(u_0^k)$.

(iii) 若 $G=O(uv)$，则 $\int_{QR}G\mathrm{d}t = o(u_0^k)$.

证明 由(3.17)知

$$\begin{aligned}\left(\int_{Q_0O}+\int_{OR_0}\right)G\mathrm{d}t &= \int_{Q_0O}\frac{G\mathrm{d}v}{\lambda_2 v(1+h_2)} + \int_{OR_0}\frac{G\mathrm{d}u}{\lambda_1 u(1+h_1)} \\ &= \int_{-p}^{0}\frac{G(0,v,\varepsilon,\delta)\mathrm{d}v}{\lambda_2 v} + \int_0^p\frac{G(u,0,\varepsilon,\delta)\mathrm{d}u}{\lambda_1 u},\end{aligned}$$

于是由 $G=O(|u, v|)$,即得结论(i).

设 $B'(b, -b)$为轨线$\widehat{QR}$与直线 $v=-u$ 的交点,将 G 写成

$$G(u, v, \varepsilon, \delta) = uG_1(u) + vG_2(u, v),\ G_i \in C^0,\ i = 1,2,$$

则

$$\left(\int_{B'R} - \int_{QR_0}\right) G\mathrm{d}t = \int_b^p \frac{uG_1 + vG_2}{\lambda_1 u(1+h_1)}\mathrm{d}u - \int_b^p \frac{uG_1(u)}{\lambda_1 u}\mathrm{d}u - \int_0^b \frac{G_1}{\lambda_1}\mathrm{d}u$$

$$= \int_b^p \frac{-G_1 h_1}{\lambda_1(1+h_1)}\mathrm{d}u + \int_b^p \frac{vG_2(u)}{\lambda_1 u(1+h_1)}\mathrm{d}u + O(b). \tag{3.25}$$

由(3.17)知

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{\lambda_2 v(1+h_2)}{\lambda_1 u(1+h_1)} = \frac{-rv}{u}(1+H(u, v, \varepsilon,\delta)), \tag{3.26}$$

其中 $r=\dfrac{|\lambda_2|}{\lambda_1}=r_0+O(\varepsilon)$(称为(3.17)在原点的双曲比),$H=O(u, v)\in C^{n-1}$,于是

$$\int_b^p \frac{vG_2}{\lambda_1 u(1+h_1)}\mathrm{d}u = \int_{-b}^{-D(u_0, \varepsilon, \delta)} \frac{G_2}{\lambda_2(1+h_2)}\mathrm{d}v = O(b)$$

(上式右端成立是因为 $D(u_0, \varepsilon, \delta)<b$). 同理,由于 $h_1=O(uv)$,可得

$$\int_b^p \frac{-G_1 h_1}{\lambda_1(1+h_1)}\mathrm{d}u = O(b),$$

于是由(3.25)知

$$\left(\int_{B'R} - \int_{QR_0}\right) G\mathrm{d}t = O(b), \tag{3.27}$$

同理可证

$$\left(\int_{QB'} - \int_{Q_0 O}\right) G\mathrm{d}t = O(b). \qquad (3.28)$$

由于 $k<\frac{r_0}{1+r_0}$，可取 $0<l<1$ 及 p 适当小，使当 $|u|\leqslant p$，$|v|\leqslant p$ 及 $|\varepsilon|$ 充分小时，有 $1+H\geqslant l$ 且 $\frac{rl}{1+rl}>k$. 易知方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{-rlv}{u}$$

过点 Q 的解与直线 $v=-u$ 交于点 $B_1(b_1, -b_1)$，其中

$$b_1 = p^{\frac{1}{1+rl}} u_0^{\frac{rl}{1+rl}} = o(u_0^k),$$

由比较定理知 $b\leqslant b_1$，于是由(3.27)与(3.28)及结论(i)即得结论(ii).

若 $G=O(uv)$，则由结论(i)的证明知，必有 $K=0$，于是由结论(ii)即得结论(iii). 证毕.

引理 3.7 设 $v=v(u, u_0, \varepsilon, \delta)$ 为(3.26)的解，且满足 $v(u_0, u_0, \varepsilon, \delta)=-p$，则

$$v = v(u, u_0, \varepsilon, \delta) = -pu_0^r u^{-r} \exp\left(-r\int_{u_0}^u \frac{H}{u}\mathrm{d}u\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial u_0}(u, u_0, \varepsilon, \delta) = -rpu_0^{r-1}u^{-r}[1+H(u_0, -p, \varepsilon, \delta)]$$

$$\cdot \exp\left(-r\int_{u_0}^u \frac{H+vH_v}{u}\mathrm{d}u\right).$$

证明 对(3.26)应用常数变易公式可得

$$v(u, u_0, \varepsilon, \delta) = -p\exp\left(-r\int_{u_0}^u \frac{1+H}{u}\mathrm{d}u\right)$$

$$= -pu_0^r u^{-r}\exp\left(-r\int_{u_0}^u \frac{H}{u}\mathrm{d}u\right),$$

即得第一式. 由(3.26)知$\frac{\partial v}{\partial u_0}$满足方程

$$\left(\frac{\partial v}{\partial u_0}\right)'_u = \frac{-r}{u}(1 + H + vH_v)\frac{\partial v}{\partial u_0},$$

又对等式 $v(u_0, u_0, \varepsilon, \delta) = -p$,关于 u_0 求导,并利用(3.26)式可知,$\frac{\partial v}{\partial u_0}$的初值为

$$\left(\frac{\partial v}{\partial u_0}\right)\bigg|_{u=u_0} = -\frac{\partial v}{\partial u}\bigg|_{u=u_0} = \frac{-rp}{u_0}(1 + H(u_0, -p, \varepsilon, \delta)),$$

于是可解得

$$\frac{\partial v}{\partial u_0} = \left(\frac{\partial v}{\partial u_0}\right)_{u=u_0}\exp\left(-r\int_{u_0}^{u}\frac{1 + H + vH_v}{u}\mathrm{d}u\right)$$

$$= -rpu_0^{r-1}u^{-r}[1 + H(u_0, -p, \varepsilon, \delta)]\exp\left(-r\int_{u_0}^{u}\frac{H + vH_v}{u}\mathrm{d}u\right),$$

即得第二式. 证毕.

引理 3.8 Dulac 映射 D 及其关于 u_0 的导数有下述形式:

$$D(u_0, \varepsilon, \delta) = p^{1-r}u_0^r(1 + \varphi_0(u_0, \varepsilon, \delta)),$$
$$\frac{\partial D}{\partial u_0}(u_0, \varepsilon, \delta) = rp^{1-r}u_0^{r-1}(1 + \varphi_1(u_0, \varepsilon, \delta)), \tag{3.29}$$

其中 $\varphi_i = o(u_0^k)$, $u_0\frac{\partial \varphi_0}{\partial u_0} = o(u_0^k)$, $0<k<\frac{r_0}{1+r_0}$.

证明 由 D 的定义知$D(u_0, \varepsilon, \delta) = -v(p, u_0, \varepsilon, \delta)$,于是由引理 3.7 知

$$D(u_0, \varepsilon, \delta) = p^{1-r}u_0^r\exp\left(-r\int_{u_0}^{p}\frac{H}{u}\mathrm{d}u\right),$$

$$\frac{\partial D}{\partial u_0} = rp^{1-r}u_0^{r-1}[1 + H(u_0, -p, \varepsilon, \delta)]$$

$$\cdot \exp\left(-r\int_{u_0}^{p}\frac{H+vH_v}{u}\mathrm{d}u\right).$$

由引理 3.6(iii)及其证明知对 $H\in C^1$,必有

$$\int_{u_0}^{p}\frac{H}{u}\mathrm{d}u=\int_{QR}\frac{H\mathrm{d}t}{\lambda_1(1+h_1)}=o(u_0^k),$$

$$\int_{u_0}^{p}\frac{H+vH_v}{u}\mathrm{d}u=o(u_0^k),$$

由此即知(3.29)成立,且 $\varphi_i=o(u_0^k)$, $i=0,1$. 另一方面,由(3.29)第一式得

$$\frac{\partial D}{\partial u_0}=rp^{1-r}u_0^{r-1}\left(1+\varphi_0+\frac{u_0}{r}\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_0}\right),$$

将上式与(3.29)第二式相比较,可得

$$u_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_0}=r(\varphi_1-\varphi_0)=o(u_0^k).$$

证毕.

引理 3.9 设 $G^*(u,v)=G_0+G(u,v)\in C^1$, $G(0,0)=0$,则

(i) $\displaystyle\int_{QR}G^*\mathrm{d}t=-\frac{G_0}{\lambda_1}\ln\frac{u_0}{p}+K(\varepsilon,\delta,p)+\varphi(u_0,\varepsilon,\delta)$,

(ii) $K=O(p)\in C^1$, $\varphi=o(u_0^k)$, $0<k<\dfrac{r_0}{1+r_0}$,且当 $\sigma_0=0$(即 $r_0=1$)时,存在常数 $N>0$,使

$$\left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_0}\right|\leqslant N[1+(p+|r-1|)\omega^*(u_0)],\ \omega^*=\omega\left(\frac{u_0}{p},r-1\right),$$

其中 ω 由(3.15)所定义.

证明 我们有

$$\int_{QR} G_0 \mathrm{d}t = G_0 \int_{u_0}^{p} \left[\frac{1}{\lambda_1 u} + \frac{-h_1}{\lambda_1 u(1+h_1)} \right] \mathrm{d}u$$

$$= -\frac{G_0}{\lambda_1} \ln \frac{u_0}{p} - G_0 \int_{QR} h_1 \mathrm{d}t,$$

由引理 3.6,

$$\int_{QR} G \mathrm{d}t = K(\varepsilon, \delta, p) + o(u_0^k), \int_{QR} h_1 \mathrm{d}t = o(u_0^k).$$

故结论(i)得证,且 $K = O(p) \in C^1$, $\varphi = o(u_0^k)$,以下设 $r_0 = 1$,且给出 $\left| \frac{\partial \varphi_0}{\partial u_0} \right|$ 的一个上界. 由上述讨论我们有

$$\int_{QR} G^* \mathrm{d}t = -\frac{G_0}{\lambda_1} \ln \frac{u_0}{p} + \int_{u_0}^{p} \frac{G - G_0 h_1 \mathrm{d}u}{\lambda_1 u(1+h_1)}.$$

设

$$\frac{G - G_0 h_1}{1 + h_1} = uG_1(u, v) + vG_2(v),$$

则

$$\int_{QR} G^* \mathrm{d}t = -\frac{G_0}{\lambda_1} \ln \frac{u_0}{p} + I_1(u_0) + I_2(u_0), \qquad (3.30)$$

其中

$$I_1(u_0) = \int_{u_0}^{p} \frac{G_1}{\lambda_1} \mathrm{d}u, \quad I_2(u_0) = \int_{u_0}^{p} \frac{vG_2}{\lambda_1 u} \mathrm{d}u,$$

易见

$$I'_1(u_0) = -\frac{1}{\lambda_1} G_1(u_0, p) + \int_{u_0}^{p} \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial G_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u_0} \mathrm{d}u,$$

由引理 3.7 知

$$\frac{\partial v}{\partial u_0} = - rpu_0^{r-1} u^{-r}(1 + O(p)),$$

于是存在常数 $N_1 > 0$,使对 $0 < u_0 \leqslant r$ 有

$$|I'_1(u_0)| \leqslant N_1\left[1 + p\int_{u_0}^{p} u_0^{r-1} u^{-r} \mathrm{d}u\right]$$

$$= N_1[1 + p\omega^*(u_0)]. \qquad (3.31)$$

设 $u = u(v, u_0)$为 $v = v(u, u_0, \varepsilon, \delta)$关于 u 的反函数,且 $u(-p, u_0) = u_0$,则由(3.26)有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = -\frac{u}{rv}(1 + \widetilde{H}),\ \widetilde{H} = O(uv) \in C^{n-1},$$

因此,$\dfrac{\partial u}{\partial u_0}$满足微分方程

$$\left(\frac{\partial u}{\partial u_0}\right)'_v = -\frac{1 + \widetilde{H} + u\widetilde{H}_u}{rv}\frac{\partial u}{\partial u_0},$$

且有初值,$\left.\dfrac{\partial u}{\partial u_0}\right|_{v=-p} = 1$,于是可解得

$$\frac{\partial u}{\partial u_0} = \exp\left(\int_{-p}^{-v}\frac{1 + \widetilde{H} + u\widetilde{H}_u}{rv}\mathrm{d}v\right) = \left(\frac{-v}{p}\right)^{-\frac{1}{r}}(1 + O(p)).$$

注意到

$$I_2(u_0) = \int_{-p}^{-D}\frac{G_2(v)}{-\lambda_1 r(1 + H)}\mathrm{d}v,$$

于是

$$I'_2(u_0) = \frac{-G_2(-D)}{\lambda_1 r(1 + H(p, -D, \varepsilon, \delta))}\frac{\partial D}{\partial u_0}$$

$$- \int_{-p}^{-D}\frac{G_2}{\lambda_1 r}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{1 + H}\right)\frac{\partial u}{\partial u_0}\mathrm{d}v.$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{1+H}\right)\frac{\partial u}{\partial u_0}=O\left(v\left(\frac{-v}{p}\right)^{-\frac{1}{r}}\right),$$

$$\left|\int_{-p}^{-D}v\left(\frac{-v}{p}\right)^{-\frac{1}{r}}\mathrm{d}v\right|=\frac{rp^2}{2r-1}\left|\left(\frac{D}{p}\right)^{\frac{2r-1}{r}}-1\right|<\frac{rp^2}{2r-1},$$

且由引理3.8,

$$\left|\frac{\partial D}{\partial u_0}\right|\leqslant 2rp^{1-r}u_0^{r-1}=2r(1+(1-r)\omega^*(u_0)),$$

于是存在常数 $N_2>0$,使当 $0<u_0\leqslant p$ 时

$$|I'_2(u_0)|\leqslant N_2[1+|r-1|\omega^*(u_0)].$$

令 $N=N_1+N_2$,则由上式及(3.31)知

$$|I'_1(u_0)+I'_2(u_0)|\leqslant N[1+(p+|r-1|)\omega^*(u_0)].$$

因此由(3.30)即知结论(ii)成立. 证毕.

引理 3.10 设 $G(x,y,\varepsilon,\delta)$为 C^1 函数,且 $G(0,0,\varepsilon,\delta)=0$,则当$(a,\varepsilon)\to(0,0)$时

$$\int_{AB}G\mathrm{d}t\to\oint_L G(x,y,0,\delta)\mathrm{d}t\in R,$$

其中点 B 为(3.1)过 A 的正半轨与 l_1 的首次交点.

证明 设 $A^*=(T_\varepsilon^*)^{-1}(Q)$, $C^*=(T_\varepsilon^*)^{-1}(R)$,则

$$\int_{AB}G\mathrm{d}t=\left(\int_{AA^*}+\int_{A^*C^*}+\int_{C^*B}\right)G\mathrm{d}t. \tag{3.32}$$

由解对初值的连续性知,对固定的 $p>0$,当$(a,\varepsilon)\to(0,0)$时

$$\int_{AA^*}G\mathrm{d}t\to 0,\ \int_{C^*B}G\mathrm{d}t\to\int_{A_2A_1}G(x,y,0,\delta)\mathrm{d}t\in R, \tag{3.33}$$

如图 3.4 所示.

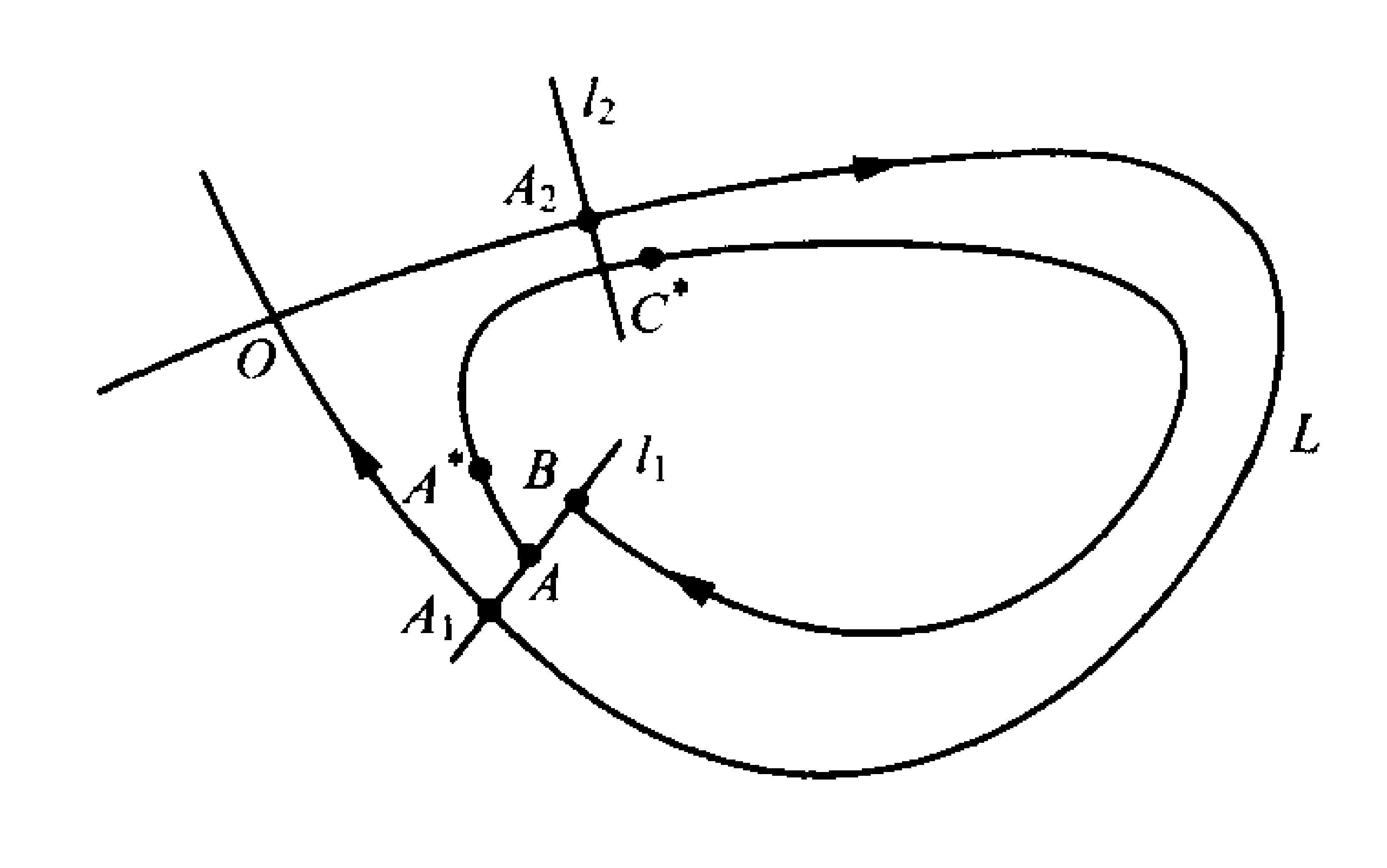


图 3.4

由变换(3.16)及引理 3.6,并注意到(3.18),可知存在 $K(\varepsilon, \delta, p)\in C^1$ 使

$$\left(\int_{A_1O}+\int_{OA_2}\right)G(x, y, 0, \delta)\mathrm{d}t$$

$$=\left(\int_{Q_0O}+\int_{OR_0}\right)G((T_0^*)^{-1}(u, v), 0, \delta)\mathrm{d}t = K(0, \delta, p),$$

$$\int_{A^*C^*}G\mathrm{d}t=\int_{QR}G((T_\varepsilon^*)^{-1}(u, v), \varepsilon, \delta)\mathrm{d}t$$

$$= K(\varepsilon, \delta, p)+o(u_0^k),$$

于是当$(a, \varepsilon)\to(0,0)$时

$$\int_{A^*C^*}G\mathrm{d}t \to \left(\int_{A_1O}+\int_{OA_2}\right)G(x, y, 0, \delta)\mathrm{d}t. \quad (3.34)$$

最后注意到 $L=\widehat{A_1O}+\widehat{OA_2}+\widehat{A_2A_1}$,由(3.32)～(3.34)即得结论. 证毕.

由引理 3.10 知,如果 $\sigma_0=(f_x+g_y)(S_0)=0$,则

$$\sigma_1=\oint_L(f_x+g_y)\mathrm{d}t\in R.$$

关于 L 的稳定性及其产生极限环的惟二性有下述定理.

定理 3.4 考虑 C^n 系统(3.1),其中 $n\geqslant 2$. 设 $\sigma_0=0$, $\sigma_1\neq 0$,则

(i) 若 $\sigma_1<0(>0)$,则 L 为稳定(不稳定)的;

(ii) 存在 $\varepsilon_0>0$ 及 L 的邻域 U,使对一切 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$, $\delta\in D$,方程(3.1)在 U 中至多有两个极限环.

证明 不妨设鞍点 S 恒在原点,又为确定计,设 $\sigma_1<0$,则由引理 3.4 及引理 3.10,当 $a\to 0$ 时

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,0,\delta)\to e^{\sigma_1}-1<0,$$

由此知 L 为稳定的,即得结论(i). 为证结论(ii),令

$$\Delta(\varepsilon,\delta)=(f_x+g_y+\varepsilon(f_{0x}+g_{0y}))_{x=y=0},$$

$$G(x,y,\varepsilon,\delta)=f_x+g_y+\varepsilon(f_{0x}+g_{0y})-\Delta,$$

$$\tau(a,\varepsilon,\delta)=\int_{AB}\mathrm{d}t,$$

则由引理 3.4 知

$$\frac{\partial F}{\partial a}=-1+\frac{1}{1+O(F)}\exp\left(\Delta\tau+\int_{AB}G\mathrm{d}t\right)=-1+\exp(\tau F_1),$$

其中

$$F_1=F_1(a,\varepsilon,\delta)=\Delta+\frac{1}{\tau}\left[\int_{AB}G\mathrm{d}t+O(F)\right].$$

欲证当 $|\varepsilon|+|a|$ 小时,F 关于 a 至多有两个根,只需证 F_1 关于 a 至多有一个根. 注意到

$$F_1=0\Leftrightarrow\frac{\partial F}{\partial a}=0,$$

我们有

$$\left.\frac{\partial F_1}{\partial a}\right|_{F_1=0} = -\frac{1}{\tau^2}\frac{\partial \tau}{\partial a}\left[F_2 + \int_{AB} G\mathrm{d}t + O(F)\right].$$

其中

$$F_2 = -\tau\left(\frac{\partial \tau}{\partial a}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial a}\int_{AB} G\mathrm{d}t. \tag{3.35}$$

由引理 3.10 知当$(a,\varepsilon)\to(0,0)$时

$$\int_{AB} G\mathrm{d}t \to \sigma_1 \neq 0,$$

故只需证当$(a,\varepsilon)\to(0,0)$时

$$\frac{\partial \tau}{\partial a}\to +\infty,\ F_2 \to 0 \tag{3.36}$$

$\Big($因为若(3.36)成立,则当$|\varepsilon|+|a|$小时,$\left.\frac{\partial F_1}{\partial a}\right|_{F_1=0}$定号,从而$F_1$关于$a$至多有一个根$\Big)$. 对固定的$p>0$,易见

$$\left(\int_{AA^*} G\mathrm{d}t\right)_a' = O(1),\ \left(\int_{C^*B} G\mathrm{d}t\right)_a' = O(1),$$

$$\left(\int_{AA^*} \mathrm{d}t\right)_a' = O(1),\ \left(\int_{C^*B} \mathrm{d}t\right)_a' = O(1).$$

而由引理 3.9 知

$$\left(\int_{A^*C^*} G\mathrm{d}t\right)_{u_0}'$$

$$= \left(\int_{QR} G((T_\varepsilon^*)^{-1}(u,v),\varepsilon,\delta)\mathrm{d}t\right)_{u_0}' = O(\omega^*(u_0)),$$

$$\left(\int_{A^*C^*} \mathrm{d}t\right)_{u_0}' = \left(\int_{QR} \mathrm{d}t\right)_{u_0}' = \frac{-1}{\lambda_1 u_0} + O(\omega^*(u_0)),$$

从而由引理 3.5,(3.32)及以上诸式知

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_{AB} G\mathrm{d}t = O(\omega^*(u_0)),$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial a} = \left[\frac{-1}{\lambda_1 u_0} + O(\omega^*(u_0))\right]\left(\frac{-1}{M_1} + o(1)\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 M_1 u_0}(1 + o(1)),$$

$$\tau = \frac{-1}{\lambda_1}\ln\frac{u_0}{p} + O(1).$$

注意到当$(a, \varepsilon)\to(0, 0)$时,$\sqrt{u_0}\ln u_0\to 0$, $\sqrt{u_0}\,\omega^*(u_0)\to 0$,故由(3.35)及以上诸式可得

$$当(a, \varepsilon)\to(0,0)时, F_2 = O(u_0|\ln u_0|\omega^*(u_0))\to 0,$$

即得(3.36),于是结论(ii)得证. 证毕.

我们指出,若 $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 \neq 0$,我们可进一步给出(3.1)在 L 的邻域 U 中存在两个环的条件. 为此,设 $\delta\in D\subset R$,鞍点 S 在原点,又设存在 $\delta_0\in D$ 使

$$M(\delta_0) = 0, M'(\delta_0)\neq 0, \sigma_0^* = (f_{0x} + g_{0y})(0, 0, \delta_0)\neq 0,$$

则由(3.5)及引理 3.3 知存在函数 $\delta^*(\varepsilon) = \delta_0 + O(\varepsilon)$使

$$F(a^s, \varepsilon, \delta)|_{\delta=\delta^*} = 0,$$

这表示当 $\delta = \delta^*(\varepsilon)$时,(3.1)有同宿轨 L_ε. 又由结论(i)的证明知,若设 $\sigma_1 < 0$,则存在 $a_0 < 0$,使当$|\varepsilon|$充分小时,$F(a_0, \varepsilon, \delta^*) > 0$. 由于 $\sigma_0 = 0$, $\sigma_0^* \neq 0$,可知 $\Delta(\varepsilon, \delta^*) = \varepsilon(\sigma_0^* + O(\varepsilon))\neq 0$,为确定计,设 $\Delta(\varepsilon, \delta^*) > 0$,则由引理 3.4 知

$$当 a\to a^s(\varepsilon,\delta^*)时, \frac{\partial F}{\partial a}(a^s, \varepsilon, \delta^*)\to +\infty,$$

从而必存在 $a_1(\varepsilon)\in(a_0, a^s(\varepsilon, \delta^*))$及 $a_2(\varepsilon)\in(a_1, a^s(\varepsilon, \delta^*))$,使

$$F(a_1(\varepsilon),\ \varepsilon,\ \delta^*)=0,\ \frac{\partial F}{\partial a}(a_2(\varepsilon),\ \varepsilon,\ \delta^*)=0,$$

由于已证$\frac{\partial F}{\partial a}$关于$a$至多有一个根,故有

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a_1(\varepsilon),\ \varepsilon,\ \delta^*)<0,\ F(a_2(\varepsilon),\ \varepsilon,\ \delta^*)<0,$$

于是当$\delta=\delta^*(\varepsilon)$时,除了$L_\varepsilon$以外,(3.1)还有一稳定极限环,且该环是双曲的,现固定ε,变动δ且使其满足$0<|\delta-\delta^*|\ll|\varepsilon|$, $F(a^s,\varepsilon,\delta)>0$,则$F(a,\varepsilon,\delta)$关于$a$必有两个根,分别位于区间$(a_0,\ a_2)$与$(a_2,\ a^s(\varepsilon,\ \delta^*))$上. 于是我们证明了下述结论:若$\sigma_1<0$则当$0<\varepsilon M'(\delta_0)(\delta-\delta^*(\varepsilon))\ll\varepsilon\sigma_0^*\ll1$时,(3.1)在$L$附近恰有两个极限环.

例 3.1 由上述讨论易知多项式系统

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=x-x^2-y\left[\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right]-\varepsilon y(\delta+x^2)$$

当$0<-(\delta-\delta^*(\varepsilon))\ll\varepsilon\ll1$时在闭曲线$L:\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3=0,x\geqslant0$附近有两个极限环,其中$\delta^*(\varepsilon)=\delta_0+O(\varepsilon)$, $\delta_0=-K_1/K_2$,而

$$K_1=\oint_L x^2y^2e^{\int_0^t y^2\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t,K_2=\oint_L y^2e^{\int_0^t y^2\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t,$$

$$(x(0),\ y(0))=\left(\frac{3}{2},\ 0\right).$$

现设(3.12)成立,此时由引理 3.4 知

$$\frac{\partial F}{\partial a}=-1+\exp(\varepsilon\tau F_1^*),\tag{3.37}$$

其中

$$F_1^*=\Delta^*+\frac{1}{\tau}\left[\int_{AB}G^*\mathrm{d}t+O(F^*)\right],$$

$$\Delta^* = (f_{0x} + g_{0y})(S, \varepsilon, \delta), \quad G^* = f_{0x} + g_{0y} - \Delta^*,$$

而 F^* 满足(3.13).利用(3.13)、(3.14)和(3.37),与定理 3.4 完全类似可证(请读者自行给出)

定理 3.5 设 C^n $(n \geqslant 2)$系统(3.1)满足(3.12),又设存在 $\delta_0 \in 0$,使

$$M(\delta_0) = 0, \quad \sigma(\delta_0) \equiv (f_{0x} + g_{0y})(S_0, \varepsilon, \delta_0) = 0,$$

$$\sigma_1(\delta_0) \equiv \oint_L (f_{0x} + g_{0y})(x, y, 0, \delta_0) \mathrm{d}t \neq 0,$$

则存在 $\varepsilon_0 > 0$, L 的邻域 U 使

(i) 对一切 $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$, $|\delta - \delta_0| < \varepsilon_0$,(3.1)在 U 中至多有两个极限环;

(ii) 若 $\delta \in R^2$ 且对 $\sigma(\delta) = (f_{0x} + g_{0y})(S_0, 0, \delta)$有

$$\det \frac{\partial(M, \sigma)}{\partial(\delta_1, \delta_2)}(\delta_0) \neq 0, \ \delta = (\delta_1, \delta_2),$$

则在$(0, \delta_0)$附近有点(ε, δ)使(3.1)在 U 中有两个极限环.

在定理 3.5 的条件下,可进一步给出(3.1)在 δ 所在平面的分支图.为此,不妨设

$$\frac{\partial M}{\partial \delta_1}(\delta_0) \neq 0, \quad \delta_0 = (\delta_{20}, \delta_{20}),$$

则由引理 3.3 及(3.5)易知存在同宿分支曲线

$$L^{Hom}: \delta_1 = \delta_1^*(\varepsilon, \delta_2) = \delta_{10}^*(\delta_2) + O(\varepsilon),$$

其中 $M(\delta_{10}^*, \delta_2) = 0$.令

$$\sigma^* = \Delta^* |_{\delta_1 = \delta_1^*} = \sigma(\delta_{10}^*, \delta_2^*) + O(\varepsilon).$$

由 $\det \dfrac{\partial(M, \sigma)}{\partial(\delta_1, \delta_2)}(\delta_0) \neq 0$,知$\dfrac{\partial \sigma^*}{\partial \delta_2} |_{\delta_2 = \delta_{20}} \neq 0$,从而存在函数 $\delta_2^*(\varepsilon) = \delta_{20} + O(\varepsilon)$,使当且仅当 $\delta_2 = \delta_2^*(\varepsilon)$时 $\sigma^* = 0$,于是我们得到

“二重同宿分支点”$\delta^* = (\delta_1^*(\varepsilon,\delta_2^*),\delta_2^*)$，此时的同宿轨 L_ε 的稳定性由 $\varepsilon\sigma_1(\delta_0)$ 的符号决定. 例如设 $\varepsilon\sigma_1(\delta_0)>0$，则 L_ε 为不稳定的. 现变动 δ 使成立

$$\delta_1 = \delta_1^*(\varepsilon,\delta_2), \quad 0 < |\delta_2 - \delta_2^*| \ll 1, \quad \varepsilon\sigma^* < 0,$$

则 L_ε 成为 L_{ε,δ_2}，且已改变稳定性，通过分析后继函数的性质可知 (3.1)有一个不稳定极限环(它是由 L_ε 改变稳定性而得到的). 进一步由定理 3.1 知适当变动 δ_1 可使 L_{ε,δ_2} 破裂而产生另一个(稳定的)极限环. 进一步可证存在以点 δ^* 为端点的“二重环”分支曲线. 事实上，由(3.13)与(3.37)知该曲线由下列联立方程组决定：

$$F^*(a,\varepsilon,\delta) = 0, \ F_1^*(a,\varepsilon,\delta) = 0.$$

将 $a = W_1(u_0,\varepsilon,\delta)$ 代入上式，并注意到 $\dfrac{\partial M}{\partial \delta_1}(\delta_0) \neq 0$，由第一式可解得 $\delta_1 = \bar{\delta}_1(u_0,\varepsilon,\delta_2)$，由引理 3.5 及(3.14)知成立

$$\delta_1^*(\varepsilon,\delta_2) \equiv \bar{\delta}_1(0,\varepsilon,\delta_2),$$

于是 $F_1^* = 0$ 等价于

$$\tau\Delta^* + \int_{AB} G^* \mathrm{d}t = 0, \quad \tau = \frac{-1}{\lambda_1}\ln u_0 + O(1),$$

将 $\delta_1 = \bar{\delta}_1(u_0,\varepsilon,\delta_2)$ 代入上式又可解出

$$u_0 = \exp\left[\frac{\lambda_1\sigma_1(\delta_0)}{\sigma^*}(1 + o(1))\right] \equiv u_0^*(\varepsilon,\delta_2), \ \sigma^*\sigma_1(\delta_0) < 0,$$

于是“二重环”分支曲线的方程为

$$L^{2M}: \delta_1 = \bar{\delta}_1(u_0^*(\varepsilon,\delta_2),\varepsilon,\delta_2), \quad \sigma^*\sigma_1(\delta_0) < 0,$$

令 $\sigma^* \to 0$(且 $\sigma^*\sigma_1(\delta_0) < 0$)，则 $u_0^* \to 0$，从而上述曲线的端点满足 $\delta_1 = \bar{\delta}_1(0,\varepsilon,\delta_2)$，$\sigma^* = 0$，即 $\delta = \delta^*(\varepsilon)$.

这样，在定理 3.5 的条件下，我们获得两条分支曲线(即同宿

分支与二重环分支曲线)，在参数平面上它们的相对位置可通过分析(3.1)的存在两个环的区域来确定，如图 3.5 所示.

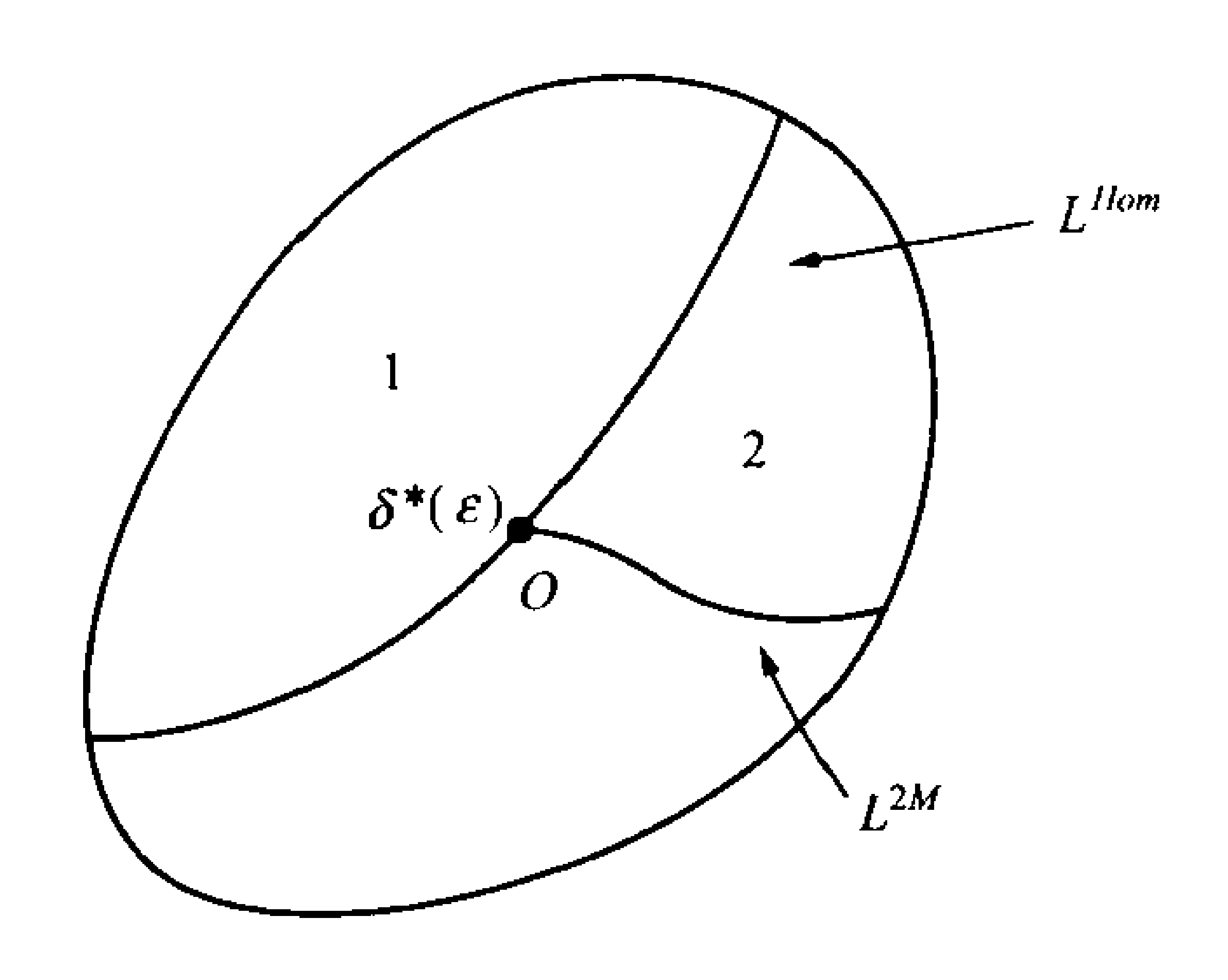


图 3.5　二重同宿分支图

仍设(3.12)成立，则 $H(x,y)$ 为(3.1)($\varepsilon=0$)的 Hamilton 函数，且(3.1)($\varepsilon=0$)在 L 附近有闭轨族 L_h，可设沿 L_h 有 $H(x,y)=h, 0<-h\ll 1$，且当 $h\to 0$ 时，L_h 的极限为同宿轨 L. 引入一阶 Melnikov 函数如下

$$M_1(h,\delta)=\oint_{L_h}(fg_0-gf_0)_{\varepsilon=0}\mathrm{d}t.$$

定理 3.6　设(3.1)为 C^2 系统且满足(3.12)，则函数 M_1 关于 $0<-h\ll 1$ 为二次连续可微的，且成立

$$M_1(h,\delta)=M(\delta)+c_1(\delta)h\ln|h|+c_2(\delta)h+o(h),$$

其中 $M(\delta)$ 由(3.11)给出，且

$$c_1(\delta)=\frac{-1}{\lambda_1(0,\delta)}(f_{0x}+g_{0y})(S_0,0,\delta)=\frac{-1}{\lambda_1(0,\delta)}\sigma(\delta),$$

$$c_2(\delta)=\oint_L[(f_{0x}+g_{0y})(x,y,0,\delta)-\sigma(\delta)]\mathrm{d}t+O(c_1).$$

证明　仍设鞍点在原点，设 L_h 与截线 l 的交点为 $A=A_1+$

an_0，则

$$h = H(A), \quad \left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}a}\right|_{a=0} = DH(A_1)n_0 = |DH(A_1)| > 0,$$

由(3.13)的推导知

$$M_1(h,\delta) = F^*(a,0,\delta)DH(A)n_0,$$

由于 $F^* \in C^2$(对 $a < a^s$)，故知 M_1 关于 $0 < -h \ll 1$ 为 C^2 的. 由引理 3.10 又知

$$\lim_{h\to 0} M_1(h,\delta) = M(\delta),$$

因此可补充定义 $M_1(0,\delta) = M(\delta)$，使 M_1 在 $0 \leqslant -h \ll 1$ 上连续. 又由引理 3.10 及第二章定理 5.7 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}h} &= \oint_{L_h}(f_{0x} + g_{0y})_{\varepsilon=0}\mathrm{d}t = T(h)\sigma(\delta) \\ &\quad + \oint_{L_h}[f_{0x} + g_{0y} - \sigma(\delta)]_{\varepsilon=0}\mathrm{d}t, \\ &= T(h)\sigma(\delta) + \oint_{L}[f_{0x} + g_{0y} - \sigma(\delta)]_{\varepsilon=0}\mathrm{d}t + o(1),\end{aligned} \tag{3.38}$$

其中 $T(h)$表示 L_h 的周期. 又利用引理 3.9 与引理 3.5 可得

$$\begin{aligned}T(h) &= \oint_{L_h}\mathrm{d}t = -\frac{1}{\lambda_1(0,\delta)}\ln\frac{u_0}{p} + O(1) \\ &= \frac{-1}{\lambda_1(0,\delta)}\ln|a| + O(1) = \frac{-1}{\lambda_1(0,\delta)}\ln|h| + O(1),\end{aligned}$$

将上式代入(3.38)可得

$$\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}h} = \frac{-\sigma(\delta)}{\lambda_1(0,\delta)}\ln|h| + \oint_L[f_{0x} + g_{0y} - \sigma]_{\varepsilon=0}\mathrm{d}t + O(\sigma) + o(1),$$

对上式两边从 0 到 h 积分即得 M_1 的展式. 证毕.

引理 3.5 首次在文献[35]中出现,这里作了一些改述. 引理 3.6~3.10 取自文献[52],且定理 3.4 与 3.5 的证明思路均类似于[52]中的讨论双同宿环分支时所用的方法. 此外我们看到此两定理对 C^2 系统(3.1)均成立. 定理 3.6 是由 Han 与 Ye([62])获得的.

3.3 同宿环的稳定性与多个极限环的分支

现设(3.1)为 C^∞ 系统,又设

$$F(a,0,\delta) = c_{2n-1}a^n\ln|a| + c_{2n}a^n + \cdots,\quad n \geqslant 1, \tag{3.39}$$

用变换理论与无穷小分析方法,Roussarie([122])证明了下述定理.

定理 3.7 设 $c_{2n-1}\neq 0$(或 $c_{2n-1}=0, c_{2n}\neq 0$),则存在 $\varepsilon_0>0$ 及 L 的邻域 U,使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0, \delta\in D$ 时,(3.1)在 U 中至多有 $2n-1$(或 $2n$)个极限环,且存在系统(3.1)使这个最大数目可以达到. 若(3.1)为解析系统,且 $F(a,0,\delta)\neq 0$,则必存在 $n\geqslant 1$ 使(3.39)成立,且 $c_{2n-1}\neq 0$ 或 $c_{2n}\neq 0$,从而解析系统的孤立同宿轨在扰动下至多产生有限多个极限环.

在定理 3.7 的条件下我们称同宿轨 L 为 $2n-1$(或 $2n$) 重的,定理中所述的分支现象称为 $2n-1$ 阶(或 $2n$ 阶)同宿分支. 需要说明的是定理 3.7 最初是由 Leontovich([83])获得的而且不要求(3.1)为 C^∞ 系统(这一点在[13]中也曾提到),但该文未有详细的证明. Joyal([78])给出定理 3.7 的另一证明,同时指出 Roussarie 的证明存在一个问题,并且还减弱了 Leontovich 的光滑性条件. 详之,讨论 k 阶同宿分支只需假设(3.1)为 C^{2k+1} 光滑就足够了. 这一结论看来是应该成立的,但韩茂安([35])发现 Roussarie 与 Joyal 的证明各有一个问题需要认真论证,并结合两人的方法在(3.1)为 C^∞ 的条件下完成了这一论证. 应用 Ilyashenko 与 Yakovenko([75])的有限光滑标准型定理及 Roussarie 的方法也可完成这一论证.

从[78]易知,当且仅当 $c_{2j-1}=0, j=1,\cdots,n-1, c_{2n-1}\neq 0$ 时

鞍点 S_0 为(3.1)($\varepsilon=0$)的 $n-1$ 阶鞍点.当$(f(x,y),g(x,y))=(\lambda x,-\lambda y)+O(|x,y|^2)$时第一章第六节给出了一阶鞍点量的计算公式.若

$$(f(x,y),g(x,y)) = (\lambda y,\lambda x) + O(|x,y|^2),$$

则(3.1)($\varepsilon=0$)在原点的一阶鞍点量公式如下

$$R_1 = \frac{1}{2\lambda}\Big[f_{xxx} - f_{xyy} + g_{xxy} - g_{yyy} + \frac{1}{\lambda}(f_{xy}(f_{yy} - f_{xx}) + g_{xy}(g_{yy} - g_{xx}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy})\Big],$$

其中偏导数在原点取值.

若设(3.12)成立,可证函数 M_1 有下列形式的展式

$$M_1(h,\delta) = c_0(\delta) + c_1(\delta)h\ln|h| + c_2(\delta)h + c_3(\delta)h^2\ln|h| + c_4(\delta)h^2 + \cdots, \tag{3.40}$$

Roussarie([122])给出了下述定理(此处证略).

定理 3.8 设(3.12)成立,又设存在 $\delta_0\in R^m$,$k\geqslant1$ 使

$$c_j(\delta_0) = 0,\ j = 0,\cdots,k-1,\ c_k(\delta_0)\neq 0, \tag{3.41}$$

则存在 $\varepsilon_0>0$,L 的邻域 U,使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$,$|\delta-\delta_0|<\varepsilon_0$ 时,(3.1)在 U 中至多有 k 个极限环.

与 Hopf 分支和 Poincaré 分支类似,我们可以定义系统(3.1)在 L 的环性数,于是定理 3.8 是说在条件(3.41)下当$|\varepsilon|+|\delta-\delta_0|$充分小时(3.1)在 L 的环性数至多是 k.作者([40])在条件(3.41)不成立的情况下讨论了 L 具有环性数为 2 的条件及产生 3 个极限环的条件,沿用该文的方法及定理 1.5 的证明,一般地可证下列定理成立.

定理 3.9 设 C^∞ 系统(3.1)满足(3.12),又设存在 $\delta_0\in R^m$,$k\geqslant1$,使(3.40)中的系数满足 $c_j(\delta_0)=0$,$j=0,\cdots,k$,且

(i) rank $\dfrac{\partial(c_0, c_1, \cdots, c_k)}{\partial(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m)}(\delta_0) = k+1, \quad m \geqslant k+1$;

(ii) 当 $c_j(\delta)=0, j=0,\cdots,k$ 时,(3.1)在 L 附近存在一个同宿轨及充满其内侧邻域的闭轨族,则存在 $\varepsilon_0>0$,及 L 的邻域 U,使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0, |\delta-\delta_0|<\varepsilon_0$ 时,(3.1)在 U 内至多有 k 个极限环且可以有 k 个极限环.换句话说,当 $|\varepsilon|+|\delta-\delta_0|$ 充分小时,(3.1)在 L 的环性数是 k.若(3.1)的右端关于 δ 为线性的,且(i)与(ii)成立,则存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(D)>0$,使对一切 $|\varepsilon_0|<\varepsilon_0, \delta\in D$,(3.1)在 L 的环性数是 k.

在给出一个全局分支定理之前,先给出下列定义.

定义 3.1 如果展式(3.40)中的系数满足(3.41),则称 $h=0$ 为函数 $M_1(h,\delta)$的 k 重根.

由定理 3.8 易知,若 $h=0$ 为 $M_1(h,\delta_0)$的 k 重根,则对充分小的 $|\delta-\delta_0|$, $M_1(h,\delta_0)$在 $h=0$ 左侧至多有 k 个根,且可以适当选取扰动函数 f_0 与 g_0,使对在 δ_0 附近的某些 δ, $M_1(h,\delta)$可以有 k 个负根.

现设存在 $h_0<0$ 使当 $h\to h_0$ 时 L_h 趋于(3.1)($\varepsilon=0$)的中心奇点,又设函数 M_1 具有下述形式

$$M_1(h,\delta) = \sum_{i=1}^{n} b_i(\delta) I_i(h) = I_1(h) N(h,b),$$

其中 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, $N(h,b)=\sum\limits_{i=1}^{n} b_i J_i(h)$, $J_i(h)=I_i(h)/I_1(h)$.利用定理 1.3、定理 2.1 与定理 3.8,完全类似于定理 2.2 可以证明下述定理.

定理 3.10 设(3.12)成立,且(3.1)的右端函数关于 δ 为线性的.如果 $I_1'(h_0)\neq 0, I_1(h)\neq 0 (h_0<h\leqslant 0)$,且

(i) rank $\dfrac{\partial(b_1,\cdots,b_n)}{\partial(\delta_1,\cdots,\delta_m)} = n, \quad n\leqslant m$;

(ii) 存在向量函数 $b^*(\varepsilon)=O(\varepsilon)$,使对开集 $S=\bigcup\limits_{h_0\leqslant h<0} L_h$ 的

任何紧集 V,都有 $\varepsilon_1=\varepsilon_1(V)>0$,使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_1$ 且 $b=b^*(\varepsilon)$ 时,(3.1)在 V 中的所有非平凡轨道都是周期的;

(iii) 对每个固定的 $b\neq 0$,函数 $N(h,b)$ 关于 h 在 $[h_0,0]$ 上至多有 k 个根(重数计算在内),且存在 $b\neq 0$ 使 N 在 $(h_0,0)$ 内有 k 个根,则存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(D)>0$,及包含 $S\cup L$ 的开集 U,使对一切 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0,\delta\in D$,(3.1)在开集 U 中至多有 k 个环且可以有 k 个环,即(3.1)在 U 中的环性数是 k.

注 3.1 由注 2.2 与上述定理类似可证,若定理 3.10 中的条件 $I'_1(h_0)\neq 0$ 换为 $I'_1(h_0)=0,I''_1(h_0)\neq 0$,且对任意 δ,(3.1)在区域 S 中的指标 +1 奇点恒为细焦点,而其他条件不变,则其结论仍成立.

由后继函数的定义知(3.39)中第一个不为零的系数 c_k(的符号)决定了同宿轨 L 的稳定性.例如,若 $\sigma_0=\sigma_1=0$,而第一阶鞍点量 $R_1\neq 0$,则其符号决定了 L 的稳定性.下面我们对 C^3 系统来证明这一结论(且不利用(3.39)式).

定理 3.11 设(3.1)为 C^3 系统,L 为顺时针定向的,又设 $\sigma_0=\sigma_1=0,R_1\equiv(h_1-h_2)_{uv}(0,0,0,\delta)\neq 0$,其中 h_1,h_2 为(3.17)中的函数,则当 $R_1>0(<0)$ 时,L 为内稳定(不稳定)的.

证明 首先证明,若(3.18)成立,则当 $p>0$ 充分小时有

$$|f(A_1),g(A_1)|=\beta_2|\lambda_{20}|p+O(p^2),$$
$$|f(A_2),g(A_2)|=\beta_1\lambda_{10}p+O(p^2),\qquad(3.42)$$

其中 $\lambda_{i0}=\lambda_i(0,\delta),i=1,2$.事实上,由(3.1)、(3.16)与(3.18)知

$$(f(A_1),g(A_1))^T=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(0)A_1+O(|A_1|^2)$$
$$=T_0^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_{10} & 0\\ 0 & \lambda_{20}\end{pmatrix}Q_0+O(|Q_0|^2)$$

$$= -p\lambda_{20}T_0^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+O(p^2),$$

由此即得(3.42)的第一式.第二式完全类似可证.

如前,设 L 的参数方程为 $z=z(t), t\in R$,则存在 $t_2<t_1$ 使 $A_i=z(t_i), i=1,2$,令 $Z(\theta)=(-v_2(\theta),v_1(\theta)),(v_1,v_2)=z(\theta)/|z(\theta)|$,由第二章引理 2.1 知,对(3.1)($\varepsilon=0$)引入曲线坐标变换

$$(x,y)=z(\theta)+Z(\theta)r,\quad t_2\leqslant\theta\leqslant t_1,$$

可得方程

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=A(\theta)r+O(r^2), \tag{3.43}$$

其中

$$A(\theta)=(f_x+g_y)(z(\theta))-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln|f(z(\theta)),g(z(\theta))|.$$

设 $r(\theta)$为(3.43)满足 $r(t_2)=a_1$ 的解,则有

$$r(t_1)=\frac{|f(A_2),g(A_2)|}{|f(A_1),g(A_1)|}\exp\int_{t_2}^{t_1}(f_x+g_y)\mathrm{d}t a_1+O(a_1^2). \tag{3.44}$$

若用 P_2 表示从 l_2 到 l_1 的 Poincaré 映射,则注意到 $Z(t_1)=n_0$, $Z(t_2)=n_0'$,可知 $P_2(a_1,0,\delta)=r(t_1)$,从而由(3.42)与(3.44)及 $\sigma_0=\sigma_1=0$,可知

$$\begin{aligned}P_2(a_1,0,\delta)&=\frac{\beta_1\lambda_{10}}{\beta_2|\lambda_{20}|}e^{\sigma_1}(1+o_p(1))a_1+O(a_1^2)\\&=\frac{\beta_1}{\beta_2}(1+o_p(1))a_1+O(a_1^2),\end{aligned} \tag{3.45}$$

其中$\lim\limits_{p\to0}o_p(1)=0$.由(3.17)与(3.26)知 $H=uvH^*\in C^2$,其中

$$H^* = -R_1^*(\varepsilon) + uH_1(u) + vH_2(u,v) \in C^1, R_1^*(0) = R_1,$$
于是由 $\sigma_0 = 0$ 及引理 3.7 知

$$v|_{\varepsilon=0} = -pu_0u^{-1}\exp\left(-\int_{u_0}^{u} v(-R_1^* + uH_1 + vH_2)|_{\varepsilon=0}\mathrm{d}u\right), \tag{3.46}$$

特别有 $v|_{\varepsilon=0} = -pu_0u^{-1}(1+O(p))$，再代入(3.46)右端，并令 $u=p$，进一步可得

$$\begin{aligned} v(p,u_0,0,\delta) &= -u_0\exp\left(\int_{u_0}^{p} pu_0u^{-1}\left(R_1 + O\left(|u| + \left|\frac{u_0}{u}\right|\right)\right)\right. \\ &\quad \cdot (1+O(p))\mathrm{d}u \\ &= -u_0\exp\left[pR_1u_0\ln\frac{u_0}{p}(1+O(p)) + O(u_0)\right] \\ &= -u_0[1 + pR_1u_0\ln u_0(1+O(p)) + O(u_0)], \end{aligned}$$

即

$$D(u_0,0,\delta) = u_0 + pR_1u_0^2\ln u_0(1+O(p)) + O(u_0^2),$$

从而由引理 3.5 得

$$\begin{aligned} P_1(a_1,0,\delta) &= W_2 \circ D \circ W_1^{-1}|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{\beta_2}{\beta_1}(1+o_p(1))a_1 - \frac{\beta_2 pR_1}{\beta_1^2\sin\theta} \\ &\quad \cdot (1+o_p(1))a_1^2\ln|a_1| + O(a_1^2), \end{aligned} \tag{3.47}$$

于是由(3.45)与(3.47)知

$$\begin{aligned} P_2 \circ P_1|_{\varepsilon=0} &= (1+o_p(1))a - \frac{pR_1}{\beta_1\sin\theta} \\ &\quad \cdot (1+o_p(1))a^2\ln|a| + O(a^2). \end{aligned} \tag{3.48}$$

另一方面，由引理 3.4 与 3.10 及 $\sigma_1 = 0$ 知

$$\left.\frac{\partial F}{\partial a}\right|_{\varepsilon=0} \to 0 \quad (\text{当 } a \to 0 \text{ 时}),$$

故由(3.48)即得

$$F(a,0,\delta) = -N_1R_1a^2\ln|a| + O(a^2), \quad N_1 > 0,$$

由此即知定理成立. 证毕.

若在(3.17)中 v 改为 $-v$,可得下述系统

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \lambda_1 u[1 + h_1(u, -v, \varepsilon, \delta)],\\ \dot{v} &= \lambda_2 v[1 + h_2(u, -v, \varepsilon, \delta)],\end{aligned} \tag{3.49}$$

注意到(3.17)与(3.49)在原点的一阶鞍点量正好符号相反,由此利用定理 3.11 即知:

推论 3.2 设对 C^3 系统(3.1)有 $\sigma_0 = \sigma_1 = 0$,且定理 3.11 中的 $R_1 \neq 0$,如果 L 为逆时针定向的,则当 $R_1 < 0(>0)$ 时,L 为内稳定(不稳定)的.

为了更好地理解定理 3.11 与推论 3.2 中 L 的稳定性和 R_1 的符号及 L 的定向之间的关系,设当 $\varepsilon = 0$ 时,(3.17)具有下述"理想"形式

$$\dot{u} = u, \quad \dot{v} = -v[1 - R_1 uv],$$

易知,对 $0 < u_0 < p$,若设上方程的轨线从点 $P_1(u_0, -p)$(或 $P_2(u_0, p)$)出发到达点 $Q_1(-D_1, p)$(或 $Q_2(D_2, p)$),则有

$$D_i = u_0[1 + (-1)^{i-1} pR_1 u_0 \ln u_0 + O(u_0)], \quad i = 1,2,$$

于是,若 $R_1 < 0$,则有 $D_1 > u_0 > D_2 > 0$,若 $R_1 > 0$,则有 $0 < D_1 < u_0 < D_2$(只要 $p > 0$ 适当小且 $u_0 > 0$ 充分小),如图 3.6 所示.

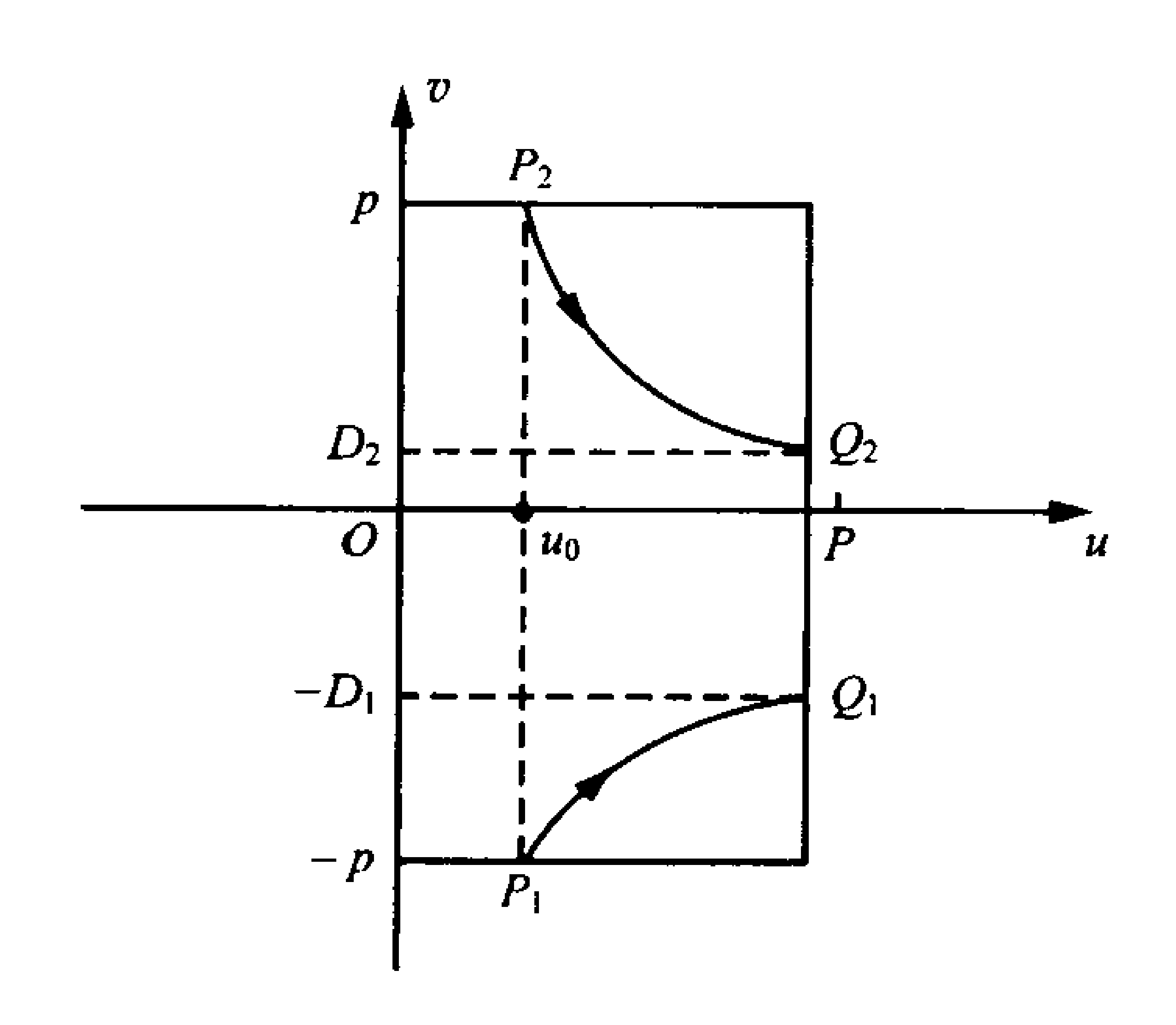


图 3.6　$R_1 < 0$

注意到在(u,v)平面上位于第一象限的同宿轨是逆时针定向的,而位于第四象限的同宿轨是顺时针定向,由此不难理解,当$\sigma_0=\sigma_1=0,R_1\neq0$时$L$的稳定为何与定向有关了.

对于定理3.11中的量R_1可按式(3.40)前面给出的R_1的计算公式或第一章第六节给出的一阶鞍点量公式来计算.

在给出例子之前,我们给出下列重要说明.

注 3.2 若L如图3.1(b)中所给出(其外侧有一族螺线),又设σ_0,σ_1与R_1如前,则可证若$\sigma_0<0(>0)$或$\sigma_0=0,\sigma_1<0(>0)$,则$L$为外稳定(不稳定)的,若$\sigma_0=\sigma_1=0,R_1<0(>0)$,则当$L$为顺时针定向时它是外稳定(不稳定)的,当$L$为逆时针定向时它是外不稳定(稳定)的(可参考下节的定理4.4).

例 3.2 考虑下述形式的多项式系统

$$\dot{x}=H_y+aH_xH,\ \dot{y}=-H_x-H_yH,\tag{3.50}$$

其中$H=\frac{1}{2}(y^2-x^2)+\frac{1}{3}x^3$,$a$为常数,易见

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}&=(aH_x^2-H_y^2)H,\\ \mathrm{div}(3.50)&=(2ax-a-1)H+aH_x^2-H_y^2,\end{aligned}\tag{3.51}$$

因此(3.50)有顺时针定向的同宿轨$L:H=0,0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$,且

$$\oint_L\mathrm{div}(3.50)\mathrm{d}t=\oint_L[a(x-x^2)\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x].$$

由分部积分公式及定积分公式,易知

$$\oint_L(x-x^2)\mathrm{d}y=-\oint_Ly(1-2x)\mathrm{d}x,\ \oint_Lxy\mathrm{d}x=\frac{6}{7}\oint_Ly\mathrm{d}x,$$

于是

$$\oint_L\mathrm{div}(3.50)\mathrm{d}t=\left(\frac{5}{7}a-1\right)\oint_Ly\mathrm{d}x,\ \oint_Ly\mathrm{d}x=\oint_Ly^2\mathrm{d}t>0.$$

又利用式(3.40)前面的公式知 $R_1=2(a+1)$,特别当 $a=\frac{7}{5}$时,$R_1=\frac{24}{5}>0$,于是由定理 3.4 与推论 3.2 知,当 $a>\frac{7}{5}\left(\leqslant\frac{7}{5}\right)$时,$L$ 不稳定(稳定).又由(3.51)知

$$\operatorname{div}(3.50)\Big|_{(1,0)}=\frac{1-a}{6},$$

由此及(3.50)在奇点(1,0)的线性部分易知,当 $1<a<36$($a<1$)时,(1,0)为(3.50)的稳定(不稳定)的初等奇点(焦点或结点),当 $a=1$ 时将(1,0)移至原点,并利用第一节一阶焦点量公式知(1,0)为(3.50)的稳定焦点,又易知当 $a<36$ 时,(3.50)在 L 内有惟一的奇点(1,0),于是由**环域定理**(此处先用该定理,以后将证明它),当 $1\leqslant a\leqslant\frac{7}{5}$时,除同宿轨 L 外,(3.50)在 L 内部必有一不稳定极限环 L_1.又由于当 $0<a-\frac{7}{5}\ll 1$ 时,L 已改变稳定性,故必产生另一(稳定)极限环 $L_2(\supset L_1)$,即当 $0<a-\frac{7}{5}\ll 1$ 时,除同宿轨 L 外,(3.50)还有两个极限环.同理知,当 $0<1-a\ll 1$ 时,(3.50)也有两个极限环.

下面再给出定理 3.9 的应用例子.

例 3.3 考虑四次 Liénard 系统

$$\dot{x}=y-\varepsilon(a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4),$$
$$\dot{y}=x-x^2, \tag{3.52}$$

当 $\varepsilon=0$ 时,(3.52)有首次积分 $H=\frac{1}{2}(y^2-x^2)+\frac{1}{3}x^3$,对应的闭轨族为 $L_h:H(x,y)=h,-\frac{1}{6}<h<0$,且当 $h\to 0$ 时,L_h 趋于同宿轨 L.往证:任给 $N>0$,存在 $\varepsilon_0>0$ 及 L 的邻域 U,使对一切 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0,|a_i|\leqslant N,i=1,2,3,4$,(3.52)在 U 中至多有 2 个

极限环且可以有两个极限环,即(3.52)在 L 的环性数是 2.

为证此结论,先由(3.11)知对(3.52)有

$$M=\oint_L (a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4)\mathrm{d}y$$
$$=-a_1I_{00}-2a_2I_{01}-3a_3I_{02}-4a_4I_{03},$$

其中(由分部积分公式知)

$$I_{0j}=\oint_L x^j y\mathrm{d}x,\quad j=0,1,2,3,$$

由于沿 L 有 $y^2=x^2\left(1-\frac{2}{3}x\right),1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$,故有

$$I_{0j}=2\int_0^{\frac{3}{2}}x^{j+1}\sqrt{1-\frac{2}{3}x}\mathrm{d}x,$$

于是

$$I_{00}=\frac{6}{5},I_{01}=\frac{36}{35},I_{02}=\frac{36}{35},I_{03}=\frac{12}{11}I_{02}=\frac{72}{77}I_{00},$$

因此

$$M=-I_{00}\left[a_1+\frac{12}{7}a_2+\frac{18}{7}a_3+\frac{288}{77}a_4\right].$$

由定理 3.6 知 $c_1=a_1$,且

$$c_2=-\oint_L (2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3)\mathrm{d}t+O(c_1)$$
$$=-2\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3}{\sqrt{1-2x/3}}\mathrm{d}x+O(a_1)$$
$$=-6\left[2a_2+3a_3+\frac{24}{5}a_4\right]+O(a_1).$$

又易知

$$\operatorname{rank} \frac{\partial(M, c_1, c_2)}{\partial(a_1, a_2, a_3, a_4)} = 3,$$

且当 $M = c_1 = c_2 = 0$ 时，$a_1 = a_4 = 0, a_3 = -\frac{2}{3}a_2$，此时(3.52)成为

$$\dot{x} = y + 2\varepsilon a_2\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right), \quad \dot{y} = x - x^2.$$

由本章引理 1.3 知上述系统有一族闭轨，其边界是 L 附近的同宿轨. 于是由定理 3.9 即得所要证的结论.

利用定理 3.7，Zhu([151])，Joyal-Rousseau([80])与 Cai-Guo([7])各自证明任一二次系统的孤立同宿轨的环性数至多是 3，但是否等于三，目前尚未有理论上的证明. Horozov-Iliev([70])与 Iliev([73])分别证明了通有的与非通有的二次 Hamilton 系统的同宿轨在含单参数的二次多项式扰动下的环性数是 2，Han-Ye-Zhu([63])通过发展平面同宿分支的一般理论，证明了任一二次 Hamilton 系统的同宿轨在任意(多参数)二次多项式扰动下的环性数是 2. 对二次非 Hamilton 的可积系统的同宿轨的环性数，也有一些研究，见[40]与[69]等. 结果表明这类同宿轨(在二次多项式扰动下)的环性数应该是 2，但目前尚未彻底解决.

§4 双同宿分支

本节仍考虑系统(3.1). 设当 $\varepsilon = 0$ 时，(3.1)有一双同宿轨 L，即 L 由两个以同一鞍点 S_0 为极限集的同宿轨 L_1 与 L_2 组成. 称 $L \cup S_0$ 为双同宿环，有时也称 L 为双同宿环. 为确定计，仍设 L 为顺时针定向的，则有如图 4.1 所示的两种情况. 由于类似性，我们只以第一种情况为例来讨论.

4.1 非退化条件下双同宿分支

首先给出 Poincaré 映射与后继函数的定义. 分别取点 $A_i \in$

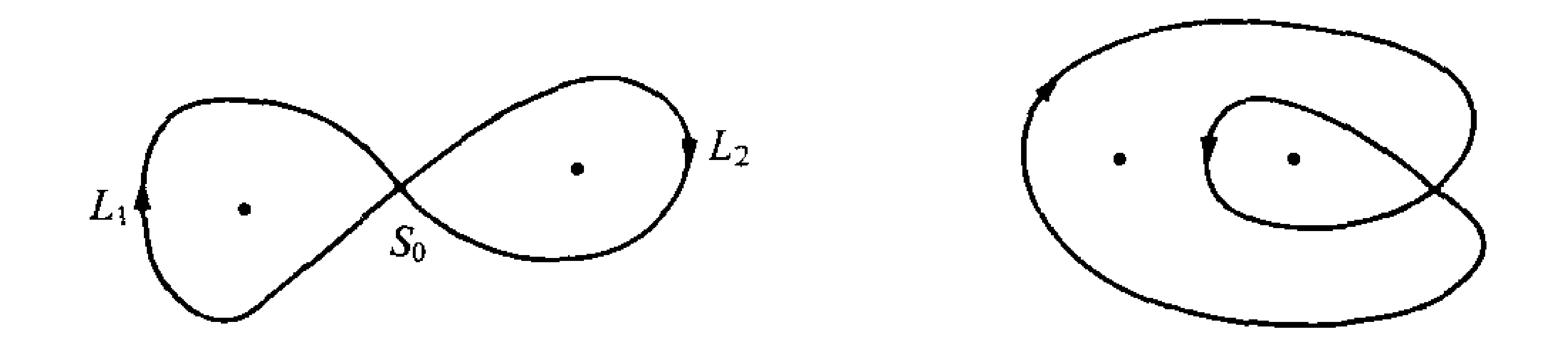


图 4.1　两种双同宿环

L_i, $i=1,2$,过 A_i 作 L_i 的垂线(截线)l_i,其正向取为

$$n_i = \frac{1}{|f(A_i),g(A_i)|}(-g(A_i),f(A_i)), \quad i = 1,2.$$

当 ε 充分小时(3.1)在 L_i 附近有分界线 $L_i^s(\varepsilon,\delta)$ 与 $L_i^u(\varepsilon,\delta)$, $i=1,2$,且 $L_1^s \cup L_2^s$, $L_1^u \cup L_2^u$ 分别构成(3.1)在 S_0 附近的鞍点 S 的稳定和不稳定流形. 又设 A_i^s, A_i^u 分别为 L_i^s, L_i^u 与 l_i 的交点,则可设

$$A_i^s = A_i + a_i^s(\varepsilon,\delta)n_i, \quad A_i^u = A_i + a_i^u(\varepsilon,\delta)n_i, \quad i = 1,2.$$

如图 4.2 所示

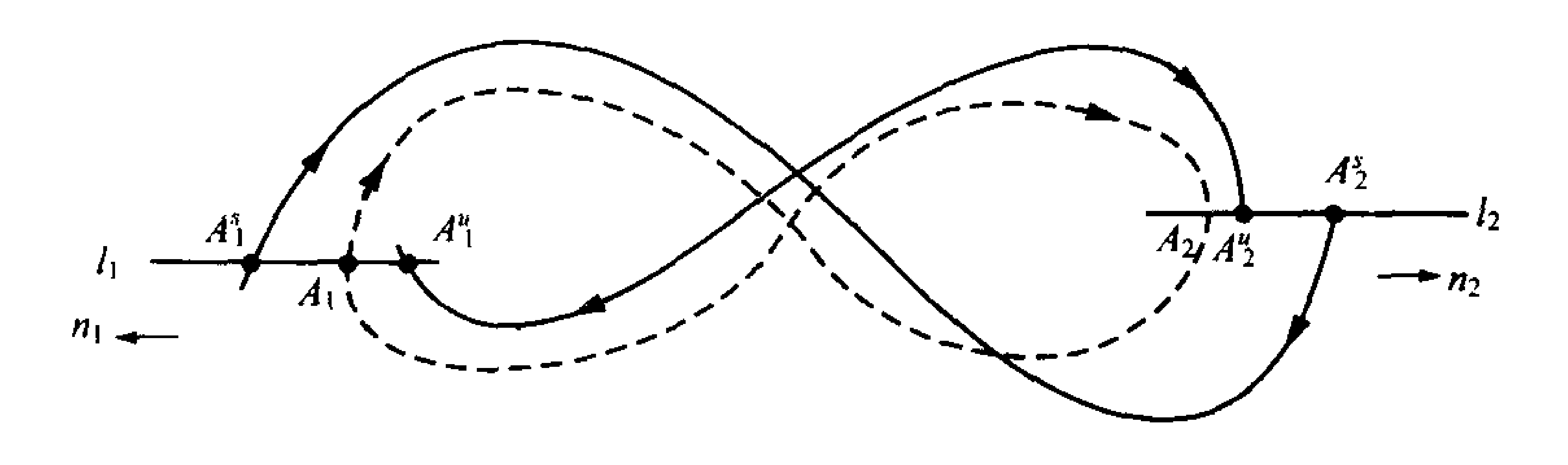


图 4.2

如同第三节,分别在 L_1 与 L_2 附近可定义两个 Poincaré 映射 P_i: $l_i \to l_i$ 与后继函数 $F_i(a,\varepsilon,\delta) = P_i(a,\varepsilon,\delta) - a$, $i=1,2$,而且 F_1 与 P_1 的定义域为 $a \leqslant a_1^s$,而 F_2 与 P_2 的定义域为 $a \leqslant a_2^s$,其中设 $|a|$ 适当小. 现在 A_1 附近取点 $A = A_1 + an_1 \in l_1$,设(3.1)过 A

的正轨线交 l_2 于点 $A^* = A_2 + a^*(a, \varepsilon, \delta)n_2$，后再交 l_1 于点 $B = A_1 + P(a, \varepsilon, \delta)n_1$，则我们又得(3.1)在 $L(= L_1 \cup L_2)$ 附近的 Poincaré 映射 $P: l_1 \to l_1$，易见，其定义域为

$$a > a_1^s, \quad a^*(a, \varepsilon, \delta) > a_2^s.$$

设此联立不等式的解为 $a > a_0(\varepsilon, \delta)$，则 $a_0(\varepsilon, \delta) \geqslant a_1^s$，且下列极限存在有限：

$$\lim_{a \to a_0} P(a, \varepsilon, \delta) = P(a_0, \varepsilon, \delta),$$

于是 P 的定义域可扩充为 $a \geqslant a_0(\varepsilon, \delta)$. 令

$$F(a, \varepsilon, \delta) = P(a, \varepsilon, \delta) - a, \quad a \geqslant a_0.$$

称 F 为(3.1)在 L(附近)的后继函数. 易见，F 关于 $a > a_0$ 有根当且仅当(3.1)在 L 附近有包围鞍点 S 的极限环，我们称这种环为大环；$a = a_0$ 为 F 的根当且仅当(3.1)在 L 附近有双同宿环或形如图 3.1(b)中的耳形同宿环，称其为大同宿环或大同宿轨. (3.1)在 L_i 附近的极限环(对应着 F_i 的根)称为(3.1)(在 L 附近)的小环. 令

$$d(\varepsilon, \delta, A_1) = F(a_0(\varepsilon, \delta), \varepsilon, \delta),$$

$$d_i(\varepsilon, \delta, A_i) = F_i(a_1^s, \varepsilon, \delta), \quad i = 1, 2.$$

则由引理 3.3 知

$$d_i = \frac{\varepsilon M_i(\delta)}{|f(A_i),\ g(A_i)|} + o(\varepsilon), \quad i = 1, 2,$$

其中

$$M_i(\delta) = \oint_{L_i} (f g_0 - g f_0)_{\varepsilon = 0} \exp\left(-\int_0^t (f_x + g_y) \mathrm{d}\tau\right) \mathrm{d}t. \tag{4.1}$$

可知,(3.1)在 L_i 附近有同宿轨当且仅当 $d_i=0$,在 L 附近有大同宿轨当且仅当 $d=0$ 且 $d_1d_2\neq0$.由此,并根据 d_1,d_2 与 d 的符号不难知道(3.1)的四条分界线 $L_i^{s,u}$,$i=1,2$ 只能有十三种不同的分布(其中当 $d=0$ 时三种,$d>0$ 时四种,$d<0$ 时六种),请读者自行画出这些相图.

设 L 为孤立双同宿轨,如果鞍点 S_0 为粗的,即 $\sigma_0=(f_x+g_y)(S_0)\neq0$,则说 L 为非退化的.在非退化条件下 L 的扰动分支由下述定理给出.

定理 4.1 考虑 $C^n(n\geqslant1)$系统(3.1),设 $\sigma_0=(f_x+g_y)(S_0)\neq0$,则当 $\sigma_0<0(>0)$时 L 为稳定(不稳定)的,且存在 $\varepsilon_0>0$ 与 L 的邻域 U,使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0,\delta\in D$ 时

(i) (3.1)在 U 中至多有一个大环;

(ii) (3.1)在 U 中至多有两个极限环,若有两个,则它们或是不相套的两个小环,或是一个大环套着一个小环.

证明 为确定计,设 $\sigma_0<0$. 由引理 3.4 的证明知,引理 3.4 中的公式对此处的 F 仍成立,从而与定理 3.1 类似可证,当 $\sigma_0<0$ (>0)时 L 为稳定(不稳定)的,且当$|\varepsilon|$充分小时(3.1)在 L 附近至多有一个大环,且若有必是稳定且双曲的.直接应用定理 3.1 知(3.1)在 L_i 附近至多有一个小环,若有也必是稳定且双曲的($i=1,2$).假如两个小环同时存在,则它们均为稳定的,此时 L 附近四条分界线的相对位置必如图 4.2 所示. 注意到 L 为稳定的,由解对初值的连续性知,函数 F 关于 a 必有偶数个根,又因已证大环至多有一个,故此时无大环.于是结论得证.证毕.

与定理 3.2 基本类似,且采用定理 4.1 的分析方法,可证下列定理(请读者自证).

定理 4.2 设 $C^n(n\geqslant1)$系统(3.1)满足(3.12).

(i) 当$|\varepsilon|$充分小,$\delta\in D$ 时,(3.1)在 L 附近存在大环的必要条件是存在$\delta_0\in D$ 使$M(\delta_0)\equiv M_1(\delta_0)+M_2(\delta_0)=0$.

(ii) 设 $M(\delta_0)=0$ 且 $\sigma_0(\delta_0)\equiv(f_{0x}+g_{0y})(S_0,0,\delta_0)\neq0$,则

存在 $\varepsilon_0>0$，L 的邻域 U 使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$，$|\delta-\delta_0|<\varepsilon_0$ 时，(3.1)在 U 中至多有两个极限环，若有两个，则 $M_1(\delta_0)=M_2(\delta_0)=0$ 且它们或是不相套的两个小环或是一个大环套着一个小环.

(iii) 设 $M(\delta_0)=0$，$M'(\delta_0)\neq 0$，则存在连续可微函数 $\delta^*(\varepsilon)=\delta_0+O(\varepsilon)$，使当 $\delta=\delta^*(\varepsilon)$ 时，(3.1)在 U 内有同宿轨，且当 $d_i(\varepsilon,\delta^*(\varepsilon),A_i)\neq 0(i=1,2)$ 时，该同宿轨为大同宿环.

上述两个定理中有关产生大环的必要条件及大环的惟一性是韩茂安、罗定军与朱德明([59])获得的，此处对光滑性的要求做了改进. 易见 L 附近的大环是由 L 本身产生的，而小环是由 L_1 或 L_2 产生的. 在定理 4.1 与 4.2 的条件下，可进一步给出两个极限环必出现的条件. 事实上，若 $\delta\in R^2$ 且存在 $\delta_0\in R^2$ 使

$$M_1(\delta_0)=M_2(\delta_0)=0,\ \det\frac{\partial(M_1,M_2)}{\partial(\delta_1,\delta_2)}(\delta_0)\neq 0,$$

则当 $|\varepsilon|+|\delta-\delta_0|$ 充分小时，两个极限环必可以出现，此时我们说 L 的总环性数为 2. 定理 4.2 中的条件 $\sigma(\delta_0)\neq 0$ 常称为非孤立双同宿分支中的非退化条件.

4.2 双同宿分支的进一步结果

现设(3.1)至少为 C^2 系统，即 $n\geqslant 2$. 又设 $\sigma_0=(f_x+g_x)(S_0)=0$，则

$$\sigma_1=\oint_L(f_x+g_y)\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{2}\oint_{L_i}(f_x+g_y)\mathrm{d}t\equiv\sigma_{11}+\sigma_{12}$$

存在有限. 按照定理 3.3 的证明思路，经过一些细致的分析与估计可以证明下列结果(由于证明较复杂，此处略去，有兴趣的读者请参考[52]).

定理 4.3 考虑 $C^n(n\geqslant 2)$ 系统(3.1). 设 $\sigma_0=0$，$\sigma_1\neq 0$，则

(i) 当 $\sigma_1<0(>0)$ 时双同宿环 L 为稳定(不稳定)的；

(ii) 存在 $\varepsilon_0>0$ 及 L 的邻域 U 使对 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$，$\delta\in D$，

(3.1)在 U 内至多有两个大环;

(iii) 若再设 $\sigma_{11}\sigma_{12}\neq0$,则对 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0,\delta\in D$,(3.1)在 U 内至多有五个极限环;

(iv) 若设 $\sigma_{11}\sigma_{12}=0$,且(3.1)至少为 C^7 系统,又设(3.1)在鞍点 S_0 的一阶鞍点量非零,即 $R_1\neq0$,则对 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0,\delta\in D$,(3.1)在 U 中至多有六个极限环.

我们指出,上述定理中有关极限环的最大个数都是可以达到的.

当 $\sigma_0=\sigma_1=0$ 时,关于 L 的稳定性我们有下述定理.

定理 4.4 考虑 C^3 系统(3.1).设 $\sigma_0=\sigma_1=0$ 且

$$R_1\equiv\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}(h_1-h_2)(0,0,0,\delta)\neq0,\tag{4.2}$$

其中 h_1,h_2 为(3.17)中的函数. 若 L 为顺时针定向的,则当$R_1<0(>0)$时,L 为外侧稳定(不稳定)的;若 L 为逆时针定向的,则当 $R_1>0(<0)$时,L 为外侧稳定(不稳定)的.

证明 同前,设 L 为顺时针定向的.取点 $A_1,A_4\in L_1,A_2,A_3\in L_2$,点 A_i 均在S_0 附近且与 p 有关使成立(与(3.42)类似)

$$|f(A_i),g(A_i)|=\beta_2|\lambda_{20}|p+O(p^2),\quad i=3,4,$$

$$|f(A_j),g(A_j)|=\beta_1\lambda_{10}p+O(p^2),\quad j=1,2.$$

如前,过点 A_i 作L 的垂直截线l_i,定义从 l_i 到l_j 的 Poincaré 映射 P_{ij},使得

$$P|_{\varepsilon=0}=P_{31}\circ P_{23}\circ P_{42}\circ P_{14}:l_1\to l_1,$$

如图 4.3 所示,则与(3.45)及(3.47)类似成立

$$P_{42}(a)=\frac{\beta_2}{\beta_1}(1+o_p(1))a$$

$$-\frac{\beta_2 pR_1}{\beta_1^2\sin\theta}(1+o_p(1))a^2\ln a+O(a^2),$$

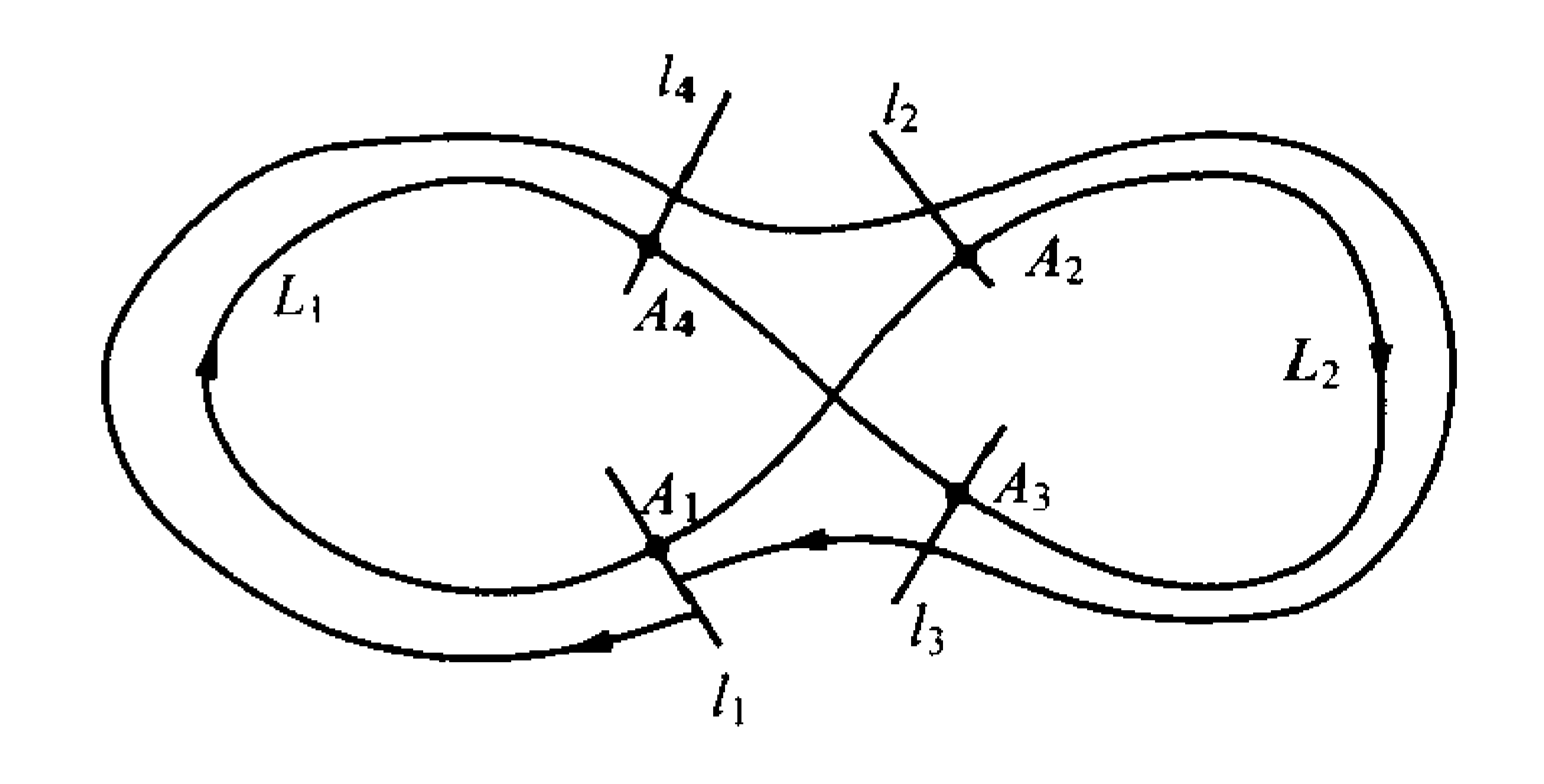


图 4.3　$R_1<0$

$$P_{14}(a) = \frac{\beta_1}{\beta_2}(1 + o_p(1))e^{\sigma_{11}}a + O(a^2),$$

$$P_{31}(a) = \frac{\beta_2}{\beta_1}(1 + o_p(1))a$$

$$- \frac{\beta_2 pR_1}{\beta_1^2\sin\theta}(1 + o_p(1))a^2\ln a + O(a^2),$$

$$P_{23}(a) = \frac{\beta_1}{\beta_2}(1 + o_p(1))e^{\sigma_{12}}a + O(a^2),$$

从而

$$P_{42} \circ P_{14} = e^{\sigma_{11}}(1 + o_p(1))a$$

$$- \frac{pR_1}{\beta_1\sin\theta}(1 + o_p(1))a^2\ln a + O(a^2),$$

$$P_{31} \circ P_{23} = e^{\sigma_{12}}(1 + o_p(1))a$$

$$- \frac{pR_1}{\beta_1\sin\theta}(1 + o_p(1))a^2\ln a + O(a^2),$$

$$P|_{\varepsilon=0} = e^{\sigma_{11}+\sigma_{12}}(1 + o_p(1))a$$

$$- \frac{pR_1}{\beta_1\sin\theta}(e^{\sigma_{12}} + e^{2\sigma_{11}} + o_p(1))a^2\ln a + O(a^2).$$

另一方面，由引理 3.4 与 3.10 及 $\sigma_1=0$ 知

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,0,\delta)\to 0 \quad (\text{当 } a\to 0 \text{ 时}),$$

故有

$$F(a,0,\delta) = P(a,0,\delta) - a$$
$$= -\frac{pR_1}{\beta_1\sin\theta}(e^{\sigma_{12}} + e^{2\sigma_{11}} + o_p(1))a^2\ln a + O(a^2),$$

由此式即知结论成立．证毕．

由定理 3.11 与定理 4.4 即得

推论 4.1 设 $L=L_1\cup L_2$ 为 C^3 系统(3.1)($\varepsilon=0$)的顺时针定向的双同宿环，且 $\sigma_0=\sigma_{11}=\sigma_{12}=0$，$R_1\neq 0$，则当 $R_1<0(>0)$ 时，L 为外侧稳定(不稳定)的，同时 L_1 与 L_2 为内侧不稳定(稳定)的．

最近，作者进一步研究了 L_1、L_2 与 L 的内外稳定性，利用 Poincaré 映射给出了分别决定它们的稳定性的一系列的判别量及这些量之间的关系．利用所得结果又可进一步研究双同宿分支中多个(多达 10 多个)极限环的存在性．

例 4.1 考虑形如(3.50)的多项式系统

$$\dot{x} = H_y + aH_xH,\ \dot{y} = -H_x - H_yH, \qquad (4.3)$$

其中 $H=\frac{-1}{2}(x^2-y^2)+\frac{1}{4}x^4$．系统(4.3)有关于原点对称的双同宿环 $L:H=0$，L 的位于 y 轴左、右侧的同宿环分别记为 L_1 与 L_2，则注意到

$$\mathrm{div}(4.3) = [(3x^2-1)a-1]H + aH_x^2 - H_y^2, \qquad (4.4)$$

可知

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \oint_{L_2}[a(x-x^3)\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x]$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} x(3ax^2 - a - 1)\sqrt{1 - \frac{1}{2}x^2}\,dx$$

$$= \int_0^2 (3au - a - 1)\sqrt{1 - \frac{1}{2}u}\,du$$

$$= 2\int_0^1 [5a - 1 - 6av]\sqrt{v}\,dv$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{7}{5}a - 1\right),$$

同(3.50)类似可知(4.3)的一阶鞍点量为 $R_1 = 2(a+1)$，因此当 $a = \frac{5}{7}$ 时，$R_1 = \frac{24}{7} > 0$. 于是由推论 4.1 知，当 $a = \frac{5}{7}$ 时，L 为外侧不稳定的，而 L_1 与 L_2 为内侧稳定的，由定理 3.4 与 4.3 又知，当 $a < \frac{5}{7}\left(> \frac{5}{7}\right)$ 时，L, L_1 与 L_2 均为稳定(不稳定)的. 因此当 $\left|a - \frac{5}{7}\right|$ 适当小且 $a < \frac{5}{7}\left(> \frac{5}{7}\right)$ 时，(4.3)在 L 外侧有稳定大环 Γ (在 L_i 内侧有不稳定的小环 Γ_i，$i = 1,2$). 又易知，当 $a < 16$ 时，(4.3)在区域 $H < 0$ 中只有奇点 $(\pm 1, 0)$，于是注意到(由(4.4))

$$\operatorname{div}(4.3)\big|_{(\pm 1,0)} = \frac{1 - 2a}{4},$$

可知，当 $0 < \frac{5}{7} - a \ll 1$ 时，(4.3)在 Γ_i 内部还有一稳定小环 Γ_i'，$i = 1,2$，而当 $a \geqslant \frac{5}{7}$ 时，Γ_i' 恒存在，于是除 L 外，当 $0 < \frac{5}{7} - a \ll 1$ 时，(4.3)有四个小环，当 $0 < \frac{5}{7} - a \ll 1$ 时有两个小环和一个大环.

当(3.12)成立时，仍按照定理 3.3 的证明思路，可证下述定理(证明详见[52]，其实定理 3.3 的证明思路原来是取自该文对下述定理的证明).

定理 4.5 设 $C^n(n\geqslant 2)$系统满足(3.12),又设存在 $\delta_0\in D$ 使$M(\delta_0)=0,\sigma(\delta_0)=0$,且

$$\sigma_1(\delta_0)\equiv\sum_{i=1}^{2}\oint_{L_i}(f_{0x}+g_{0y})(x,y,0,\delta)\mathrm{d}t$$

$$\equiv\sigma_{11}(\delta_0)+\sigma_{12}(\delta_0)\neq 0,$$

则

(i) 存在 $\varepsilon_0>0$ 及 L 的邻域U,使对一切 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0,|\delta-\delta_0|<\varepsilon_0$,(3.1)在 U 中至多有两个大环. 若 $\delta\in R^2$ 且

$$\det\frac{\partial(M,\sigma)}{\partial(\delta_1,\delta_2)}(\delta_0)\neq 0, \tag{4.5}$$

则(3.1)在 U 中可以有两个大环.

(ii) 若 $\sigma_{11}(\delta_0)\sigma_{12}(\delta_0)\neq 0$,则对一切 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0,|\delta-\delta_0|<\varepsilon_0$,(3.1)在 U 中至多有 5 个极限环,且当 $\delta\in R^3$,

$$M_1(\delta_0)=M_2(\delta_0)=0,\ \det\frac{\partial(M_1,M_2,\sigma)}{\partial(\delta_1,\delta_2,\delta_3)}(\delta_0)\neq 0 \tag{4.6}$$

时存在(ε,δ)使(3.1)在 U 中有k 个大环及 $5-k$ 个小环,其中 $k=1$ 或 2.

(iii) 若 $\sigma_{11}(\delta_0)\sigma_{12}(\delta_0)=0,\dfrac{\partial R_1}{\partial\varepsilon}(0,\delta_0)\neq 0$(其中 $R_1(\varepsilon,\delta)$表示(3.1)在鞍点 S 的一阶鞍量),则对 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0,|\delta-\delta_0|<\varepsilon_0$,(3.1)在 U 中至多有 6 个极限环.若 $\delta\in R^4$,且

$$M_1(\delta_0)=M_2(\delta_0)=\sigma_{0i}(\delta_0)=0,$$

$$\det\frac{\partial(M_1,M_2,\sigma,\sigma_{0i})}{\partial(\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)}(\delta_0)\neq 0$$

(其中 $i=1$ 或 2),则(3.1)在 U 中可以有k 个大环,$6-k$ 个小环,

此处 $k=1$ 或 2.

不难证明,在(4.5)下(3.1)在点 δ_0 的邻域内存在上、下大同宿环分支曲线及一个半稳定大环分支曲线,而当定理 4.5 的条件(ii)及(4.6)成立时,在参数 δ 所在空间中 δ_0 的邻域内存在四个同宿分支曲面(分别对应左、右小同宿环与上、下大同宿环)和三个半稳定环分支曲面(分别对应左、右小半稳定环与大半稳定环).这七个分支曲面的公共点 $\delta^*(\varepsilon)$ 对应着(3.1)在 L 附近的双同宿轨.

当(3.12)成立时(3.1)在 L 附近有三族闭轨,不妨设它们分别可表示为

$$L_h: H(x,y)=h, \quad 0<h\ll 1,$$

$$L_{1h}: H(x,y)=h, \quad x<0, \quad 0<-h\ll 1,$$

$$L_{2h}: H(x,y)=h, \quad x>0, \quad 0<-h\ll 1,$$

且当 $h\to 0$ 时 $L_h\to L, L_{ih}\to L_i, i=1,2$. 相应地我们有三个一阶 Melnivov 函数

$$M_1(h,\delta)=\oint_{L_h}(fg_0-gf_0)_{\varepsilon=0}\mathrm{d}t, \quad 0<h\ll 1,$$

$$M_{1i}(h,\delta)=\oint_{L_{ih}}(fg_0-gf_0)_{\varepsilon=0}\mathrm{d}t, \quad 0<-h\ll 1.$$

与定理 3.6 完全类似可证,若(3.1)为 C^2 系统,则 M_1 关于 $0<h\ll 1$ 为 C^2 函数,且

$$M_1(h,\delta)=M(\delta)+c_1(\delta)h\ln h+c_2(\delta)h+o(h),$$
$$0<h\ll 1,$$

其中

$$c_1(\delta)=-\frac{2\sigma(\delta)}{\lambda_1(0,\delta)}=-2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)'_\varepsilon(0,\delta),$$

$$c_2(\delta)=\sum_{i=1}^{2}\oint_{L_i}[(f_{0x}+g_{0y})(x,y,0,\delta)-\sigma(\delta)]\mathrm{d}t+O(c_1).$$

若(3.1)为 C^{∞} 系统,则 Jiang-Han([77])证明 $M_1(h,\delta)$关于 $0<h\ll 1$ 为 C^{∞} 的,且有下列展式

$$M_1(h,\delta) = c_0(\delta) + c_1(\delta)h\ln h + c_2(\delta)h + c_3(\delta)h^2\ln h + \cdots. \tag{4.7}$$

关于 L 产生大环的个数与上式中系数的关系,文献[52]提出下列猜想.

猜想:如果存在 $\delta_0\in D$ 及 $k\geqslant 3$ 使

$$c_j(\delta_0) = 0, \quad j = 0,\cdots,k-1 \quad c_k(\delta_0)\neq 0, \tag{4.8}$$

则存在 $\varepsilon_0>0$ 及 L 的邻域 U,使对 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$, $|\delta-\delta_0|<\varepsilon_0$, C^{∞} 系统(3.1)在 U 中至多有 k 个大环.

由定理 4.5 知,上述猜想对 $k=2$ 成立. 又如果 $\delta\in R^k$ 且

$$\det\frac{\partial(c_0,c_1,\cdots,c_{k-1})}{\partial(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k)}(\delta_0)\neq 0, \tag{4.9}$$

则不难证明 L 可以产生 k 个大环.

注 4.1 若(3.1)关于原点(鞍点)为中心对称的,则由定理3.8可证上述猜想成立. 事实上,由[35]知,若(3.1)为中心对称的,则上一节的定理 3.7~3.10 对大环来说仍旧成立.

4.3 一类三次系统的双同宿分支

本小节应用同宿分支与双同宿分支的有关定理讨论下述三次系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - x^3 - \varepsilon(x^2 + a_1x + a_0)y \tag{4.10}$$

在双同宿环邻域内极限环的分支. 不妨设小参数 ε 非负. 易见,当 $\varepsilon=0$ 时(4.10)有 Hamilton 函数 $H(x,y) = -\frac{1}{2}(x^2-y^2)+\frac{1}{4}x^4$. 由(4.1)知

$$M_1 = -2(I_3 - a_1I_2 + a_0I_1), \quad M_2 = -2(I_3 + a_1I_2 + a_0I_1),$$

其中

$$I_j=\int_0^{\sqrt{2}}x^j\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x,\quad j=1,2,3.$$

直接积分可知 $I_1=\frac{2}{3}$, $I_2=\frac{1}{4}\sqrt{2}\pi$, $I_3=\frac{32}{15}$,从而

$$M_i=-\frac{64}{15}+(-1)^{i-1}\frac{\pi}{\sqrt{2}}a_1-\frac{4}{3}a_0,\quad i=1,2,$$

$$M_1+M_2=-\frac{8}{15}(16+5a_0).$$

又易知 $\sigma=-a_0$,因此由定理 4.2 知(4.10)在双同宿环 $L:H=0$ 附近至多有一个大环(考虑到正半轨的有界性易知(4.10)在 L 的邻域以外还有另一(稳定)大环),且在 (a_0,a_1) 平面上有同宿分支曲线:$a_0=a_0^*(\varepsilon,a_1)=-\frac{16}{5}+O(\varepsilon)$,使当 $\varepsilon\to0$ 时,相应的同宿轨趋于 L. 由于当 $a_0=a_0^*$ 时

$$M_i=(-1)^{i-1}\frac{\pi}{\sqrt{2}}a_1+O(\varepsilon),\quad i=1,2,$$

又注意到,当 $a_1=0$ 时,(4.10)为对称系统,从而当 $a_1=0$, $a_0=a_0^*$ 时有 $M_1=M_2=0$, $d_1=d_2=0$,故当 $a_0=a_0^*$ 时有

$$M_i=(-1)^{i-1}\frac{\pi}{\sqrt{2}}a_1(1+O(\varepsilon)),(-1)^{i-1}\varepsilon a_1d_i\geqslant0,i=1,2.$$

因已设 $\varepsilon>0$,由图 3.2 可知,上述同宿分支曲线实际上由三部分组成:

(i) 上同宿分支曲线 $L_u^H:a_0=a_0^*(\varepsilon,a_1),\quad a_1>0$;

(ii) 下同宿分支曲线 $L_d^H:a_0=a_0^*(\varepsilon,a_1),\quad a_1<0$;

(iii) 双同宿分支点 $a_0=a_0^*(\varepsilon,0),\quad a_1=0$.

此外,由推论 3.1 与定理 3.5 知(3.10)还有左同宿分支曲线

$$L_l^H: a_0 = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}a_1 - \frac{16}{5} + O(\varepsilon),$$

与右同宿分支曲线

$$L_r^H: a_0 = -\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}a_1 - \frac{16}{5} + O(\varepsilon),$$

以及左、右二重小环分支曲线 L_l^{2M} 与 L_r^{2M}，且它们的端点分别是曲线 L_l^H，L_r^H 与直线 $a_0=0$ 的交点. 由于当 $(a_0,a_1)=(a_0^*(\varepsilon,0),0)\equiv A^*$ 时，(4.10)的双同宿环是不稳定的，取定 A^* 的充分小邻域 V，先让点 (a_0,a_1) 在曲线 L_l^H 上且位于 V 及 $a_1<0$ 中，然后让 (a_0,a_1) 沿 V 的边界变动，利用同宿轨破裂前或后必有极限环这一事实，易得如图 4.4 所示的分支图(由于参数 (a_0,a_1) 在 A^* 附近变化，故半稳定环分支曲线 L_l^{2M} 与 L_r^{2M} 与 V 不交). Jebrane-Zo-

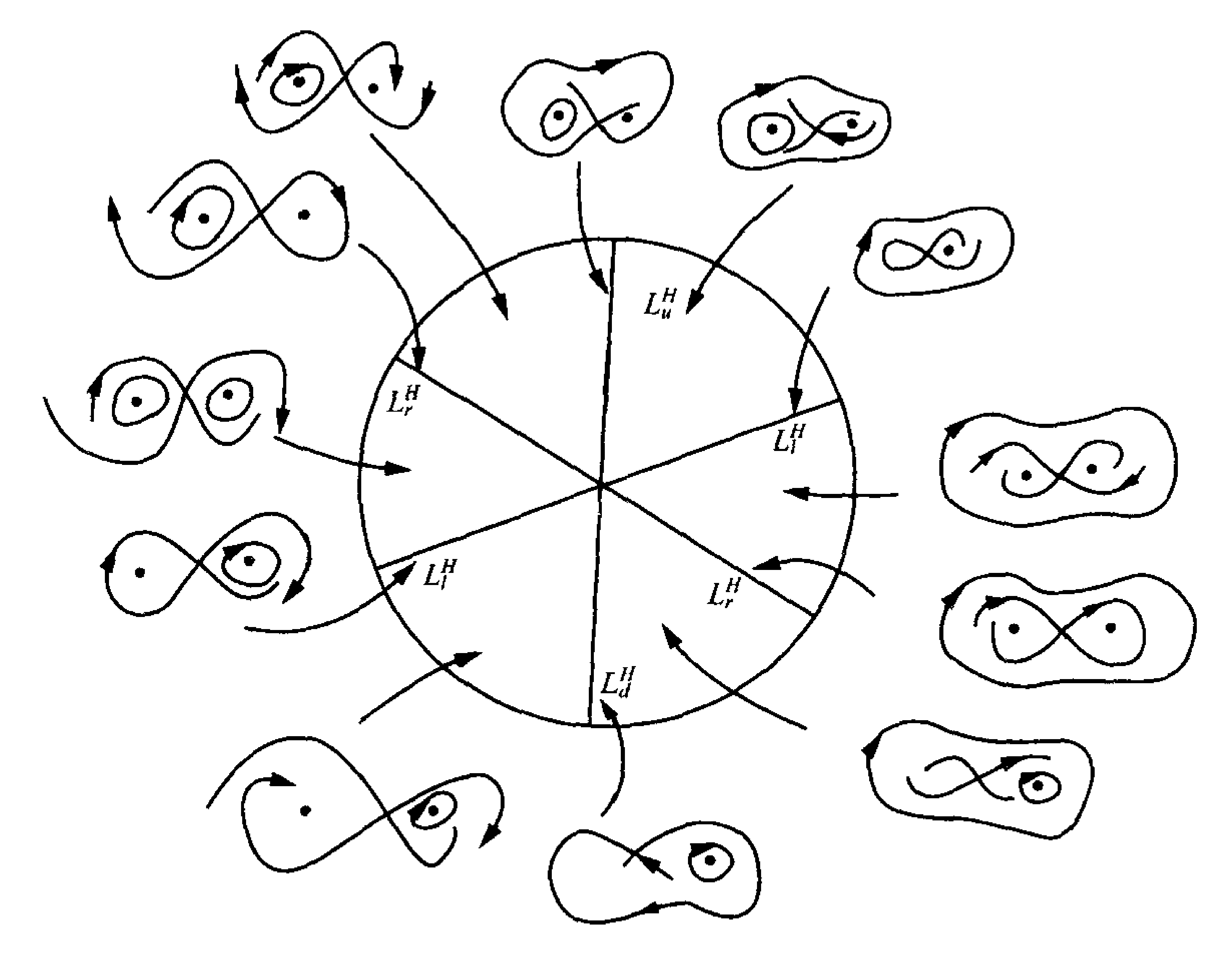


图 4.4 方程(4.10)在 A^* 附近的分支图

ladek([76])研究了(4.10)的全局分支,并证明了(4.10)至多有三个极限环,若有三个,则必是两个大环套着一个小环,或是一个大环套着两个小环,但该文未对同宿分支进行专门论证,因此上述讨论可认为是对此文的补充.

§5　异宿环的分支

本节考虑系统(3.1)在一异宿环附近极限环的分支,我们将主要考虑含两个鞍点的异宿环的扰动分支.首先考虑稳定性问题.

5.1　异宿环的稳定性

设当 $\varepsilon=0$ 时,(3.1)有一含两个鞍点 S_{10},S_{20} 的异宿环 $L=L_1\cup L_2$,恒设 $\Omega(L_1)=S_{20}$,则有如图 5.1 所示的两种可能(不妨设 L 为顺时针定向的),本节将以第一种情况为例来讨论.

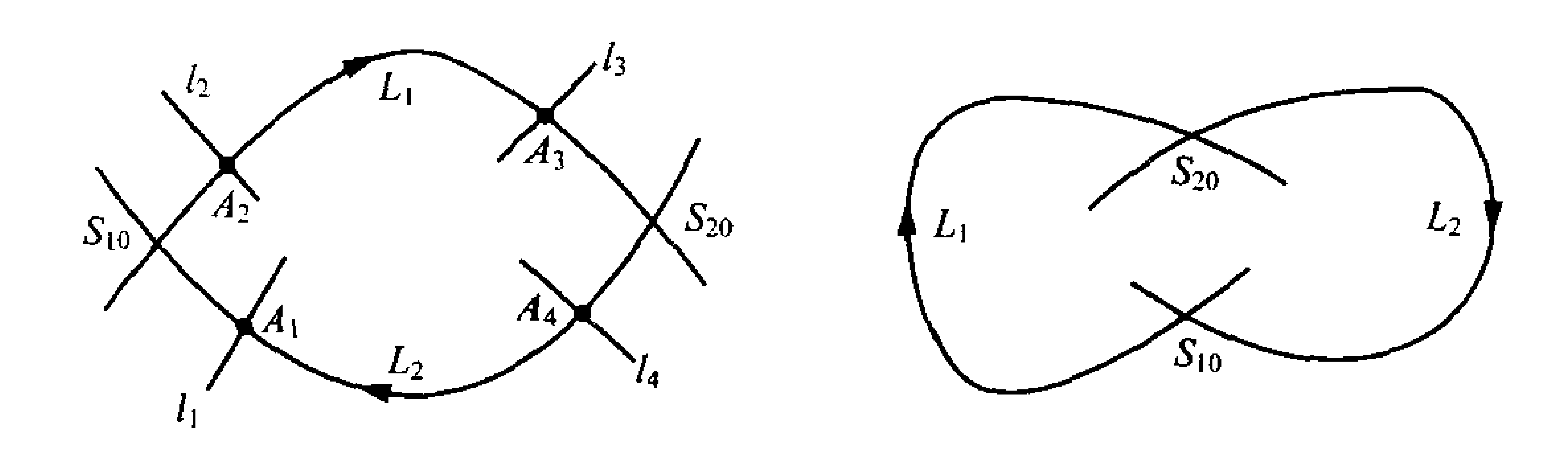


图 5.1　两种两点异宿环

取点 $A_2,A_3\in L_1,A_1,A_4\in L_2$ 且 A_1,A_2 在 S_{10} 附近,A_3,A_4 在 S_{20} 附近(其中 L_1 为 L 的上支,L_2 为 L 的下支),它们均与 $p>0$ 有关,且使

$$
\begin{aligned}
|f(A_1),g(A_1)| &= \beta_2|\lambda_{12}^0|p+O(p^2),\\
|f(A_2),g(A_2)| &= \beta_1\lambda_{11}^0 p+O(p^2),\\
|f(A_3),g(A_3)| &= \beta_4|\lambda_{22}^0|p+O(p^2),\\
|f(A_4),g(A_4)| &= \beta_3\lambda_{21}^0 p+O(p^2),
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

其中 $\lambda_{i1}^0(>0)$，$\lambda_{i2}^0(<0)$为未扰动系统在鞍点 S_{i0}的特征值，β_j 为正数且满足(由引理 3.5)

$$\beta_1\beta_2\sin\theta_1 = 1, \quad \beta_3\beta_4\sin\theta_2 = 1, \tag{5.2}$$

θ_i 为 L 在点 S_{i0}的内角，过点 A_i 做 L 的垂直截线 l_i，与向量

$$n_i = (-g(A_i), f(A_i))/|f(A_i), g(A_i)|$$

同向，又对(3.1)($\varepsilon=0$)用 P_{ij} 表示从 l_i 到 l_j 的 Poincaré 映射，则由引理 3.5 与引理 3.8，类似于(3.45)与(3.47)的推导可得

$$P_{12}(a) = -N_{12}|a|^{r_{10}}(1+o(1)),$$

$$P'_{12} = N_{12}r_{10}|a|^{r_{10}-1}(1+o(1)),$$

$$P_{23}(a) = N_{23}a + O(a^2), \quad P'_{23} = N_{23} + O(a),$$

$$P_{34}(a) = -N_{34}|a|^{r_{20}}(1+o(1)),$$

$$P'_{34} = N_{34}r_{20}|a|^{r_{20}-1}(1+o(1)),$$

$$P_{41}(a) = N_{41}a + O(a^2), \quad P'_{41} = N_{41} + O(a),$$

其中 N_{ij} 为正常数，$r_{i0}=|\lambda_{i2}^0|/\lambda_{i1}^0$，$i=1,2$. 设(3.1)($\varepsilon=0$)过点 $A=A_1+an_1\in l_1$ 的正半轨绕 L 一周后与 l_1 再次交于点 $B=A_1+P_0(a)n_1$，则 $P_0=P_{41}\circ P_{34}\circ P_{23}\circ P_{12}$，于是由以上诸式可得

$$\begin{aligned} P_0(a) &= -N|a|^{r_{10}r_{20}}(1+o(1)), \\ P'_0(a) &= r_{10}r_{20}N|a|^{r_{10}r_{20}-1}(1+o(1)), \end{aligned} \tag{5.3}$$

其中 $N>0$ 为常数. 可证.

定理 5.1 设(3.1)为 C^2 系统，则

(i) 如果 $r_{10}r_{20}>1(<1)$，则 L 为内侧稳定(不稳定)的；

(ii) 如果 $r_{10}r_{20}=1$，则

$$\sigma_1 = \lim_{a\to 0}\int_{AB}(f_x+g_y)\mathrm{d}t$$

存在有限,而且当 $\sigma_1<0(>0)$时,L 为稳定(不稳定)的.特别当 $r_{10}=r_{20}=1$ 时有

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{2}\int_{L_i}(f_x+g_y)\mathrm{d}t \equiv \sigma_{11}+\sigma_{12}. \tag{5.4}$$

证明 由(5.3)即得结论(i). 进一步由(5.3)与引理 3.4,当 $r_{10}r_{20}=1$ 时极限 σ_1 必存在有限,且

$$P'_0(0) = e^{\sigma_1}, \tag{5.5}$$

由此即知,当 $r_{10}r_{20}=1,\sigma_1<0(>0)$时,$L$ 为稳定(不稳定)的. 又与引理 3.10 类似可证,当 $r_{10}=r_{20}=1$ 时,(5.4)成立.证毕.

定理 5.2 设(3.1)为 C^3 系统,又设

$$r_{10}=r_{20}=1,\ \sigma_1=0,\ \sigma_2\equiv R_{11}+\frac{\lambda_{11}^0}{\lambda_{21}^0}R_{12}e^{\sigma_{11}}\neq 0,$$

其中 R_{11},R_{12} 为按(4.2)所得的(3.1)($\varepsilon=0$)在 S_{10},S_{20} 处的一阶鞍点量.

(i) 若 L 为顺时针定向的,则当 $\sigma_2>0(<0)$时,L 为内侧稳定(不稳定)的;

(ii) 若 L 为逆时针定向的,则当 $\sigma_2>0(<0)$时,L 为内侧不稳定(稳定)的.

证明 只证结论(i).利用(5.1),与(3.45)和(3.47)类似可得

$$P_{12}(a)=\frac{\beta_2}{\beta_1}(1+o_p(1))a-\frac{\beta_2 pR_{11}}{\beta_1^2\sin\theta_1}(1+o_p(1))a^2\ln|a|+O(a^2),$$

$$P_{23}(a)=\frac{\beta_1\lambda_{11}^0}{\beta_4|\lambda_{22}^0|}e^{\sigma_{11}}(1+o_p(1))a+O(a^2),$$

$$P_{34}(a)=\frac{\beta_3}{\beta_4}(1+o_p(1))a-\frac{\beta_4 pR_{12}}{\beta_3^2\sin\theta_2}(1+o_p(1))a^2\ln|a|+O(a^2),$$

$$P_{41}(a)=\frac{\beta_3\lambda_{21}^0}{\beta_2|\lambda_{12}^0|}e^{\sigma_{12}}(1+o_p(1))a+O(a^2),$$

因此

$$P_{23}\circ P_{12}=\frac{\beta_2\lambda_{11}^0}{\beta_4|\lambda_{22}^0|}e^{\sigma_{11}}(1+o_p(1))a$$

$$-\frac{\beta_2 p\lambda_{11}^0 R_{11}e^{\sigma_{11}}}{\beta_1\beta_4|\lambda_{22}^0|\sin\theta_1}(1+o_p(1))a^2\ln|a|+O(a^2),$$

$$P_{41}\circ P_{34}=\frac{\beta_4\lambda_{21}^0}{\beta_2|\lambda_{12}^0|}e^{\sigma_{12}}(1+o_p(1))a$$

$$-\frac{\beta_4 p\lambda_{21}^0 R_{12}e^{\sigma_{12}}}{\beta_2\beta_3|\lambda_{12}^0|\sin\theta_2}(1+o_p(1))a^2\ln|a|+O(a^2),$$

从而,

$$P_0(a)=e^{\sigma_1}(1+o_p(1))a-\Big[\frac{pR_{11}e^{\sigma_1}}{\beta_1\sin\theta_1}(1+o_p(1))$$

$$+\frac{\beta_2 p\lambda_{11}^0 R_{12}}{\beta_3\beta_4|\lambda_{22}^0|\sin\theta_2}e^{2\sigma_{11}+\sigma_{12}}(1+o_p(1))\Big]a^2\ln|a|.$$

于是,注意到 $\sigma_1=0$,由(5.4),(5.2)及(5.5)知

$$P_0(a)-a=-p\beta_2 N(p)a^2\ln|a|+O(a^2),$$

其中

$$\lim_{p\to 0}N(p)=R_{11}+\frac{\lambda_{11}^0 R_{12}e^{\sigma_{11}}}{|\lambda_{22}^0|}.$$

由此即得结论(i).证毕.

按照同样的方法,定理 5.1 与定理 5.2 均可推广到含更多个鞍点的异宿环.定理 5.1 的第一个结论是由 Cherkas 于 1968 年获得的,其第二个结论则属于韩茂安、罗定军与朱德明([59])等.定理 5.2 以及定理 4.4 是最近才获得的新结果.当 $r_{10}r_{20}=1,r_{10}\neq 1$ 时也可给出量 σ 的较具体的表达式,但很难用于实际计算,这方面的讨论见文献[26]及文献[95].

5.2 异宿环的扰动分支

首先证明一个引理

引理 5.1 考虑 $C^n(n\geqslant 3)$系统(3.1)及其标准型(3.17),则(3.17)的 Dulac 映射 D 满足

$$D(u_0,\varepsilon,\delta)=p^{1-r}u_0^r[1+\varphi_0(u_0,\varepsilon,\delta)],$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial u_0^2}(u_0,\varepsilon,\delta)=rp^{1-r}u_0^{r-2}[r-1+o(u_0^k)],$$

$$u_0^2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial u_0^2}=o(u_0^k),\ 0<k<\frac{r_0}{1+r_0}.$$

证明 设函数 $v(u,u_0,\varepsilon,\delta)$如引理 3.7 中所给出的,由引理 3.7 的证明知

$$\left(\frac{\partial v}{\partial u_0}\right)_u'=A(u,v)\frac{\partial v}{\partial u_0},\qquad \left.\frac{\partial v}{\partial u_0}\right|_{u=u_0}=\frac{-rp}{u_0}(1+O(u_0)),\tag{5.6}$$

其中

$$A(u,v)=\frac{-r}{u}(1+H+vH_v).$$

由(5.6)进一步可得

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial u_0^2}\right)_u'=\frac{\partial}{\partial u_0}\left(A\frac{\partial v}{\partial u_0}\right)=\frac{\partial A}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial u_0}\right)^2+A\frac{\partial^2 v}{\partial u_0^2},$$

于是可解得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial u_0^2}=e^{\int_{u_0}^u A\mathrm{d}u}\left[\int_{u_0}^u\frac{\partial A}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial u_0}\right)^2 e^{-\int_{u_0}^u A\mathrm{d}u}\mathrm{d}u+\left.\frac{\partial^2 v}{\partial u_0^2}\right|_{u=u_0}\right].\tag{5.7}$$

下面求$\dfrac{\partial^2 v}{\partial u_0^2}\Big|_{u=u_0}$的表达式. 由引理 3.7 的证明知

$$\frac{\partial v}{\partial u}(u_0,u_0,\varepsilon,\delta)+\frac{\partial v}{\partial u_0}(u_0,u_0,\varepsilon,\delta)=0,$$

上式两边对 u_0 求导又得

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial u_0^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial u\partial u_0}+\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\right)(u_0,u_0,\varepsilon,\delta)=0, \tag{5.8}$$

而由(3.26)易知

$$\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\Big|_{u=u_0}=\frac{-r}{u^2}\left[uvH_u+u(1+H+vH_v)\frac{\partial v}{\partial u}-v(1+H)\right]_{u=u_0}$$

$$=\frac{-rp}{u_0^2}(r+1+O(u_0)), \tag{5.9}$$

故由(5.8)、(5.9)与(5.6)得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial u_0^2}\Big|_{u=u_0}=-\left(2\frac{\partial^2 v}{\partial u\partial u_0}+\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\right)\Big|_{u=u_0}$$

$$=\frac{-rp}{u_0^2}(r-1+O(u_0)). \tag{5.10}$$

又易知

$$\int_{u_0}^{u}A\mathrm{d}u=\ln\left(\frac{u_0}{u}\right)^r+\int_{u_0}^{u}\frac{H+vH_v}{u}\mathrm{d}u=\ln\left(\frac{u_0}{u}\right)^r+O(p),$$

$$\exp\int_{u_0}^{p}A\mathrm{d}u=\left(\frac{u_0}{u}\right)^r(1+o(u_0^k)).$$

$$\tag{5.11}$$

由引理 3.7 知

$$\frac{\partial v}{\partial u_0}=-rpu_0^{r-1}u^{-r}(1+O(p)), \tag{5.12}$$

注意到

$$\frac{\partial A}{\partial v}=\frac{-r}{u}(2H_v+vH_v'')=O(1),$$

由(5.11)、(5.12)可知存在常数 $N>0$,使

$$\left|\int_{u_0}^{u}\frac{\partial A}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial u_0}\right)^2\exp\left(-\int_{u_0}^{u}A\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}u\right|\leqslant p^2N\left|\int_{u_0}^{p}u_0^{r-2}u^{-r}\mathrm{d}u\right|$$

$$=Np^2u_0^{r-2}p^{1-r}\omega\left(\frac{u_0}{p},1-r\right),\tag{5.13}$$

从而由(5.7)、(5.10)、(5.11)与(5.13)知

$$\left.\frac{\partial^2 v}{\partial u_0^2}\right|_{u=p}=\left(\frac{u_0}{p}\right)^r(1+O(u_0^k))\left[\frac{-rp}{u_0^2}(r-1+O(u_0+u_0^r\omega))\right]$$

$$=-rp^{1-r}u_0^{r-2}(r-1+O(u_0^k)),$$

由此即得$\frac{\partial^2 D}{\partial u_0^2}$的表达式.另一方面,由引理 3.8 中 D 的表达式,分别求 D 对 u_0 的一、二阶导数,与引理 3.8 类似可得 $u_0^2\dfrac{\partial^2\varphi_0}{\partial u_0^2}=o(u_0^k)$.证毕.

现在讨论异宿分支.设(3.1)在 S_{i0}附近的鞍点为 $S_i(\varepsilon,\delta)$,相应的特征值为 $\lambda_{i1}(\varepsilon,\delta)>0,\lambda_{i2}(\varepsilon,\delta)<0$,令 $r_i(\varepsilon,\delta)=-\lambda_{i2}/\lambda_{i1}$, $i=1,2$,即 r_i 为(3.1)在 S_i 的双曲比.又设(3.1)在 S_1 邻域内的分界线 L_1^s,L_1^u 与 l_1,l_2 的交点为 A_1^s,A_1^u,在 S_2 邻域内的分界线 L_2^s,L_2^u 与 l_3,l_4 的交点为 A_2^s,A_2^u,又定义从 l_i 到l_j 的 Poincaré 映射 $P_{ij}(a',\varepsilon,\delta)$,使得有对应关系

$$P_{12}:A_1^s+an_1\to A_1^u+P_{12}n_2,$$

$$P_{23}:A_1^u+an_2\to A_2^s+P_{23}n_3,$$

$$P_{34}:A_2^s+an_3\to A_2^u+P_{34}n_4,$$

$$P_{41}: A_2^u + an_4 \to A_1^s + P_{41}n_1,$$

则由引理 3.3,3.5,3.8 与 5.1 可知

$$
\begin{aligned}
&P_{12} = -N_{12}|a|^{r_1}(1+\varphi_1), \quad P'_{12} = r_1 N_{12}|a|^{r_1-1}(1+\psi_1),\\
&P_{23} = d_1(\varepsilon,\delta,A_3) + N_{23}a(1+G_1),\\
&P_{34} = -N_{34}|a|^{r_2}(1+\varphi_2), \quad P'_{34} = r_2 N_{34}|a|^{r_2-1}(1+\psi_2),\\
&P_{41} = d_2(\varepsilon,\delta,A_4) + N_{41}a(1+G_2),
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

其中 N_{ij} 为正常数,$G_i = O(a) \in C^2, i=1,2$ 且存在 $k>0$ 使

$$\varphi_i,\ \psi_i,\ a\frac{\partial \varphi_i}{\partial a} = o(|a|^k),\ i=1,2. \tag{5.15}$$

利用(5.14)与(5.15)可证

定理 5.3 设(3.1)至少为 C^3 系统.

(i) 如果$(r_{10}-1)(r_{20}-1)>0$,则存在 $\varepsilon_0>0$,L 的邻域 U,使对 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0,\delta\in D$,(3.1)在 U 中至多有一个环;

(ii) 如果$(r_{10}-1)(r_{20}-1)\leqslant 0$,且 $r_{10}r_{20}\neq 1$,则对 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0,\delta\in D$,(3.1)在 U 中至多有两个环.

证明 由于 $r_{10}r_{20}\neq 1$,为确定计,设 $r_{20}\neq 1$. 令 P_{34}^*, P_{41}^* 分别表示 P_{34} 与 P_{41} 的反函数,由(5.14)与(5.15)知

$$
\begin{aligned}
&P_{34}^*(a,\varepsilon,\delta) = -N_{34}^*|a|^{r_2^*}(1+\varphi_2^*),\\
&(P_{34}^*)' = r_2^* N_{34}^*|a|^{r_2^*-1}(1+\psi_2^*),\\
&P_{41}^*(a,\varepsilon,\delta) = d_2^* + N_{41}^*a(1+G_2^*),\\
&G_2^* = O(a) \in C^2,
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

其中 $r_2^* = \dfrac{1}{r_2}, \varphi_2^*, \psi_2^*, a\dfrac{\partial \psi_2^*}{\partial a} = 0(|a|^k)$,且 N_{34}^*, N_{41}^* 为正常数.

又令

$$F^* = P_{23} \circ P_{12} - P_{34}^* \circ P_{41}^*,$$

则

$$\frac{\partial F^*}{\partial a} = (P_{41}^*)'\left[\frac{(P_{23}'(P_{12})P_{12}'}{(P_{41}^*)'} - (P_{34}^*)'(P_{41}^*)\right] \equiv (P_{41}^*)'[F_1^* - F_2^*].$$

令 $s = (r_2^* - 1)^{-1}$,则由上式知

$$\frac{\partial F^*}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow G \equiv (F_1^*)^s - (F_2^*)^s = 0.$$

由(5.14)~(5.16)知

$$G = N_1 |a|^{(r_1-1)s}(1 + \Psi_1) - N_2 |P_{41}^*| (1 + \Psi_2 \circ P_{41}^*), \tag{5.17}$$

其中 $N_1, N_2 > 0, \Psi_i, a\dfrac{\partial \Psi_i}{\partial a} = o(1), i = 1,2.$

若$(r_{10}-1)(r_{20}-1)>0$,则$(r_1-1)s = r_2(r_1-1)/(1-r_2) < 0$,从而当$|\varepsilon|$与$|a|$均充分小时必有$G>0$,故此时$F^*$关于$a$至多有一个根.

若$(r_{10}-1)(r_{20}-1)<0$,则由(5.17)知

$$G' = -N_1(r_1-1)s|a|^{(r_1-1)s-1}(1+o(1)) + N_2(1+o(1))(P_{41}^*)', \tag{5.18}$$

由于$(r_1-1)s-1 = (r_1r_2-1)/(1-r_2) \neq 0$,故当$r_{10} \neq 1$时,由(5.18)知$G' \neq 0$,从而此时$F^*$关于$a$至多有两个根.当$r_{10}=1$时,有$\mu \equiv (r_1-1)s = O(\varepsilon)$,为证此时$G$至多有一个根,只需证

$$G'|_{G=0} < 0. \tag{5.19}$$

首先由(5.17)知,若a为G的根,则当$\varepsilon \to 0$时必有$|a|^\mu \to 0$,由此知必有$\mu > 0$(因为$|a|<1$),且$0<|a|<e^{-\frac{1}{\mu}}$,从而当$\varepsilon \to 0$时

$$\mu|a|^{\mu-1} > \mu[e^{-\frac{1}{\mu}}]^{\mu-1} = \mu e^{\frac{1}{\mu}-1} \to +\infty,$$

于是由(5.18)知,当$|\varepsilon|$充分小时,(5.19)必成立.证毕.

推论 5.1 设(3.1)为 C^3 系统,$r_{10}r_{20}\neq 1$. 如果分界线 L_1 与 L_2 之一在扰动下总不破裂(即 $d_1(\varepsilon,\delta,A_3)=0$ 或 $d_2(\varepsilon,\delta,A_4)=0$),则当$|\varepsilon|$充分小时,(3.1)在 L 附近至多有一个极限环.

证明 不妨设 $d_2=0$,则 $d_2^*=0$,于是由(5.16)知(5.17)可写为

$$G=|a|[N_1|a|^{(r_1-1)s-1}(1+o(1))-N_2N_{41}^*(1+o(1))],$$

由此知,若 $r_{20}\neq 1$,则当$|a|\neq 0$时,$G\neq 0$. 若 $r_{20}=1$,则 $r_{10}\neq 1$,且由(5.17)易知 $G\neq 0$ 等价于

$$|a|[N_1^{\alpha}(1+o(1))-(N_2N_{41}^*)^{\alpha}|a|^{\alpha-1}(1+o(1))]\neq 0,$$

其中 $\alpha=[(r_1-1)s]^{-1}=(1-r_2)/[r_2(r_1-1)]$,注意到 $\alpha-1=(1-r_1r_2)/[r_2(r_1-1)]$,同理可知,当$|a|\neq 0$时,$G\neq 0$. 证毕.

定理 5.3 的结论(i)首先是由 Reyn([120])对 C^∞ 系统来证明的,而其结论(ii)则是由 Mourtada([113])对 C^∞ 系统得出的.此处的证明只要求 C^3 光滑,而且较为简洁.

下设(3.1)为 C^∞ 系统,且当 $\varepsilon=0$ 时,(3.1)有一 C^1 的首次积分 $I(x,y)$,且当 r_{10} 为有理数时 I 为 C^∞ 的. Han-Zhang([64])证明了下列三个定理(此处证略,详见原文).

定理 5.4 设两点异宿环 L 为逆时针定向的.令

$$M_i(\delta)=\int_{L_i}\exp\left(-\int_0^t(f_x+g_y)\mathrm{d}\tau\right)(fg_0-gf_0)_{\varepsilon=0}\mathrm{d}t,\quad i=1,2,$$

$$M(\delta)=\begin{cases}M_1(\delta)+M_2(\delta), & \text{若 } r_{10}=1,\\ M_1(\delta), & \text{若 } r_{10}>1,\\ M_2(\delta), & \text{若 } r_{10}<1,\end{cases}$$

则

(i) L 产生极限环的必要条件是存在$\delta_0\in D$使$M(\delta_0)=0$;

(ii) 若 $M(\delta_0)=0$,$r^*(\delta_0)\neq 0$,其中 $r^*(\delta)$满足

$$r_1(\varepsilon,\delta)r_2(\varepsilon,\delta) = 1 + \varepsilon r^*(\delta) + O(\varepsilon^2),$$

则存在 $\varepsilon_0>0$, L 的邻域 U 使对 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$, $|\delta-\delta_0|<\varepsilon_0$, (3.1)在 U 中至多有两个极限环.

定理 5.5 设 L 为逆时针定向的,如果(3.1)在分界线 L_1(或 L_2)近旁总有连接 S_1 与 S_2 的分界线,则 L 产生极限环的必要条件是存在 $\delta_0\in D$ 使 $M_2(\delta_0)=0$(或 $M_1(\delta_0)=0$). 如果这一条件成立,且 $r^*(\delta_0)\neq 0$,则存在 $\varepsilon_0>0$,及 L 的邻域 U,使对 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$, $|\delta-\delta_0|<\varepsilon_0$,(3.1)在 U 中至多有一个极限环.

定理 5.6 设 L 为逆时针定向的,又设 $M(\delta_0)=0$, $r^*(\delta_0)\neq 0$. 如果下列五类条件之一成立:

(i) $r_{10}=1$, $M_1(\delta_0)=0$, $r_1^*(\delta_0)r_2^*(\delta_0)>0$;

(ii) $r_{10}=1$, $M_1(\delta_0)<0$, $r_2^*(\delta_0)[r_1^*(\delta_0)+r_2^*(\delta_0)]>0$;

(iii) $r_{10}=1$, $M_1(\delta_0)>0$, $r_1^*(\delta_0)[r_1^*(\delta_0)+r_2^*(\delta_0)]>0$;

(iv) $r_{10}>1$, $M_1(\delta_0)=0$, $M_2(\delta_0)\neq 0$;

(v) $r_{10}<1$, $M_2(\delta_0)=0$, $M_1(\delta_0)\neq 0$,

其中 $r_i^*(\delta)=\dfrac{\partial r_i}{\partial\varepsilon}(0,\delta)$, $i=1,2$,则当 $|\varepsilon|+|\delta-\delta_0|$ 充分小时,L 的环性数为 1. 如果这五类条件都不成立,则 L 的环性数为 2.

Han-Zhang([64])还给出了(3.1)在 L 附近出现左、右同宿环,上下鞍点连线(异宿轨)及半稳定环的附加条件.

若当 $\varepsilon=0$ 时,(3.1)为 C^∞ 可积系统,且有一含三个鞍点的异宿环 $L=L_1\cup L_2\cup L_3$,设 $M_i(\delta)$ 同前,$r_i(\varepsilon,\delta)$ $(i=1,2,3)$ 为(3.1)在其鞍点处的双曲比,则可设

$$r_1(\varepsilon,\delta)r_2(\varepsilon,\delta)r_3(\varepsilon,\delta) = 1 + \varepsilon r^*(\delta) + O(\varepsilon^2).$$

Han-Jiang([55])证明了下述定理(详略).

定理 5.7 设三点异宿环 L 中的两条鞍点连线 L_1 与 L_2 在扰动下不破裂,则

(i) L 产生极限环的条件是存在 $\delta_0\in D$,使 $M_3(\delta_0)=0$;

(ii) 设 $M_3(\delta_0)=0, r^*(\delta_0)\neq 0$，则存在 $\varepsilon_0>0$，L 的邻域 U，使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0, |\delta-\delta_0|<\varepsilon_0$ 时，(3.1)在 U 中至多有一个极限环.

例 5.1 考虑二次系统

$$\dot{x} = \sum_{i+j\leqslant 2} a_{ij}x^i y^j = P, \quad \dot{y} = \sum_{i+j\leqslant 2} b_{ij}x^i y^j = Q, \qquad (5.20)$$

易知该系统以 $x=0$ 与 $y^2=1-x$ 为不变曲线的充要条件是

$$P = xP_1, \ (2yQ + xP_1)|_{x=1-y^2} = 0,$$

由此知(5.20)必具有下述形式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x[a(1-x) - 2(b+c)y], \\ \dot{y} &= b(1-y^2) + cx - \frac{1}{2}axy. \end{aligned} \qquad (5.21)$$

进一步可知(5.21)以

$$L: x(y^2 + x - 1) = 0, \ x \geqslant 0, y^2 \leqslant 1,$$

为两点异宿环当且仅当

$$b \neq 0, \ b + c \neq 0, \ b(a + 2(b+c)) < 0, \ b(a - 2(b+c)) > 0,$$

这些条件等价于

$$b \neq 0, \ b(b+c) < 0, |a| < 2|b+c|. \qquad (5.22)$$

事实上，易求出(5.21)右端函数的 Jacobi 矩阵在奇点(0,1)与(0, −1)的值分别为

$$\begin{pmatrix} a - 2(b+c) & 0 \\ c - \frac{1}{2}a & -2b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a + 2(b+c) & 0 \\ c + \frac{1}{2}a & 2b \end{pmatrix}.$$

在条件(5.22)下易知，奇点(0, ±1)为(5.21)的双曲鞍点，且在 L 上无其他奇点. 以下为确定计，设 $b>0$，则对(5.21)有

$$r_{10}=\frac{2b}{a-2(b+c)},r_{20}=\frac{a+2(b+c)}{-2b},$$

从而

$$r_{10}r_{20}=\frac{2(b+c)+a}{2(b+c)-a},$$

$$(r_{10}-1)(r_{20}-1)=\frac{a^2-4(2b+c)^2}{2b[a-2(b+c)]}.$$

于是由定理 5.3 知,如果 $2|2b+c|<|a|<2|b+c|$,则(5.21)在任何 C^3 扰动下异宿环 L 至多产生一个极限环;如果 $0<|a|\leqslant 2|2b+c|$,则 L 至多产生两个极限环. 当 $a=0$ 时,(5.21)的轨线关于 x 轴对称,故此时 L 为非孤立的,其内部的轨线都是闭的.

对一般二次系统(5.20)来说,若有一两点异宿环,则由鞍点的性质易知,连接异宿环上两鞍点的线段上必有一(常)点使(5.20)过该点的轨线与该线段相切,但由于(5.20)是二次系统,其位于任一直线上的奇点和轨线切点的总个数至多是 2,因此,上述两点异宿环中必有一条异宿轨位于连接两鞍点的直线上. 又不失一般性,可设直线由 $x=0$ 给出,又不妨设两鞍点是$(0,\pm 1)$,于是按照讨论(5.21)的方法不难证明下述定理(deJager P.).

定理 5.8 任一二次系统(5.20)的孤立(两点)异宿环,在任意多项式扰动下至多产生两个极限环.

例 5.2 考虑形如(4.3)的系统,其中 $H=x(y^2+x-1)$,则(4.3)有异宿环 $L:x(y^2+x-1)=0,x\geqslant 0,|y|\leqslant 1$. 利用定理 5.1(ii)与定理 5.2 可证:当 $a\leqslant\frac{2}{5}\left(>\frac{2}{5}\right)$时,$L$ 是稳定(不稳定)的,且当$\frac{2}{5}<a<\frac{1}{2}$时,$L$ 内有一稳定极限环. 请读者自行给出证明.

§6 两类双参数扰动系统

本节讨论在研究三维与四维系统余维 2 分支中所出现的两类

含双参数的多项式系统的极限环，首先给出判别两类 Melnikov 函数单调性的两个定理.

6.1 两类 Melnikov 函数单调性

设有函数

$$H(x,y)=\Phi(x)+\Psi(y), \tag{6.1}$$

其中 $\Phi\in C^2([\alpha,A])$，$\Psi\in C^2([\beta,B])$，又设对 $h\in(h_1,h_2)$，方程 $H=h$ 定义了闭曲线 L_h. 考虑函数

$$u(h)=I_2(h)/I_1(h),$$

其中

$$I_k(h)=\oint_{L_h} f_k(x)g(y)\mathrm{d}x,$$

$$f_k\in C^1(\alpha,A),k=1,2,g\in C^2(\beta,B).$$

关于 u 的单调性，Li-Zhang([91])证明了下述两定理(此处证略).

定理 6.1 设(6.1)成立. 如果

(i) 存在 $a\in(\alpha,A)$，$b\in(\beta,B)$使

$$\Phi'(x)(x-a)>0(<0),\quad x\in(\alpha,A),x\neq a;$$

$$\Psi'(x)(y-b)>0(<0),\quad y\in(\beta,B),y\neq b;$$

(ii) 对由方程 $\Phi(x)=\Phi(\tilde{x})$，$\Psi(y)=\Psi(\tilde{y})$，确定的函数 $\tilde{x}>x$，$\tilde{y}>y$，有

$$f_1(x)f_1(\tilde{x})>0,x\in(\alpha,a),\ g_1(x)g_1(\tilde{x})>0,y\in(\beta,b);$$

(iii) $\xi'(x)\eta'(y)>0(<0)$，其中

$$\xi(x)=\frac{f_2(x)\Phi'(\tilde{x})-f_2(\tilde{x})\Phi'(x)}{f_1(x)\Phi'(\tilde{x})-f_1(\tilde{x})\Phi'(x)},\ x\in(\alpha,a),$$

$$\eta(y)=\frac{[g(\tilde{y})-g(y)]\Psi'(\tilde{y})\Psi'(y)}{g'(\tilde{y})\Psi'(y)-g'(y)\Psi'(\tilde{y})},\quad y\in(\beta,b),$$

则必有 $u'(h)>0(<0)$.

再设 H 具有下述形式

$$H(x,y)=\varphi(x)y^2+\Phi(x), \tag{6.2}$$

其中 $\varphi,\Phi\in C^1$,且 $\varphi(x)$定号,例如可设 $\varphi(x)>0$. 令

$$\omega(h)=\oint_{L_h}f_2(x)y\mathrm{d}x\Big/\oint_{L_h}f_1(x)y\mathrm{d}x,$$

其中 f_1 与 f_2 为连续函数,L_h 同前,则与定理 6.1 类似可证下列结果.

定理 6.2 设(6.2)成立.又设

(i) 存在 $a\in(\alpha,A)$,使 $\Phi'(x)(x-a)>0(<0)$, $x\in(\alpha,A)$,$x\neq a$;

(ii) $f_1(x)f_1(\tilde{x})>0$,$x\in(\alpha,a)$,其中 $\tilde{x}>x$ 满足 $\Phi(x)=\Phi(\tilde{x})$;

(iii) $\theta'(x)>0(<0)$,其中

$$\theta(x)=\frac{f_2(x)\sqrt{\varphi(\tilde{x})}\Phi'(\tilde{x})-f_2(\tilde{x})\sqrt{\varphi(x)}\Phi'(x)}{f_1(x)\sqrt{\varphi(\tilde{x})}\Phi'(\tilde{x})-f_1(\tilde{x})\sqrt{\varphi(x)}\Phi'(x)},$$

$$x\in(\alpha,a),$$

则有 $\omega'(h)<0(>0)$.

6.2 一类具有两点异宿环的多项式系统

在讨论三维系统具余维 2 奇点的开折时得到下述多项式系统(见[65]与[106]).

$$\begin{aligned}\dot{p}&=pv+\varepsilon p[a_2p^2+f_2(v)],\\ \dot{v}&=c_1p^2+d_1(v^2-1)\\ &\quad+\varepsilon[g_1(v)p^2+g_3(v)+O(\varepsilon)],\end{aligned} \tag{6.3}$$

其中 $p\geqslant0,c_1<0,d_1<0,\varepsilon\geqslant0,\delta_1=\pm1$,且

$$f_2(v) = (a_3 - b_1)v^2 + (b_1 - 2a_3)\delta_1 v + a_3,$$

$$g_1(v) = (c_2 - c_1 b)(v - \delta_1),$$

$$g_3(v) = (d_2 - d_1 b_1)v^3 + \delta_1(d_1 b_1 - 3d_2)v^2$$
$$+ (\delta + 3d_2 + d_1 b_1)v - \delta_1(\delta + d_2 + d_1 b_1).$$

当 $\varepsilon = 0$ 时,(6.3)为二次可积系统,具有闭轨族,包围中心奇点 $(\sqrt{d_1/c_1}, 0)$,而其外边界为一两点异宿环 L. 在(6.3)中取 ε 与 δ 为变动参数,且 $\varepsilon \geqslant 0$ 充分小,可证

定理 6.3 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 及连续可微函数 $\delta_0^*(\varepsilon) = \delta_0 + O(\varepsilon)$ (Hopf 分支曲线)与 $\delta_1^*(\varepsilon) = \delta_1 + O(\varepsilon)$(异宿分支曲线),其中

$$\delta_0 = 2d_1 a_3 - 3d_2 - \frac{d_1 c_2}{c_1} - \frac{2d_1 a_2}{c_1}(1 - d_1),$$

$$\delta_1 = \frac{2}{3 - 2d_1}\Big[2d_1(2 - d_1)a_3 - 3(2 - d_1)d_2$$
$$- d_1(1 - d_1)\frac{c_1}{c_2} - \frac{2d_1 a_2}{c_1}(1 - d_1)^2\Big],$$

使当

$$\Delta_0 = \frac{1}{8}\Big[3d_2 - \frac{2d_1 a_2}{c_1}(1 - d_1) - \frac{d_1 c_2}{c_1} - 2d_1 a_3\Big] \neq 0$$

时(6.3)对 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ 存在极限环当且仅当 $\Delta_0 \delta_1^*(\varepsilon) < \Delta_0 \delta < \Delta_0 \delta_0^*(\varepsilon)$,且极限环是惟一的.

证明 不妨设 $c_1 = d_1$(否则将 p 换为 $p\sqrt{d_1/c_1}$ 即可),又注意到量 δ_0, δ_1 与 Δ_0 均与 b_1 无关,因此为了方便可取 $b_1 = 0$. 先讨论Hopf 分支. 当 $\varepsilon > 0$ 充分小时(6.3)在(1,0)附近有焦点 $A_\varepsilon(p(\varepsilon), v(\varepsilon))$,易知

$$p(0) = 1,\ v(0) = 0,\ v'(0) = -a_3 - a_2.$$

令 $x=p-p(\varepsilon), y=v-v(\varepsilon)$,从(6.3)可得

$$\dot{x} = ax + by + f(x,y,\varepsilon),$$
$$\dot{y} = cx + dy + g(x,y,\varepsilon), \tag{6.4}$$

其中

$$a = 2a_2\varepsilon + O(\varepsilon^2), b = 1 + \varepsilon(p'(0) - 2a_3\delta_1) + O(\varepsilon^2),$$

$$c = 2c_1 + 2\varepsilon(c_1 p'(0) - c_2\delta_1) + O(\varepsilon^2),$$

$$d = \varepsilon(\delta + 3d_2 + c_2 - 2c_1a_3 - 2a_2c_1) + O(\varepsilon^3),$$

且

$$f = 3a_2\varepsilon x^2 + (1 - 2\varepsilon a_3\delta_1)xy + \varepsilon a_3 y^2$$
$$+ \varepsilon a_2 x^3 + \varepsilon a_3 xy^2 + O(\varepsilon^2 |x,y|^2),$$

$$g = (c_1 - \varepsilon c_2\delta_1)x^2 + 2\varepsilon c_2 xy$$
$$+ (c_1 - 3\varepsilon d_2\delta_1)y^2 + \varepsilon d_2 y^3 + O(\varepsilon^2|x,y|^2).$$

方程(6.4)的线性部分的矩阵的特征值有实部

$$\alpha(\varepsilon,\delta) = \frac{1}{2}(a + d)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}[\delta + 3d_2 + c_2 + 2(1 - c_1)a_2 - 2c_1a_3] + O(\varepsilon^2),$$

于是存在函数 $\delta_0^*(\varepsilon)=\delta_0+O(\varepsilon)$,使 $\alpha(\varepsilon,\delta)=0$ 当且仅当 $\delta=\delta_0^*$,其中

$$\delta_0 = 2c_1a_3 - 3d_2 - c_2 - 2a_2(1 - c_1).$$

现设 $a+d=0$,且设 $x=(\omega u+av)/c, y=v, \omega=\sqrt{-a^2-bc}$,则(6.4)成为

$$\dot{u} = -\omega v + F(u,v), \dot{v} = \omega u + G(u,v),$$

其中 $F=[cf(x,y,\varepsilon)-ag(x,y,\varepsilon)]/\omega, G=g(x,y,\varepsilon)$. 利用本章引理 1.2 易求得上述方程的一阶焦点量为

$$\frac{\varepsilon}{8}[3d_2-2a_2(1-c_1)-c_2-2c_1a_3]+O(\varepsilon^2)\equiv\varepsilon\Delta_0+O(\varepsilon^2),$$

因此由定理 1.2 知,当 ε 与 $|\delta-\delta_0|$ 充分小时,(6.3)在 A_ε 附近有(惟一)极限环当且仅当 $\Delta_0(\delta-\delta_0^*(\varepsilon))<0$.

其次讨论 Poincaré 分支. 令 $u=p^{-2d_1}$,由(6.3)得

$$\begin{aligned}\dot{u}&=-2d_1uv-2\varepsilon d_1u[a_2u^k+f_2(v)],\\ \dot{v}&=c_1u^k+d_1(v^2-1)+\varepsilon[g_1(v)u^k+g_3(v)+O(\varepsilon)],\end{aligned}\tag{6.5}$$

其中 $u\geqslant0, k=-d_1^{-1}>0$. 当 $\varepsilon=0$ 时,(6.5)有 Hamilton 函数

$$H(u,v)=-d_1u\left(1-v^2+\frac{c_1}{1-d_1}u^k\right).$$

注意到 $c_1=d_1$,可知 $H(u,v)=h$ 定义了闭轨族 $L_h:0<h<h_0\equiv\frac{c_1}{c_1-1}$,因此(6.5)有下列一阶 Melnikov 函数

$$M(h,\delta)=\oint_{L_h}(g_1(v)u^k+g_3(v))\mathrm{d}u+2c_1u(a_2u^k+f_2(v))\mathrm{d}v,$$

由于沿 L_h 成立

$$v^2=1+\frac{c_1}{1-c_1}u^k+\frac{h}{c_1u},$$

且由 Green 公式及分部积分知

$$\oint_{L_h}v^3\mathrm{d}u=-3\oint_{L_h}v^2u\mathrm{d}v,$$

$$\oint_{L_h}v^2u\mathrm{d}v=\oint_{L_h}u\mathrm{d}v+\frac{c_1}{1-c_1}\oint_{L_h}u^{k+1}\mathrm{d}v$$

$$= -\oint_{L_h} v\mathrm{d}u - \frac{c_1(1+k)}{1-c_1}\oint_{L_h} u^k v\mathrm{d}u,$$

因此易推得

$$M(h,\delta) = P_0(h)[\delta + 6d_2 - 4c_1a_3 - 8\Delta_0 P(h)], \quad (6.6)$$

其中

$$P_0(h) = \oint_{L_h} v\mathrm{d}u,\ P_1(h) = \oint_{L_h} vu^k\mathrm{d}u,\ P(h) = P_1(h)/P_0(h).$$

于是

$$\left.\frac{\partial M}{\partial h}\right|_{M=0} = -8\Delta_0 P_0(h)P'(h).$$

令 $Q(h)=P(-h)$,注意到 L_{-h} 满足 $-H(u,v)=h$,且

$$-H = -c_1uv^2 + c_1u\left(1+\frac{c_1}{1-c_1}u^k\right) \equiv \varphi(x)v^2 + \Phi(u),$$

令 $0<u<1<\tilde{u}$,且 $\Phi(u)=\Phi(\tilde{u})$,则有

$$\theta(u) = \frac{u^k\tilde{u}^{\frac{1}{2}}(1-\tilde{u}^k) - \tilde{u}^k u^{\frac{1}{2}}(1-u^k)}{\tilde{u}^{\frac{1}{2}}(1-\tilde{u}^k) - u^{\frac{1}{2}}(1-u^k)},$$

因为$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}u}<0$,易证 $\theta'(u)>0$,从而由定理 6.2 知 $Q'(h)<0$,故 $P'(h)>0,0<h<h_0$.因此由定理 2.1 知,当 ε 充分小时,(6.3)在每个闭轨附近都至多有一个极限环.

再讨论异宿分支.设 $u_1>0$ 满足 $1+\frac{c_1}{1-c_1}u_1^k=0$,由分部积分可得

$$\oint_{L_0} vu^k\mathrm{d}u = 2\int_0^{u_1} u\left(1+\frac{c_1}{1-c_1}u^k\right)^{\frac{1}{2}} u^{k-1}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{4(1-c_1)}{3kc_1}\int_0^{u_1} u\,\mathrm{d}\left(1+\frac{c_1}{1-c_1}u^k\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{4(1-c_1)}{3}\int_0^{u_1}\left(1+\frac{c_1}{1-c_1}u^k\right)v\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{2(1-c_1)}{3}\oint_{L_0} v\,\mathrm{d}u + \frac{2c_1}{3}\oint_{L_0} vu^k\,\mathrm{d}u,$$

由此得

$$\oint_{L_0} vu^k\,\mathrm{d}u = \frac{2(1-c_1)}{3-2c_1}\oint_{L_0} v\,\mathrm{d}u, \tag{6.7}$$

将上式代入(6.6)可得

$$M(0,\delta) = [\delta - \delta_1]P_0(0), \quad P_0(0) > 0.$$

注意到 $u=0$ 总为(6.5)的不变直线,且引理 3.3 对异宿轨线仍类似成立,可知(6.5)存在异宿分支曲线 $\delta=\delta_1^*(\varepsilon)=\delta_1+O(\varepsilon)$. 此外,直接对(6.3)易检验 $\Delta_0\neq 0 \Leftrightarrow r^*(\delta_1)\neq 0$(请读者自证),从而应用定理 5.5 知当 ε 与 $|\delta-\delta_1|$ 充分小时,(6.3)在两点异宿环 L_0 附近至多有一个极限环. 进一步,当 $\delta=\delta_1^*(\varepsilon)$ 时,异宿环的稳定性由 $r^*(\delta_1)$ 的符号决定(正时稳定,负时不稳定),再让 $0<|\delta-\delta_1^*|\ll 1$,使异宿环破裂,可知当且仅当 $\Delta_0(\delta-\delta_1^*(\varepsilon))>0$ 时,(6.3)在 L_0 附近有惟一极限环. 现在可以用完全类似于定理 2.2 的反证法来完成定理的证明. 证毕.

6.3　一类具有三点异宿环的多项式系统

考虑四维系统

$$\dot{z} = C(\lambda)z + F(z), z \in R^4, \tag{6.8}$$

其中 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in R^2$, $F(z)=O(|z|^2)\in C^\infty$(当 $|z|$ 充分小时)且

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} J + \lambda_1 I & 0 \\ 0 & \omega J + \lambda_2 I \end{pmatrix}, \ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \omega > 0.$$

由[29],[82]或[65]知,如果对满足 $1 \leqslant |n| + |m| \leqslant 6$ 的整数 m, n 恒有 $n + m\omega \neq 0$,则(6.8)有下列标准型

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (J + \lambda_1 I)x + A_2 x|x|^2 + A_3 x|y|^2 + A_4 x|x|^4 \\ &\quad + A_5 x|x|^2|y|^2 + A_6 x|y|^4 + O(|x,y|^6), \\ \dot{y} &= (\omega J + \lambda_2 I)y + B_2 y|y|^2 + B_3 y|x|^2 + B_4 y|y|^4 \\ &\quad + B_5 y|x|^2|y|^2 + B_6 y|x|^4 + O(|x,y|^6), \end{aligned}$$

其中 $x, y \in R^2$, $A_i = a_i I + b_i J$, $B_i = c_i I + d_i J$, $i = 2, \cdots, 6$,对上述方程引入变换

$$x = \sqrt{r_1}(\cos\theta_1, -\sin\theta_1), \quad y = \sqrt{r_2}(\cos\theta_2, -\sin\theta_2),$$

并做尺度变换

$$r_i \to \varepsilon r_i, \ \lambda_i = \varepsilon\lambda_i, \ \varepsilon > 0, i = 1,2, \delta_1 = \pm 1,$$

则所得关于(r_1, r_2)的方程具有下述去尾标准型

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= r_1[\delta_1 + a_2 r_1 + a_3 r_2 + \varepsilon(a_4 r_1^2 + a_5 r_1 r_2 + a_6 r_2^2)], \\ \dot{r}_2 &= r_2[\delta_2 + c_2 r_2 + c_3 r_1 + \varepsilon(c_4 r_2^2 + c_5 r_1 r_2 + c_6 r_1^2)]. \end{aligned}$$

现设 $a_2 c_2 \neq 0$,且进一步作尺度变换

$$r_1 \to r_1/|a_2|, r_2 \to r_2/|c_2|,$$

$$t \to (\mathrm{sgn} a_2)t, \delta_2 = \delta_{20} + \varepsilon\delta \,\mathrm{sgn} a_2,$$

又可得下述形式的方程

$$
\begin{aligned}
\dot{r}_1 &= r_1[\mu_1 + r_1 + br_2 + \varepsilon(er_1^2 + fr_1r_2 + gr_2^2)], \\
\dot{r}_2 &= r_2[\mu_2 + cr_1 + dr_2 + \varepsilon(\delta + kr_1^2 + jr_1r_2 + hr_2^2)],
\end{aligned} \tag{6.9}
$$

其中 $\mu_1 = \pm 1, d = \pm 1, \mu_2 = \delta_{20}\operatorname{sgn} a_2$. 易知,若设 $A = d - bc \neq 0$, $(b-d)(1-c) \neq 0$,则当 $\varepsilon = 0$ 时,(6.9)在 $r_1 > 0, r_2 > 0$ 中有惟一奇点

$$
(r_1^0, r_2^0) = \left(\frac{1}{A}(b\mu_2 - d\mu_1), \frac{1}{A}(c\mu_1 - \mu_2)\right),
$$

且(6.9)在该奇点的 Jacobi 矩阵为

$$
\begin{pmatrix} \mu_1 + 2r_1^0 + br_2^0 & br_1^0 \\ cr_2^0 & \mu_2 + cr_1^0 + 2dr_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1^0 & br_1^0 \\ cr_2^0 & dr_2^0 \end{pmatrix}.
$$

注意到 $r_1^0 r_2^0 > 0$,可知该奇点成为中心奇点当且仅当

$$
(b - d)\mu_2 = d(1 - c)\mu_1, \quad A > 0, \quad d < 0,
$$

于是为讨论极限环的存在性可设

$$
d = -1, A = -1 - bc > 0, \ \mu_2 = \frac{1 - c}{b + 1}\mu_1,
$$

$$
(b + 1)(1 - c) \neq 0. \tag{6.10}
$$

在(6.10)下我们有下列四种情况:(1)$c > 1, b + 1 < 0, \mu_1 = 1$;(2)$c > 1, b + 1 > 0, \mu_1 = -1$;(3)$c < 1, b + 1 < 0, \mu_1 = 1$;(4)$c < 1$, $b + 1 > 0, \mu_1 = -1$. 在这些情况下,方程(6.9)($\varepsilon = 0$)的相图如图 6.1 所示.

我们看到,只有在第四种情况才出现异宿环. 以下我们就只讨论这种情况. 先证(6.9)可进一步化简为 C^∞ 系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= x[-1 + x + b^* y + \varepsilon g^* y^2 + O(\varepsilon^2)], \\
\dot{y} &= y[B^* + c^* x - y + \varepsilon(\delta^* + k^* x^2) + O(\varepsilon^2)],
\end{aligned} \tag{6.11}
$$

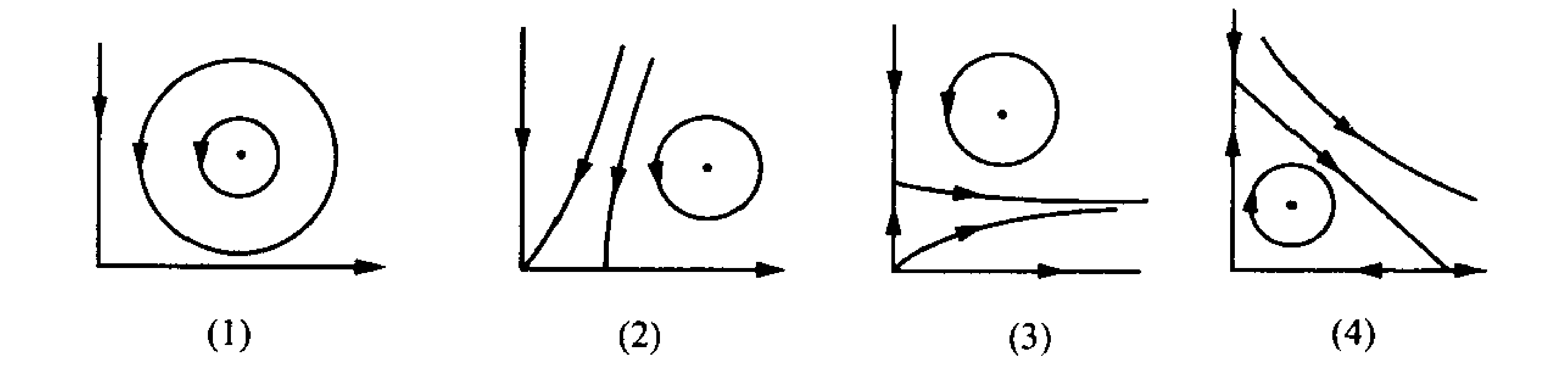


图 6.1 (6.9)($\varepsilon=0$)之相图

其中

$$b^* = b + O(\varepsilon), c^* = c + O(\varepsilon),$$

$$k^* = k + c(-2e + (f+h)/b) + O(\varepsilon),$$

$$g^* = g + b(2h + (j+e)/c) + O(\varepsilon), B^* = \frac{1-c^*}{1+b^*},$$

事实上,对(6.9)做变换

$$u = r_1 + \varepsilon K_1 r_1^2,\ v = r_2 + \varepsilon K_2 r_2^2,$$

$$dt = (1 + \varepsilon E_1 r_1 + \varepsilon E_2 r_2)d\tau,$$

其中

$$e + E_1 = 0,\ f + E_2 + bE_1 + bK_1 = 0,$$

$$h - E_2 = 0, j - E_1 + cE_2 + cK_2 = 0,$$

可得下述 C^∞ 系统

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = u[-1 + \bar{a}u + \bar{b}v + \varepsilon\bar{g}v^2 + O(\varepsilon^2)],$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = v[B + \bar{c}u + \bar{d}v + \varepsilon(\delta + \bar{k}u^2) + O(\varepsilon^2)],$$

其中

$$\bar{a} = 1 + \varepsilon(f+h)/b,\ \bar{b} = b - \varepsilon h,$$

$$\bar{c} = c - \varepsilon e, \bar{d} = -1 - \varepsilon B(j + e)/c,$$

$$\bar{g} = g + b(2k + (j + e)/c),$$

$$\bar{k} = k + c(-2e + (f + h)/b),$$

再令 $x = \bar{a}u, y = -\bar{d}v$ 即得(6.11).

令 $A^* = -1 - b^* c^*$,则当 $\varepsilon > 0$ 充分小时,$A^* > 0$ 且(6.10)在第一象限的奇点 $P_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ 可表示为

$$x_\varepsilon = \frac{1}{1 + b^*} + x_1\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad y_\varepsilon = \frac{1}{1 + b^*} + y_1\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

其中

$$x_1 = \frac{1}{A^*}\left[b^*\delta^* + \frac{1}{(1 + b^*)^2}(g^* + b^* k^*)\right],$$

$$y_1 = \frac{1}{A^*}\left[-\delta^* + \frac{1}{(1 + b^*)^2}(c^* g^* - k^*)\right].$$

通过求(6.11)在点 P_ε 的发散量可得 Hopf 分支曲线 $\delta^* = \delta_0^*(\varepsilon) = \delta_0 + O(\varepsilon)$,其中

$$\delta_0 = -\frac{1}{(1 + b^*)^3}[(1 - c^*)g^* + (1 + b^*)k^*]_{\varepsilon = 0}.$$

进一步利用定理 1.2 可证(请读者完成),如果

$$\Delta_1 \equiv [b^*(1 + b^*)k^* + c^*(c^* - 1)g^*]_{\varepsilon = 0} \neq 0, \qquad (6.12)$$

则当 $\varepsilon > 0$ 与 $|\delta - \delta_0|$ 均充分小时,(6.11)在 P_ε 附近至多有一个极限环,且极限环存在当且仅当 $\Delta_1(\delta^* - \delta_0^*(\varepsilon)) > 0$.

为讨论异宿分支,令 $u = x^\alpha, v = y^\beta$,其中 $\alpha = (1 - c^*)/A^*, \beta = (1 + b^*)/A^*$,则(6.11)成为

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \alpha u[-1 + u^n + b^* v^m + \varepsilon g^* v^{2m} + O(\varepsilon^2)], \\ \dot{v} &= \beta v[B^* + c^* u^n - v^m + \varepsilon(\delta^* + k u^{2n}) + O(\varepsilon^2)], \end{aligned} \qquad (6.13)$$

其中 $n=\dfrac{1}{\alpha}, m=\dfrac{1}{\beta}$. 当 $\varepsilon=0$ 时,(6.13)为 Hamilton 系统,且有 Hamilton 函数

$$H(u,v)=B^* uv\left[-1+u^n+\frac{1}{B^*}v^m\right],$$

并且闭轨族为

$$L_h: H(u,v)=h, \quad h_0\equiv -A^*(b^*+c^*)^{-2(\alpha+\beta)}<h<0,$$

我们暂时可认为 b^* 与 c^* 无关于 ε, 于是(6.12)的一阶 Melnikov 函数为

$$M(h,\delta^*)=I_1(h)[\delta^*-P(h)], \tag{6.14}$$

其中

$$P(h)=I_2(h)/I_1(h), \quad I_1(h)=\oint_{L_h}\beta v\mathrm{d}u>0,$$

$$I_2(h)=\oint_{L_h}[\beta k^* vu^{2n}\mathrm{d}u-\alpha g^* uv^{2m}\mathrm{d}v].$$

沿 L_0 在第一象限的部分有 $v^m=B^*(1-u^n)$, 故由分部积分知

$$\oint_{L_0}uv^{2m}\mathrm{d}v=-\frac{1}{2m+1}\oint_{L_0}v^{2m+1}\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{(B^*)^2}{2m+1}\oint_{L_0}v(1-2u^n+u^{2n})\mathrm{d}u,$$

于是

$$I_2(0)=\frac{\alpha g^*(B^*)^2}{2m+1}\left[\oint_{L_0}v\mathrm{d}u-2\oint_{L_0}vu^n\mathrm{d}u\right]$$

$$+\left[\beta k^*+\frac{\alpha g^*(B^*)^2}{2m+1}\right]\oint_{L_0}vu^{2n}\mathrm{d}u.$$

与(6.7)类似可得

$$\oint_{L_0} vu^n \mathrm{d}u = \frac{\alpha}{1+\alpha+\beta}\oint_{L_0} v\mathrm{d}u,$$

$$\oint_{L_0} vu^{2n} \mathrm{d}u = \frac{1+\alpha}{(1+\alpha+\beta)(2+\alpha+\beta)}\oint_{L_0} v\mathrm{d}u,$$

于是由(6.14)可得

$$M(0,\delta^*) = \beta(\delta^* - \delta'_1)\oint_{L_0} v\mathrm{d}u,$$

其中

$$\delta'_1 = -\frac{(B^*)^2 b^*(1-c^*)g^* - c^*(1+b^*)k^*}{(1+b^*)(b^*-c^*-2b^*c^*)}. \quad (6.15)$$

由(6.12)易知

$$\Delta_1 = -\frac{(1+b^*)^3}{A^*}(\delta_1 - \delta_0)|_{\varepsilon=0}, \quad \delta_1 = \delta'_1|_{\varepsilon=0}.$$

不难求得(6.11)的三个鞍点为 $S_1=0$(原点), $S_2=(1+O(\varepsilon^2),0)$, $S_3=(0,B^*+\varepsilon\delta^*+O(\varepsilon^2))$,而(6.11)在这些点处的特征值分别为

$$S_1:\lambda_{11} = -1+O(\varepsilon^2),$$

$$\lambda_{12} = B^*+\varepsilon\delta^*+O(\varepsilon^2),$$

$$S_2:\lambda_{21} = B^*+c^*+\varepsilon(\delta^*+k^*)+O(\varepsilon^2),$$

$$\lambda_{22} = 1+O(\varepsilon^2),$$

$$S_3:\lambda_{31} = -B^*-\varepsilon\delta^*+O(\varepsilon^2),$$

$$\lambda_{32} = B^*b^*-1+\varepsilon(g^*(B^*)^2+b^*\delta^*)+O(\varepsilon^2),$$

于是

$$r \equiv r_1 r_2 r_3 = \frac{B^* + c^*}{1 - B^* b^*}\left[1 + \left(\frac{\delta^* + k^*}{B^* + c^*} + \frac{g^*(B^*)^2 + b^*\delta^*}{1 - B^* b^*}\right)\varepsilon + O(\varepsilon^2)\right].$$

由于

$$B^* + c^* = (1 + b^* c^*)/(1 + b^*) = 1 - B^* b^*,$$

故

$$\left.\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{1 + b^*}{1 + b^* c^*}[k^* + g^*(B^*)^2 + (1 + b^*)\delta^*]|_{\varepsilon=0},$$

将(6.15)代入上式可得

$$r|_{\delta^* = \delta_1} = 1 + \frac{(1 - c^*)(1 + b^*)^3 \Delta_1 \varepsilon}{(1 + b^* c^*)^2 (b^* - c^* - 2b^* c^*)} + O(\varepsilon^2).$$

从而由定理5.7知，当 ε 与 $|\delta^* - \delta_1|$ 充分小时，(6.11)在三点异宿环 L_0 附近至多有一个极限环，且存在函数 $\delta_1^*(\varepsilon) = \delta_1 + O(\varepsilon)$，使当且仅当 $\Delta_1(\delta - \delta_1^*(\varepsilon)) < 0$ 时极限环存在.

至于 Poincaré 分支，Zoladek([163])曾在一非退化条件下证明了函数 $P(h)$ 在区间 $(h_0, 0)$ 上有非零导数(由于证明非常繁琐，这里就不再给出)，由于已设(6.10)成立，因此对(6.11)来说这一非退化条件应等价于 $\Delta_1 \neq 0$，这样我们获得下列定理.

定理 6.4 设(6.10)与(6.12)成立，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，函数 $\delta_0^*(\varepsilon) = \delta_0 + O(\varepsilon)$(Hopf 分支)与 $\delta_1^*(\varepsilon) = \delta_1 + O(\varepsilon)$(异宿分支)使对 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 及有界的 δ^*，方程(6.11)有极限环当且仅当 $\Delta_1 \delta_0^*(\varepsilon) < \Delta_1 \delta^* < \Delta_1 \delta_1^*(\varepsilon)$，且极限环是惟一的.

我们指出，定理 6.3 与 6.4 有一个共同点，即在同一个非退化条件下(对(6.3)这一条件是 $\Delta_0 \neq 0$，而对(6.11)这一条件是 $\Delta_1 \neq 0$)，所述方程在 Hopf 分支，Poincaré 分支与异宿分支这三种不同的分支中极限环都不会多于一个，这说明三种分支之间有密切的

关系. 然而，这种现象并不具一般性. 为说明这一点，Han-Jiang ([53])给出了下述例子.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + \varepsilon x[x(\delta - aH(x,y)) + b + \varepsilon],\\ \dot{y} &= x - x^2,\end{aligned}\tag{6.16}$$

其中 a, b 为常数，$H=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$，$\varepsilon \geqslant 0$，并证明了下述结论：

(i) 如果 $b-4a\neq 0$，则当 ε 充分小时，(6.16)在点(1,0)的邻域内至多有一个极限环，如果 $b=4a>0$，则当 $\varepsilon+\left|\delta+\frac{1}{6}(a+3b)\right|$ 充分小时，(6.16)在点(1,0)的邻域内可以有两个极限环.

(ii) 如果(1)$ab\leqslant 0$ 且 $|a|+|b|\neq 0$ 或(2)$ab>0$ 且 $b(4a-b)\leqslant 0$，则当 ε 充分小时，(6.16)在每一个闭曲线 $L_h: H(x,y)=h\left(-\frac{1}{6}<h<0\right)$附近至多一个极限环，如果 $ab>0, b(4a-b)>0$，则存在 $h_0\in\left(-\frac{1}{6},0\right)$及 $\delta_0\in R$ 使当 $\varepsilon+|\delta-\delta_0|$ 充分小时，(6.16)在 L_{h_0} 的邻域内可以有两个极限环.

(iii) 如果 $b\neq 0$，则当 ε 充分小时，(6.16)在同宿环 L_0 附近至多由一个极限环，如果 $b=0, a>0$，则当 $\varepsilon+\left|\delta+\frac{a}{6}\right|$ 充分小时，(6.16)在 L_0 附近可以有两个极限环.

因此，对(6.16)来说，Hopf 分支，Poincaré 分支与同宿分之中的非退化条件虽有关系但是却并不一样了.

本章主要研究了平面系统极限环分支的一般理论与方法，虽给出了一些例证，但对较一般的多项式系统的应用及极限环个数上界的估计涉及很少，有关这方面的工作读者可参考有关文献，例如[11,14,22,23,69～71,73～80,84,85,88～97]等. 此外，对三点及多点异宿环的扰动分支可参考[81,112,113,147,148]等，对二

次系统与三次系统极限环分支与个数的研究可参考[123,127,130,131~138,162~167]等,对高维系统周期轨道与同异宿分支的研究可参考[150~161].

习 题

1. 讨论系统

$$\dot{x} = \varepsilon x + y + xy + axy^2, \quad \dot{y} = -x + \varepsilon y - x^2 + y^2$$

在原点的 Hopf 分支.

2. 讨论系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \pm x(1 + x^2) - \varepsilon y(\delta + x^2)$$

的 Hopf 分支.

3. 证明 Liénard 系统

$$\dot{x} = y - \varepsilon(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3), \quad \dot{y} = -(x + bx^2 + cx^3)$$

(其中 b,c 为常数)在原点的 Hopf 环性数至多是 2.

4. 考虑二次微分系统

$$\dot{x} = y + \varepsilon \sum_{i+j=2} a_{ij} x^i y^j + \varepsilon^2 a_{10} x,$$

$$\dot{y} = -x + \varepsilon \sum_{i+j=2} b_{ij} x^i y^j + \varepsilon^2 b_{10} y,$$

令 $a = a_{10} + b_{01}, b = a_{11}(a_{20} + a_{02}) - b_{11}(b_{20} + b_{02}) + 2(b_{02}a_{02} - a_{20}b_{20})$,若 $ab > 0$,则当 $\varepsilon > 0$ 充分小时上述系统在半径为 $2\sqrt{a/b}$ 的圆周附近有惟一的极限环.

5. 考虑三次系统

$$\dot{x} = y + \varepsilon[x^2 - y^2 + \delta_1 x + \delta_2 x(x^2 + y^2 - 1)],$$

$$\dot{y} = -x + \varepsilon[\delta_1 y + \delta_2 y(x^2 + y^2 - 1)],$$

试证对任何 $M > 0$,存在 $\varepsilon_0 > 0$ 及圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 的邻域 U 使当 $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0, |\delta_1| < M, |\delta_2| < M$ 时所述系统在 U 中至多有一个极限环.

6. 设(1.18)成立,又设

$$p(x, y, \varepsilon, \delta) = p_1(x, y) + \varepsilon p_2(x, y) + \cdots,$$

$$q(x,y,\varepsilon,\delta) = q_1(x,y) + \varepsilon q_2(x,y) + \cdots,$$

$$H^*(x,y,\varepsilon,\delta) = H(x,y) + \varepsilon H_1(x,y) + \varepsilon^2 H_2(x,y) + \cdots,$$

其中

$$DH_i(f,g)^T + DH_{i-1}(p_1,q_1)^T + \cdots + DH_1(p_{i-1},q_{i-1})^T + DH(p_i,q_i)^T = 0,$$

$$i = 1,\cdots,k-1, k \geqslant 2.$$

设点 A,B 如图 2.1 中所示,则成立

$$H^*(B,\varepsilon) - H^*(A,\varepsilon) = \varepsilon^k M_k^*(h) + O(\varepsilon^{k+1}),$$

其中

$$M_k^* = \oint_{L_h} \sum_{j=1}^{k} DH_{k-j}(p_j,q_j)^T \mathrm{d}t,\ H_0 = H.$$

7. 研究方程

$$\dot{x} = y,\quad \dot{y} = x + x^2 - \varepsilon y(\delta + x^2)$$

的全局分支,并证明极限环不多于一个(其中 $\varepsilon>0$ 充分小).

8. 研究方程

$$\dot{x} = y,\quad \dot{y} = x + bx^2 - x^3 - \varepsilon y(a_1 + a_2 x)$$

的双同宿分支(其中 $b\neq 0$ 为常数)并证明极限环的惟一性.

9. 研究方程

$$\dot{x} = y,\quad \dot{y} = -x + x^3 - \varepsilon y(\delta - x^2)$$

的全局分支并证明极限环的惟一性.

10. 设有多项式系统

$$\dot{x} = P(x,y),\quad \dot{y} = Q(x,y)$$

及多项式函数 $H(x,y)$,则该系统以曲线 $H(x,y)=0$ 为不变曲线的充要条件是存在多项式 $F(x,y)$使对一切(x,y)成立 $H_xP + H_yQ = HF$,由此导出任一二次系统以 $y^2 + x^2 - \frac{2}{3}x^3 = 0(x>0)$为孤立同宿轨的条件,并证明这类同宿轨在多项式扰动下至多产生一个极限环(参看文献[123]).

11. 研究系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + bx^2 + x^3 - \varepsilon y(a_1 + a_2 x)$$

的同宿分支(其中 $b \neq 0$ 为常数)并证明极限环的惟一性.

12. 设当 $\varepsilon = 0$ 时(3.1)有一双同宿环 $L = L_1 \cup L_2 \cup S_0$ 且 $\sigma_0 = (f_x + g_y)(S_0) \neq 0$. 设 $r = r(\varepsilon, \delta)$为(3.1)在 S_0 附近的鞍点之双曲比,则可得三个函数 $d(\varepsilon, \delta, A_1)$及

$$d_i(\varepsilon, \delta, A_i) = \frac{\varepsilon M_i(\delta)}{|f(A_i), g(A_i)|} + O(\varepsilon^2),\ i = 1,2,$$

其中 $M_i(\delta)$由(4.1)给出.设 $\varepsilon > 0$,试证

(1)存在常数 $N(p) > 0$ 使

当 $d_2 = 0$ 时,$d = \varepsilon[N(p) + O(\varepsilon)][M_1(\delta) + O(\varepsilon)]$,

当 $r_0 > 1$ 且 $d_2 > 0$ 时,$d = \varepsilon[N(p) + O(\varepsilon)][M_1(\delta) + O(\varepsilon^{r-1} + \varepsilon)]$,

当 $r_0 < 1$ 且 $d_2 > 0$ 时,$d = \varepsilon^r[N(p) + O(\varepsilon)]\left[\left(\frac{d_2}{\varepsilon}\right)^r(1 + o(\varepsilon^k)) + O(\varepsilon^{1-r})\right]$,

当 $r_0 < 1$ 且 $d_2 < 0$ 时,$d = \varepsilon[N(p) + O(\varepsilon)][M_1(\delta) + O(\varepsilon^{\frac{1}{r}-1} + \varepsilon)]$,

当 $r_0 > 1$ 且 $d_2 < 0$ 时,$d = \varepsilon^{\frac{1}{r}}[N(p) + O(\varepsilon)]\left[-\left(-\frac{d_2}{\varepsilon}\right)^r(1 + o(\varepsilon^k)) + O(\varepsilon^{1-\frac{1}{r}})\right]$,

其中 $0 < k < \frac{r_0}{1 + r_0}$,$r_0 = r(0, \delta)$.

(2) 利用 d 的上述近似表达式可证对充分小的 $\varepsilon > 0$,

$$当(r_0 - 1)M_2(\delta) > 0 时\ M_1(\delta)d(\varepsilon, \delta, A_1) > 0,$$

$$当(r_0 - 1)M_2(\delta) < 0 时\ M_2(\delta)d(\varepsilon, \delta, A_1) > 0.$$

(3) 在(3.1)中交换 x 与 y 的位置(从而 L_1 与 L_2 也交换了位置),且应用(2)中的结论又得

$$当(r_0 - 1)M_1(\delta) > 0 时,M_2(\delta)d(\varepsilon, \delta, A_1) > 0,$$

$$当(r_0 - 1)M_1(\delta) < 0 时,M_1(\delta)d(\varepsilon, \delta, A_1) > 0.$$

(4) 利用(2)与(3)中的结论证明,若对紧集 D 中的一切 δ 有 $M_1(\delta)\cdot M_2(\delta)\neq 0$,则存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(D)>0$ 及 L 的邻域 U 使对一切 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, $\delta\in D$ 有

(i) 当 $M_1M_2<0$ 时(3.1)在 U 中有惟一的极限环且为小环;

(ii) 当 $M_1M_2>0$ 且 $(r_0-1)M_1(\delta)>0$ 时(3.1)在 U 中有惟一极限环且为大环;

(iii) 当 $M_1M_2>0$ 且 $(r_0-1)M_1(\delta)<0$ 时(3.1)在 U 中恰有两个极限环且为不相套的小环.

(5) 利用(1)中 d 的近似表达式分析当 $\delta\in R$ 且

$$M_i(\delta)=k_i\delta+c_i,k_1,k_2\neq 0,k_1c_2-k_2c_1\neq 0$$

时极限环的分支图(韩茂安).

13. 证明定理 2.3.

14. 证明定理 3.5.

15. 证明定理 4.2.

16. 证明定理 5.8.

第五章　平面系统的极限环(续)

本章继续研究平面系统的极限环,包括旋转向量场中极限环的变化规律、极限环存在、不存在与惟一性等的判别方法,及 Liénard 方程极限环的个数.

§1　旋转向量场理论

旋转向量场的概念始于 G. F. D. Duff 在 1953 年发表的一篇论文,最初的理论要求向量场关于参数有某种周期性. 后在 70 年代陈翔炎与 L. M. Perko 各自独立地提出了广义旋转向量场的概念并建立了广义旋转向量场理论(见文献[131]与文献[115, 117]),这一理论是研究极限环的惟一性、不存在性及极限环消失与产生的条件等的基本工具. 最近 M. Han([47])又对旋转向量场的概念与理论做了进一步的扩充与完善. 下面按[47]的方法来介绍这一理论.

1.1　旋转向量场的概念与不相交定理

考虑含参数 λ 的向量场族

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, \lambda), \tag{1.1}$$

其中 f 在 $D\times I$ 上为解析函数, D 为 R^2 的连通区域, I 为 R 的区间. 为了方便,我们用 $F(\lambda)=f(\cdot,\lambda)$ 表示由(1.1)右端定义的含参数向量场.

定义 1.1　设 f 为 $D\times I$ 上的解析函数且

(i) 方程(1.1)位于 D 内部的奇点不随 λ 的变化而变动;

(ii) 对 $D\times I$ 的任一内点 (x_0, λ_0) 且 x_0 不是(1.1)的奇点,

都存在 x_0 的邻域 $D_0 \subset D$ 及使 $\lambda_0+\varepsilon \in I$ 的 $\varepsilon>0$,使

当 $(x, \lambda) \in D_0 \times (\lambda_0, \lambda_0+\varepsilon)$ 时

$$f(x, \lambda_0) \wedge f(x, \lambda) \geqslant 0 (或 \leqslant 0), \tag{1.2}$$

且沿向量场 $F(\lambda_0)$ 的位于 D 内的任何非平凡的不变闭曲线有

当 $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0+\varepsilon)$ 时

$$f(x, \lambda_0) \wedge f(x, \lambda) \neq 0, \tag{1.3}$$

其中 $a \wedge b = a_1 b_2 - a_2 b_1$,则称(1.1)在 $D \times I$ 上定义了旋转向量场 $F(\lambda)$,也称(1.1)关于 $\lambda \in I$ 在 D 上形成旋转向量场.

下述命题给出了条件(1.2)的一个等价形式及(1.3)的一个充分条件.

命题 1.1 设 f 为 $D \times I$ 上的解析函数,则

(i) 定义 1.1 中的条件(1.2)对 $D \times I$ 的任一内点 (x_0, λ_0)(其中 x_0 不是(1.1)的奇点)成立当且仅当

当 $(x, \lambda) \in D \times I$ 时

$$f(x, \lambda) \wedge f_\lambda(x, \lambda) \geqslant 0 (或 \leqslant 0). \tag{1.4}$$

(ii) 设(1.4)成立,如果沿 $F(\lambda)$ 在 D 内的任何非平凡不变闭曲线有

$$f(x, \lambda) \wedge f_\lambda(x, \lambda) \not\equiv 0,\ \lambda \in I, \tag{1.5}$$

则(1.3)必成立.但反之不然.

证明 (i) 设(1.2)成立,对 $0<\lambda-\lambda_0<\varepsilon$ 有

$$f(x_0, \lambda_0) \wedge [f(x_0, \lambda) - f(x_0, \lambda_0)] \geqslant 0\ (或 \leqslant 0),$$

上式两边同除以 $\lambda-\lambda_0$,并令 $\lambda \to \lambda_0+$ 可得

$$f(x_0, \lambda_0) \wedge f_\lambda(x_0, \lambda_0) \geqslant 0\ (或 \leqslant 0),$$

因为 $D \times I$ 为连通区域,由 (x_0, λ_0) 的任意性即知(1.4)成立.反之,设(1.4)成立,设 $\theta(x, \lambda)$ 表示向量 $f(x, \lambda)$ 与正 x_1 轴的夹

角,则易知,当 $f(x,\lambda)\neq 0$ 时,有

$$\theta_\lambda(x,\lambda)=\frac{1}{|f(x,\lambda)|}f(x,\lambda)\wedge f_\lambda(x,\lambda),\quad (1.6)$$

于是由(1.4),为确定计可设 $\theta_\lambda\geqslant 0$. 设$(x_0,\lambda_0)$为 $D\times I$ 的任一内点,且 x_0 不是(1.1)的奇点.又设 $\varepsilon>0$ 使 $\lambda_0+\varepsilon\in I$,且

$$\text{当}\ \lambda\in[\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon]\ \text{时},\theta(x_0,\lambda)-\theta(x_0,\lambda_0)<\frac{\pi}{2},$$

因为 x_0 不是奇点且 $\theta_\lambda\geqslant 0$,则存在 x_0 的邻域 $D_0\subset D$ 使

当$(x,\lambda)\in D_0\times(\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon)$时,

$$0\leqslant\theta(x,\lambda)-\theta(x_0,\lambda_0)<\frac{\pi}{2}.\quad (1.7)$$

设 $f=(f_1,f_2)$,则有 $\tan\theta=f_2/f_1$,因此

$$\tan(\theta(x,\lambda)-\theta(x,\lambda_0))=\frac{\tan\theta(x,\lambda)-\tan\theta(x,\lambda_0)}{1+\tan\theta(x,\lambda)\tan\theta(x,\lambda_0)}$$

$$=\frac{f(x,\lambda_0)\wedge f(x,\lambda)}{|f(x,\lambda_0)|\cdot|f(x,\lambda)|\cos(\theta(x,\lambda)-\theta(x,\lambda_0))},$$

于是由(1.7)即得 $f(x,\lambda_0)\wedge f(x,\lambda)\geqslant 0$,其中$(x,\lambda)\in D_0\times(\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon)$,即(1.2)成立.

(ii)设(1.3)不成立,则存在 $F(\lambda_0)$ 的非平凡不变闭曲线 $L(\lambda_0)\subset D$ 及数列 $\lambda_n>\lambda_0$,$\lambda_n\to\lambda_0$,使

$$f(x_0,\lambda_0)\wedge f_\lambda(x_0,\lambda_n)=0,\ x\in L(\lambda_0),$$

于是 $f(x,\lambda_0)\wedge f_\lambda(x,\lambda_0)=0$, $x\in L(\lambda_0)$,即(1.5)不成立.因此若(1.5)成立,则(1.3)必成立.

若设 $F(\lambda)$ 为由下列向量函数

$$f(x,\lambda)=(x_2+x_1(x_1^2+x_2^2-\lambda)^3,\ -x_1)^T$$

定义的向量场,且取 $I=(0,+\infty)$,则易知

$$f(x, \lambda) \wedge f_\lambda(x, \lambda) = -3x_1^2(x_1^2 + x_2^2 - \lambda)^2,$$

$$f(x, \lambda_1) \wedge f(x, \lambda_2) = x_1^2(\lambda_1 - \lambda_2)g(x_1^2 + x_2^2, \lambda_1, \lambda_2),$$

其中 $g(u, \lambda_1, \lambda_2) = 3u^2 - 3(\lambda_1 + \lambda_2)u + \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2$，由于当 $u \geqslant 0$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ 时 $g > 0$，且圆周 $x_1^2 + x_2^2 = \lambda$ 是 $F(\lambda)$ 的惟一周期轨，此时(1.2)与(1.3)成立，但(1.5)不成立. 证毕.

由命题 1.1 即知

推论 1.1 设解析向量场 $F(\lambda)$ 在 D 内的奇点不随 λ 的变化而变动，则(1.1)关于 $\lambda \in I$ 在 D 上形成一旋转向量场当且仅当(1.4)成立，且对 I 的任一内点 λ_0，存在 $\varepsilon > 0$ 使 $\lambda_0 + \varepsilon \in I$ 且沿 $F(\lambda_0)$ 位于 D 内的任何非平凡不变闭曲线式(1.3)成立. 特别，如果(1.4)与(1.5)成立，则(1.1)关于 $\lambda \in I$ 在 D 上形成旋转向量场.

由(1.6)知，任取常点 $x \in D$，向量场 $F(\lambda)$ 在点 x 处的向量 $f(x, \lambda)$ 的方向随 λ 的增加而朝一确定的方向旋转. 进一步，若设 $L_0 \subset D$ 为 $F(\lambda_0)$ 的一条轨线，则当 $0 < \lambda - \lambda_0 \ll 1$ 时 $F(\lambda)$ 的从 L_0 上任一点出发的正轨线都进入 L_0 同一侧. 这一事实对以下分析后继函数的性质很有帮助.

下列定理是旋转向量场理论的基础.

定理 1.1(不相交定理) 设(1.1)在 $D \times I$ 上定义了旋转向量场 $F(\lambda)$，设有 $\lambda_1, \lambda_2 \in I$，$\lambda_1 \neq \lambda_2$，使 $F(\lambda_1)$ 与 $F(\lambda_2)$ 在 D 内分别有闭轨 L_1 与 L_2. 如果 L_1 与 L_2 有相同定向且其内含有(1.1)的相同的奇点，则或者(i) $L_1 = L_2$ 或者(ii) $L_1 \cap L_2 = \varnothing$(空集). 此外，如果沿 L_1 有 $f(x, \lambda_1) \wedge f(x, \lambda_2) \neq 0$，则情况(i)不能发生. 特别当 $0 < |\lambda_1 - \lambda_2| \ll 1$ 时，情况(i)不能发生.

证明 不妨设 L_1 与 L_2 同为顺时针定向，又设结论不成立，则 $L_1 \neq L_2$ 且 $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$. 由于 f 在 $D \times I$ 上解析，L_1 与 L_2 内含(1.1)的相同奇点，我们有下列两种情况：

(a) L_1 与 L_2 在某点 $A \in L_1 \cap L_2$ 相切且或(i) $L_2 - \{A\} \subset$

Int. L_1 或(ii)$L_1-\{A\}\subset$Int. L_2.

(b) 存在弧 $l_2\subset L_2$,其端点 $A_1,A_2\in L_2$,使得 $l_2-\{A_1, A_2\}\subset$Int. L_1,A_1, $A_2\in L_1\cap l_2$.

首先考虑情况(a)(i).为确定计,由(1.2)与(1.6)及命题 1.1 可设

$$\lambda_1<\lambda_2,\ \theta_\lambda(x, \lambda)\geqslant 0. \tag{1.8}$$

设 x_0 为切点 A 的坐标,则

$$\theta(x_0, \lambda_1)=\theta(x_0, \lambda_2)\equiv\theta_0 \quad (\mathrm{mod} 2\pi).$$

若 $\theta_0\neq 0(\mathrm{mod}\ 2\pi)$,可设

$$\theta(x, \lambda_i)\in(0, 2\pi),\ |x-x_0|\ll 1,\ i=1, 2,$$

若 $\theta_0=0(\mathrm{mod}\ 2\pi)$,可设

$$\theta(x, \lambda_i)\in(-\pi, \pi),\ |x-x_0|\ll 1,\ i=1, 2,$$

于是由(1.8)可得

$$0\leqslant\theta(x, \lambda_2)-\theta(x, \lambda_1)<2\pi,\ |x-x_0|\ll 1. \tag{1.9}$$

这表明 $F(\lambda_2)$过 L_1 上在点 A 附近的任一点的正半轨必从 L_1 的内部进入其外部,从而必在 A 附近存在点 $B\in L_2$, $B\neq A$,使 B 在 L_1 之外,这与 $L_2-\{A\}\subset$Int. L_1 矛盾.因此情况(a)(i)不能出现.同理可证情况(a)(ii)也不能出现.

再考虑情况(b).设 $x_0\in L_1\cap$Ext. L_2(其中 Ext. L_2 表示 L_2 的外部)使向量 $f(x_0, \lambda_2)$在 x_0 与 L_1 相切,即有(注意到 (1.8))

$$\theta(x_0, \lambda_2)-\theta(x_0, \lambda_1)=0 \text{ 或 } \pi.$$

对前一种情况,与上面类似可知(1.9)成立,从而导致矛盾,于是必有后者,即

$$\theta(x_0, \lambda_2)-\theta(x_0, \lambda_1)=\pi. \tag{1.10}$$

用 M(或 N)表示向量场 $F(\lambda_2)$在 $L_1\cap \mathrm{Ext}.L_2$ 中的内切点(或外切点)的个数.由于 f 是解析的,M 与 N 必为有限数,且由(1.10)知

$$M = N + 1,$$

如图 1.1 所示.

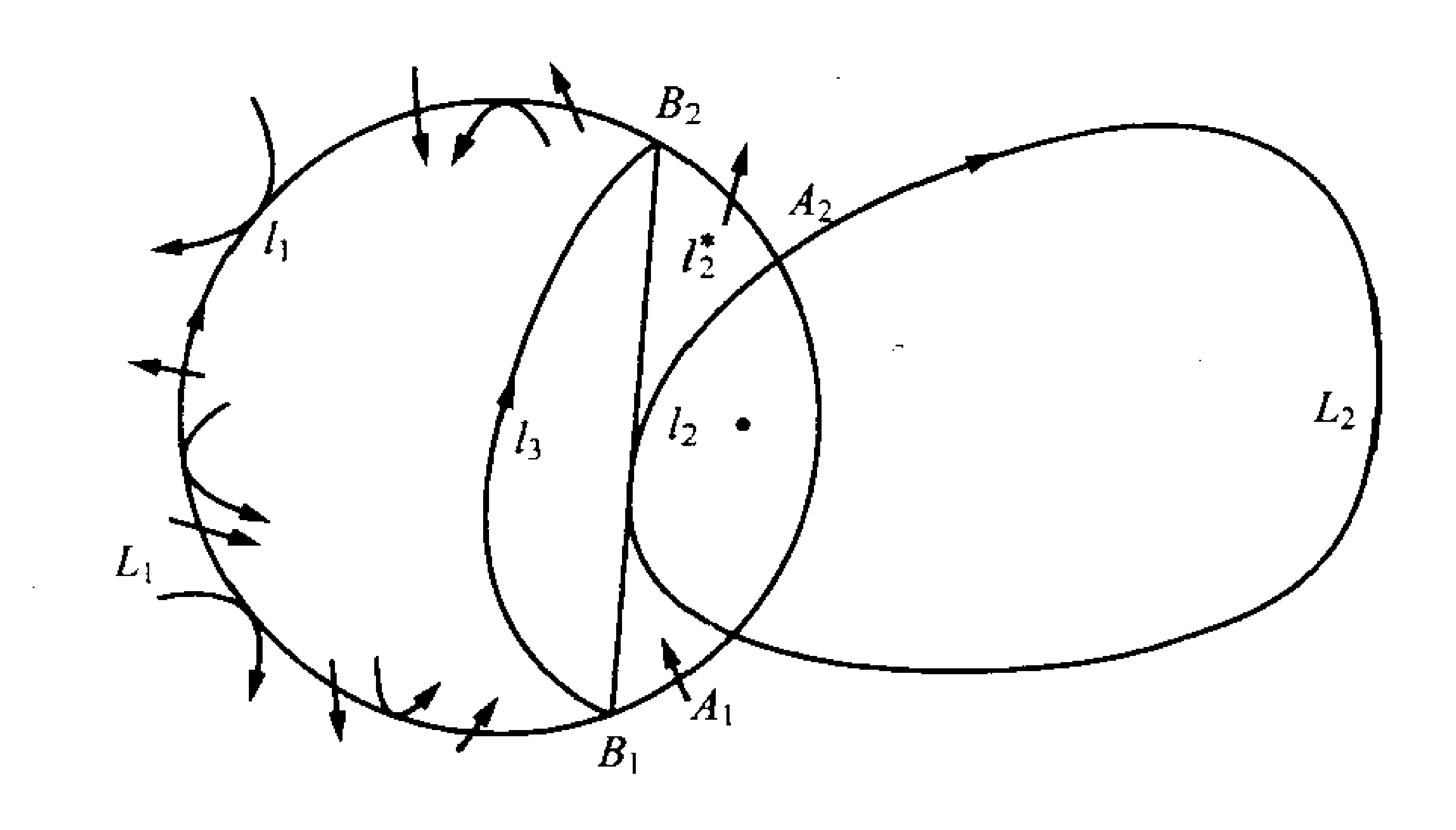


图 1.1 ($M=3$, $N=2$)

令 $l_2=L_2\cap \mathrm{Int}.L_1$,又设 l_3 为 $F(\lambda_2)$在 l_2 附近且位于 L_2 外部的轨线弧,使 l_3 的端点 B_1, B_2 属于 $L_1\cap \mathrm{Ext}.L_2$.点 B_1 与 B_2 把 L_1 分为两部分,位于 L_2 外部的那部分记为 l_1.显然,当 l_3 与 l_2 充分接近时 $F(\lambda_2)$在 $L_1\cap \mathrm{Ext}.L_2$ 上的 $M+N$ 个内、外切点均在 l_1 上,因此可在 l_2 与 l_3 之间构造一个以 B_1, B_2 为端点的弧 l_2^*,满足下列性质:

(i) l_1 与 l_2^* 形成一条光滑闭曲线 L^*;

(ii) $F(\lambda_2)$在 l_2^* 上有惟一切点,该点关于 L^* 为外切点.

于是在闭曲线 L^* 上 $F(\lambda_2)$恰有 M 个内切点、$N+1$ 个外切点,从而由第一章定理 5.1(Poincaré 指标定理)知 $F(\lambda_2)$在 L^* 内部必有(1.1)的奇点,这与 L_1 与 L_2 内含相同奇点的假设矛盾.于是我们证明了若 L_1 与 L_2 不相等则它们必不相交.

若存在 λ_1, $\lambda_2\in I$ 且 $\lambda_1\neq\lambda_2$,使 $L_1=L_2$,则对任何 $x\in L_1$,

向量 $f(x, \lambda_1)$与 $f(x, \lambda_2)$都是平行的,即有

$$f(x, \lambda_1) \wedge f(x, \lambda_2) = 0, \ x \in L_1.$$

特别,当 $0<|\lambda_1-\lambda_2|\ll 1$ 时上式与(1.3)矛盾.定理证毕.

我们指出,如果 L_1 与 L_2 的定向不同,则定理 1.1 的结论不再成立.例如,考虑方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y, \lambda)\cos\lambda + Q(x, y, \lambda)\sin\lambda, \\ \dot{y} &= -P(x, y, \lambda)\sin\lambda + Q(x, y, \lambda)\cos\lambda, \end{aligned} \tag{1.11}$$

其中 $\lambda\in R$,$(x, y)\in R^2$,且

$$P = H_y + H_xH, \ Q = -H_x + H_yH,$$

$$H = \left(1 - \frac{1}{8}\sin\lambda\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{8}\sin\lambda\right)y^2,$$

易知

$$P^2 + Q^2 = (H_x^2 + H_y^2)(1 + H^2), \ H_x^2 + H_y^2 \geqslant \frac{49}{16}(x^2 + y^2),$$

$$P_\lambda Q - PQ_\lambda = (H_yH_{x\lambda} - H_xH_{y\lambda})(1 + H^2) - H_\lambda(H_x^2 + H_y^2),$$

$$|P_\lambda Q - PQ_\lambda| < P^2 + Q^2,$$

从而可知(1.11)满足条件(1.4)与(1.5)且 $\theta_\lambda<0$,又易知

$$\left.\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right|_{(1.11)} = (H_x^2 + H_y^2)\cos\lambda(H - \tan\lambda),$$

若取 $\lambda_1=\frac{\pi}{4}$, $\lambda_2=\frac{5}{4}\pi$,则 $F(\lambda_1)$与 $F(\lambda_2)$分别有闭轨

$$L(\lambda_1):\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{16}\right)x^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{16}\right)y^2 = 1,$$

$$L(\lambda_2):\left(1+\frac{\sqrt{2}}{16}\right)x^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{16}\right)y^2=1,$$

易见 $L(\lambda_1)$与 $L(\lambda_2)$有四个交点.

下列定理描述了旋转向量场中闭轨随参数增加(或减少)而单调变化的特性.

定理 1.2 设(1.1)在 $D\times I$ 上定义了旋转向量场 $F(\lambda)$,设对 $\lambda_0\in \mathrm{Int}.I$,$F(\lambda_0)$有闭轨 $L_0\subset \mathrm{Int}.D$,则对$|\lambda-\lambda_0|$充分小下列结论成立:

(i) 如果 L_0 为奇重极限环,则 $F(\lambda)$在 L_0 附近有惟一极限环 $L(\lambda)$,且 $L(\lambda)$随 λ 的单调变化而单调扩大或缩小.

(ii) 如果 L_0 为偶重环,则当 λ 在λ_0 某侧时 $F(\lambda)$在 L_0 附近恰有两个极限环,分别位于 L_0 的内部与外部,且一个稳定,另一个不稳定,对 λ_0 另一侧的 λ, $F(\lambda)$在 L_0 附近无闭轨.

(iii) 如果 L_0 为非孤立闭轨,则对 $\lambda\neq\lambda_0$, $F(\lambda)$在 L_0 附近无闭轨.

证明 设 L_0 为非孤立闭轨,即 L_0 的任何邻域都有闭轨,则由于(1.1)为解析系统可知 $F(\lambda_0)$在 L_0 的邻域内有一族闭轨,故由定理 1.1 知当$0<|\lambda-\lambda_0|\ll 1$ 时 $F(\lambda)$在 L_0 附近没有闭轨.下设 L_0 为孤立闭轨,即 L_0 为极限环.设 $x=u(t)(0\leqslant t\leqslant T_0)$为 L_0 的参数表示,T_0 为其周期,令:

$$Z(\theta)=(-V_2(\theta),\ V_1(\theta))^T,\ (V_1,\ V_2)^T=u'(\theta)/|u'(\theta)|,$$

对(1.1)引入变换 $x=u(\theta)+Z(\theta)p$,可得下述 T_0-周期方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta}=R(\theta,\ p,\ \lambda). \tag{1.12}$$

令 $G(r,\ \lambda)$表示(1.12)的后继函数.由于(1.12)为解析系统,必存在自然数 $k\geqslant 1$ 与常数 $g_k\neq 0$ 使

$$G(r,\ \lambda_0)=g_kr^k+O(r^{k+1}),$$

这表示 L_0 为 k 重极限环. 若 k 为奇数, 则当 $|\lambda-\lambda_0|$ 小时 G 至少有一实根 $r(\lambda)$, 且 $r(\lambda_0)=0$. 设 $F(\lambda)$ 的相应于 $r(\lambda)$ 的闭轨为 $L(\lambda)$. 由定理 1.1, 对 $0<|\lambda-\lambda_0|\ll 1$, $L(\lambda)$ 与 L_0 必无交点, 特别地, 点 $u(0)$ 不在 $L(\lambda)$ 上, 这意味着 $r(\lambda)\neq 0$, $0<|\lambda-\lambda_0|\ll 1$. 又由第一章定理 2.7 的推论知 $r(\lambda)$ 关于 λ 连续, 因此 $L(\lambda)$ 随 λ 的变化而连续变动, 又由(1.2)、(1.3)、命题 1.1 及(1.6)知量 $G(0,\lambda)(\lambda-\lambda_0)$ 与 $r(\lambda)(\lambda-\lambda_0)$ 均不变号, 因此当 λ 在 λ_0 附近变化时 $L(\lambda)$ 扫过 L_0 的一邻域. 再由定理 1.1 知 $L(\lambda)$ 是 $F(\lambda)$ 在 L_0 附近的惟一极限环.

如果 k 为偶数, 为确定计, 设

$$g_k>0,\ G(0,\lambda)(\lambda-\lambda_0)<0,\ 0<|\lambda-\lambda_0|\ll 1,$$

则对 $0<\lambda-\lambda_0\ll 1$, $0<|r|\ll 1$, 有 $G(0,\lambda)G(r,\lambda_0)<0$, 从而 G 必有一正根 $r_1(\lambda)$ 与一负根 $r_2(\lambda)$, 相应于此两根的极限环记为 $L_i(\lambda)$, $i=1,2$, 则与上类似知对 $0\leqslant\lambda-\lambda_0\ll 1$, $L_1(\lambda)\cup L_2(\lambda)$ 扫过 L_0 的一邻域, 从而有定理 1.1 知 L_1 与 L_2 为 $F(\lambda)$ 在 L_0 附近仅有的极限环, 且对 $0<\lambda_0-\lambda\ll 1$, $F(\lambda)$ 在 L_0 附近没有闭轨. 定理证毕.

对于上述定理, 我们有以下注解.

注 1.1 由第二章定理 2.3 知, 如果(1.5)成立, 则对 $0<|\lambda-\lambda_0|\ll 1$, (1.1)在 L_0 附近的极限环都是双曲的.

注 1.2 如果方程(1.1)只满足(1.2)而不满足(1.3), 则定理 1.2 不再成立. 下述方程就是一个反例:

$$\dot{x}=y+x(x^2+y^2-1)^2[(x^2+y^2-1)^k-\lambda],$$

$$\dot{y}=-x,$$

其中 $\lambda>-1$, $k=1$ 或 2, 详细讨论留给读者.

注 1.3 如果定义 1.1 的(1)与(2)满足, 但 f 在 $D\times I$ 上仅为局部李氏连续的或 C^r 的($1\leqslant r\leqslant\infty$), 则利用后继函数 G 或环

域定理可证：若 L_0 为 $F(\lambda_0)$ 的稳定或完全不稳定极限环，则当 $0<|\lambda-\lambda_0|\ll 1$ 时 $F(\lambda)$ 在 L_0 的附近内至少有一个极限环（但同一个极限环未必对一切 $0<|\lambda-\lambda_0|\ll 1$ 始终存在），若 L_0 为 $F(\lambda_0)$ 的半稳定极限环，则当 λ 在 λ_0 某侧（另一侧）时 $F(\lambda)$ 在 L_0 附近至少有两个极限环（无闭轨）.

1.2　旋转向量场族中的 Hopf 分支与奇闭轨分支

下面分别研究 Hopf 分支与奇闭轨分支. 设存在 $\lambda_0\in I$ 使 $F(\lambda_0)$ 有一初等细焦点或中心. 不妨设对一切 $|\lambda-\lambda_0|\ll 1$ 该奇点恒位于原点，即

$$f(0,\ \lambda)=0,\ |\lambda-\lambda_0|\ll 1. \tag{1.13}$$

定理 1.3　设(1.1)定义了旋转向量场 $F(\lambda)$，且(1.13)成立.

(i) 如果原点为 $F(\lambda_0)$ 的中心，则对 $0<|\lambda-\lambda_0|\ll 1$，$F(\lambda)$ 在原点邻域内没有闭轨.

(ii) 如果原点为 $F(\lambda)$ 的焦点且当 $\lambda\leqslant\lambda_0$（或 $\lambda\geqslant\lambda_0$）时为稳定的，而当 $\lambda>\lambda_0$（或 $\lambda<\lambda_0$）时为不稳定的，则当 $\lambda\leqslant\lambda_0$（或 $\lambda\geqslant\lambda_0$）时 $F(\lambda)$ 在原点附近没有闭轨，而当 $\lambda>\lambda_0$（或 $\lambda<\lambda_0$）时 $F(\lambda)$ 在原点附近有惟一闭轨.

证明　结论(i)是定理 1.1 的直接推论. 为证结论(ii)，设原点为 $F(\lambda_0)$ 的细焦点. 对(1.1)引入极坐标变换可得一形如(1.12)的周期方程. 同前，用 $G(r,\ \lambda)$ 表示(1.12)在原点附近的后继函数，则对 $|r|\ll 1$ 有

$$G(r,\ \lambda_0)=a_{2k}r^{2k+1}+O(r^{2k+2}),\ a_{2k}\neq 0,\ k\geqslant 1. \tag{1.14}$$

不妨设 $a_{2k}<0$，则由(1.14)及所设条件知

$$G(r,\ \lambda)<0,\ |\lambda-\lambda_0|\ll r\ll 1,$$

$$G(r,\ \lambda)>0,\ 0<r\ll\lambda-\lambda_0\text{（或 }\lambda_0-\lambda\text{）},$$

于是当 $\lambda>\lambda_0$(或 $\lambda<\lambda_0$)时 G 有根 $r(\lambda)>0$ 且关于 λ 连续,从而完全与定理 1.2 类似可证结论(ii)成立.定理证毕.

我们指出,只要(1.14)成立,应用 Malgrange 定理(第一章),可证定理 1.3 对 C^∞ 系统(1.1)也成立,但若(1.14)不成立,(1.1)虽是 C^∞ 系统,定理 1.3 也不再成立.下列方程就是这样一个例子:

$$\dot{x} = P_0(x, y)\cos\lambda - Q_0(x, y)\sin\lambda,$$

$$\dot{y} = P_0(x, y)\sin\lambda + Q_0(x, y)\cos\lambda,$$

其中

$$P_0 = -y + x\tanh(r),\ Q_0 = x + y\tanh(r),\ r = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$h(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}e^{-\frac{1}{r}}\left(\sin\dfrac{1}{r} + \dfrac{3}{4}\sqrt{2}\right), & r>0, \\ 0, & r=0. \end{cases}$$

请读者自己验证.

对定理 1.2 有类似结论(只须在上例中把 $h(r)$ 换为 $h(|r-1|)$).

现设存在 $\lambda_0\in I$ 使 $F(\lambda_0)$ 有由有限个奇点及连接这些奇点的轨线组成的不变闭曲线 L_0.如果 L_0 有确定的定向(顺时针或逆时针),则称 L_0 为 $F(\lambda_0)$ 为奇闭轨.仿上,利用定理 1.1 及对后继函数(或 Poincaré 映射)进行定性分析可证:

定理 1.4 设(1.1)定义了 $D\times I$ 上的旋转向量场 $F(\lambda)$,又设存在 $\lambda_0\in I$ 使 $F(\lambda_0)$ 在 D 的闭包中有奇闭轨 L_0,且使 $F(\lambda_0)$ 在 L_0 的某侧可以定义 Poincaré 映射,则

(i) 如果 $F(\lambda_0)$ 在 L_0 的邻域内有一族闭轨,则对 $0<|\lambda-\lambda_0|\ll 1$,$F(\lambda)$ 在 L_0 的邻域内没有闭轨;

(ii) 如果 L_0 为(内侧或外侧)稳定或不稳定的,则当 λ 在 λ_0 某侧(另一侧)时 $F(\lambda)$ 在 L_0 附近至少有一个闭轨(没有闭轨).

注 1.4 我们认为定理 1.4 的结论(ii)中闭轨(若有)应是惟

一的，但目前尚未证明，但如果 L_0 为同宿轨且存在 $x \in L_0$ 使 $f(x, \lambda_0) \wedge f_\lambda(x, \lambda_0) \neq 0$，则由第四章定理 3.3 知惟一性成立.

由定理 1.2 我们知道 $F(\lambda)$ 的闭轨 $L(\lambda)$ 随 λ 变化而单调变化，且覆盖一单连通区域 G，进一步利用定理 1.2 易证下述关于 G 的边界性质的定理.

定理 1.5 设(1.1)定义了在 $D \times I$ 上的旋转向量场 $F(\lambda)$，且设 I 为开区间，设 $G \subset D$ 为由(1.1)的具相同定向的闭轨所覆盖的区域，且 G 有一边界 L^*，则

(i) 存在区间 I 的聚点 λ^*（有可能 $\lambda^* = \infty$），使在 λ^* 某侧当 $\lambda \to \lambda^*$ 时 $L(\lambda) \to L^*$；

(ii) 如果 $\lambda^* \in I$，则 L^* 为 $F(\lambda^*)$ 的不变集，且或为奇点或为奇闭轨或为无界曲线.

例 1.1 考虑 Liénard 方程

$$\dot{x} = y - (x^4 + x^3 - \lambda x), \ \dot{y} = -x, \tag{1.15}$$

易知(1.15)对 $\lambda \in R$ 在整个平面上形成旋转向量场，且当 $\lambda = 0$ (>0) 时原点稳定（不稳定），于是由定理 1.3 知对 $0 < \lambda \ll 1$ 时 (1.15)在原点邻域内有惟一极限环 $L(\lambda)$，且当 λ 增加时 $L(\lambda)$ 扩大. 令 $u(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}\lambda x$，则当 $\lambda > \frac{32}{27}$ 时沿(1.15)有

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{y=u} \geqslant u'(x), \ x \leqslant 0,$$

$$x^4 + x^3 - \lambda x > u(x), \ x < 0,$$

由此知(1.15)有一无界轨线，$y = U(x)$，$x < 0$，且 $U(x) < u(x)$，$x < 0$，$U(0-) = 0$，从而当 $\lambda \geqslant \frac{32}{27}$ 时(1.15)已不存在闭轨了. 因此存在 $\lambda^* \in \left(0, \frac{32}{27}\right)$，使 $L(\lambda)$ 所覆盖的区域的外边界是 $F(\lambda^*)$ 的一条无界轨线，该轨线与负 y 轴、正 x 轴及负 x 轴各有惟一交点. 进一步由定理 1.1 知当 $\lambda \leqslant 0$ 时(1.15)没有闭轨.

例 1.2　与例 1.1 完全类似可证方程

$$\dot{x} = y - (x^4 + x^3 - \lambda x),\ \dot{y} = -x(1-x)$$

的极限环所覆盖的区域之外边界是位于区域 $x \leqslant 1$ 中的同宿轨.

值得指出的是,即使 G 的边界 L^* 为紧的(奇闭轨),向量场 $F(\lambda^*)$也可能在其两侧均无法定义 Poincaré 映射.

例 1.3　考虑方程

$$\dot{x} = y - 2x^2(1+x) + \lambda x,\ \dot{y} = -x^3,$$

仿第四章定理 2.4 可证该方程一切解为正向有界的.且通过分析原点稳定性知当 $\lambda > 0$ 时总有极限环 $L(\lambda)$.又沿曲线 $y = x^2\left(x > -\frac{1}{4}\right)$,比较该曲线斜率与 $\lambda = 0$ 时的轨线的切线斜率可知当 $\lambda \to 0$ 时 $L(\lambda)$的极限是一个过原点的奇闭轨,且在其两侧都不存在盘旋的螺旋型轨线.

例 1.4　考虑方程

$$\dot{x} = y(1-y) - (x^3 - \lambda x),\ \dot{y} = -x. \tag{1.16}$$

首先由 Hopf 分支定理易知当 $0 < \lambda \ll 1$ 时(1.16)在原点附近有惟一极限环 $L(\lambda)$且为稳定的,当 $\lambda > 0$ 增加时 $L(\lambda)$单调扩大.设 L^* 为由 $L(\lambda)$所扫过的区域 G 的外边界,则由定理 1.5 知存在 $\lambda^* > 0$ 使当 $\lambda = \lambda^*$ 时 L^* 为同宿轨(因为(1.16)有鞍点(0,1),故 G 必为有界集).需要指出的是 $L(\lambda)$并不总是惟一存在的.为了说明这一点,用 $L_1(\lambda)$表示(1.16)最靠近原点的稳定极限环,当 $\lambda > 0$增加时 $L_1(\lambda)$扩大,但 $L_1(\lambda)$不能直接形成 L^*,这是因为当 $\lambda > 0$ 时(1.16)在鞍点的发散量为正,故 L^* 必是不稳定的.于是当 $\lambda = \lambda^*$ 时稳定环 L_1 仍存在.由定理 1.4 及注 1.4,并考虑到向量场的旋转方向,易知当 $0 < \lambda - \lambda^* \ll 1$ 时 L^* 破裂而产生惟一极限环 $L_2(\lambda)$,且该环是不稳定,且随 λ 的增加而单调缩小,直到某值$\lambda_0 > 0$, $L_1(\lambda_0)$与 $L_2(\lambda_0)$合并成为一个半稳定环,之后(即 $\lambda > \lambda_0$)消失.

以上分析并不意味着(1.16)至多两个极限环,虽然前面直观的定性分析支持这一点,但目前尚未有理论上的证明.

我们看到,在旋转向量场中不难通过 Hopf 分支、同宿分支等来判定 $L(\lambda)$随 λ 的增加是单调扩大还是单调缩小.事实上,这取决于下述三个因素:向量场的旋转方向(即 θ_λ 的符号)、$L(\lambda)$的定向与其稳定性.

§2 极限环的存在性与惟一性

本节用定性分析方法讨论一般的平面系统的极限环,给出极限环不存在,存在及至多一个的条件.

2.1 极限环的不存在性

考虑平面定常系统

$$\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y), \tag{2.1}$$

其中 P, $Q\in C^1$.我们知道方程(2.1)若有闭轨,则其指标为 1,即其内部的奇点指标和为 1.另一方面,若 L 为一简单闭曲线,其上有(2.1)的轨线的 n 个内切点,m 个外切点,则由第一章定理 5.1 与 5.2 知 L 所围奇点的指标和为 $1+(n-m)/2$.因此成立下述定理(叶彦谦[138]).

定理 2.1 设 $G\subset R^2$ 为一闭环域,设 G 中没有(2.1)的奇点,又设(2.1)的轨线在 G 的内边界上的内、外切点的个数不相等,则 G 中必没有(2.1)的闭轨.

下述定理常称为 Poincaré 判别准则.

定理 2.2 设 G 为一平面区域,$F\in C^1(G)$,如果

(i)函数 PF_x+QF_y 在 G 上常号;

(ii)由方程 $PF_x+QF_y=0$ 定义的点集不包含(2.1)在 G 中的闭轨,则(2.1)在 G 中必没有闭轨.

证明 只需注意

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right|_{(2.1)} = PF_x + QF_y,$$

用反证法易证结论成立.证毕.

进一步我们有下述 Dulac 定理.

定理 2.3 设 $B\in C^1(G)$,G 为 R^2 中的单连通区域,如果函数 $(BP)_x+(BQ)_y$ 在 G 中常号且在 G 的任何非空开子集中不恒为零,则(2.1)在 G 中没有闭轨.

证明 用反证法.设(2.1)有闭轨 $L\subset G$,不妨设 L 为逆时针定向的,则由 Green 公式知

$$\oint_L BP\mathrm{d}y - BQ\mathrm{d}x = \iint_{\mathrm{Int}.L}[(BP)_x + (BQ)_y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \neq 0.$$

另一方面,因为沿 L 有 $P\mathrm{d}y = Q\mathrm{d}x$, 故应有

$$\oint_L BP\mathrm{d}y - BQ\mathrm{d}x = 0,$$

矛盾.证毕.

上述定理中的函数 B 常称为 Dulac 函数.上面三个定理分别给出了(2.1)在一给定区域中不存在闭轨的条件.下面我们给出(2.1)在整个平面上不存在闭轨的条件(参看文献[60]).

定理 2.4 设方程满足下列条件.

(i) 存在 $y_0\geqslant 0, x_0\leqslant 0\leqslant x_1$, 及连续函数 $S(x)\geqslant 0(x_0\leqslant 0\leqslant x_1)$, $R(y)>0(y\geqslant y_0)$,使 (a)当 $x_0<x<x_1$, $y>y_0$ 时 $P\neq 0$, $\frac{Q}{P}\geqslant RS$,(b)$M\equiv\int_{y_0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{R}\leqslant\int_{x_0}^{x_1}S\mathrm{d}x$.

(ii) 存在 C^1 函数 F 使方程 $F(x, y)=F(x_0, y_0)$ 定义一包围原点的单闭曲线 C_0,且(2.1)在 C_0 外部只可能有具非正指标的奇点.

(iii) 对 $\mu = P\left(\frac{1}{2}(x_0+x_1), y_0+1\right)$, 在 C_0 的内部成立 $\mu(PF_x+QF_y)\geqslant 0$,且满足 $PF_x+QF_y=0$ 的点不构成在 C_0 内部

的闭轨,则(2.1)在 R^2 中不存在闭轨.

证明 不失一般性设

$$P(x, y) > 0, \ x_0 < x < x_1, \ y > y_0, \tag{2.2}$$

注意到 Hamilton 系统

$$\dot{x} = \frac{1}{R(y)}, \ \dot{y} = S(x)$$

过点 $A(x_0, y_0)$的正半轨为

$$L_0: \int_{x_0}^{x} S(u)\mathrm{d}u = \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}u}{R(u)}, \ y \geqslant y_0,$$

于是由 M 的定义知存在 $x^* \in (x_0, x_1]$使 $M = \int_{x_0}^{x^*} S(u)\mathrm{d}u$, 且沿 L_0 当 $y \to +\infty$时必有 $x \to x^*$. 由条件(i)及比较定理知(2.1)过点 A 的正半轨 L^+ 将在区域 $x_0 \leqslant x < x^*$, $y \geqslant y_0$ 中恒位于 L_0 的上方,因此(2.1)不存在包围闭曲线 C_0 的闭轨. 又由条件(ii), (2.1)也没有位于 C_0 外部且不包围闭曲线 C_0 的闭轨. 进一步,由条件(iii)及(2.2)知在 C_0 的内部成立

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right|_{(2.1)} = PF_x + QF_y \geqslant 0, \tag{2.3}$$

且沿(2.1)在 C_0 内部的任何闭轨,上式右端不恒为零,于是由定理 2.1 知(2.1)在 C_0 内部不存在闭轨. 最后,由(2.3)知,以 C_0 为边界的圆盘为(2.1)的负向不变集,从而(2.1)也没有与 C_0 相交的闭轨. 故(2.1)在全平面没有闭轨. 证毕.

定理 2.5 设(2.1)满足

(i) 存在 $x_0 \leqslant 0$ 及连续函数 $p(x)$, $x \leqslant x_0$,且除了有限点集 E 之外 $p(x)$为处处可微的,使对 $y \geqslant p(x_0) \equiv y_0$, $P(x_0, y)$常号且不恒为零,且

$$\mu[Q(x,\ p(x))-p'(x)P(x,\ p(x))]\geqslant 0,\ x\leqslant x_0,\ x\notin E,$$

$$P^2(x,\ p(x))+Q^2(x,\ p(x))\neq 0,\ x\leqslant x_0,$$

其中 $\mu=-P(x_0,y^*)\neq 0,\ y^*>y_0$；

(ii) 对 $y_0=p(x_0)$定理 2.4 的条件(ii)成立；

(iii) 对 $\mu=-P(x_0,\ y^*)$定理 2.4 的条件(iii)成立；

则(2.1)在整个平面上没有闭轨.

证明 不失一般性设

$$\mu<0,\ P(x_0,\ y)\geqslant 0,\ y\geqslant y_0,$$

$$Q(x,\ p(x))\leqslant p'(x)P(x,\ p(x)), \tag{2.4}$$

$$x\leqslant x_0,\ x\notin E.$$

用 L_0 表示曲线 $y=p(x)$，$x\leqslant x_0$，L^- 表示(2.1)过 L_0 的端点 $A(x_0,\ y_0)$的负半轨.注意到(2.1)在 L_0 上无奇点,从(2.4)并利用比较定理知 L^- 恒位于 L_0 之上方,因此(2.1)没有包围 C_0 的闭轨.又与定理 2.4 相仿可证,(2.1)既没有完全位于 C_0 外部且不包围 C_0 的闭轨,也没有位于 C_0 内部的闭轨,还没有与 C_0 相交的闭轨,从而结论成立.证毕.

推论 2.1 设定理 2.4 的条件(i)或定理 2.5 的条件(i)对$(x_0,\ y_0)=(0,\ 0)$成立.如果除原点外(2.1)的所有其他奇点均具有非正指标,则(2.1)不存在闭轨.

证明 由于$(x_0,\ y_0)=(0,\ 0)$,在定理 2.4 与定理 2.5 的证明中的曲线 L_0 的端点 A 位于原点,因此(2.1)没有包围原点的闭轨,又由于其他奇点都不具有正指标,故(2.1)也没有不包围原点及通过原点的闭轨.证毕.

2.2 Poincaré-Bendixson 定理与极限环的存在性

讨论极限环存在性的重要依据是下述 Poincaré-Bendixson 定理.

定理 2.6 设 G 为一有界闭集,如果 G 中没有(2.1)的奇点

且存在 $A_0\in G$ 使过点 A_0 的正半轨 $\gamma^+(A_0)$(或负半轨 $\gamma^-(A_0)$)恒位于 G 中,则(2.1)在 G 中必有非平凡闭轨.

证明 设(2.1)以 A_0 为初值点的解为 $\varphi(t, A_0)$, 则

$$\gamma^+(A_0) = \{\varphi(t, A_0) \mid t \geqslant 0\}.$$

设 $\gamma^+(A_0)\subset G$,则 $\gamma^+(A_0)$为有界集,故该集有非空的导集,记为 $\Omega(A_0)$,即 $\Omega(A_0)$由 $\gamma^+(A_0)$的所有聚点组成,称其为 $\gamma^+(A_0)$的正极限集,于是 $B\in\Omega(A_0)$当且仅当存在 $t_n\to+\infty$使 $\varphi(t_n, A_0)\to B$. 注意到

$$\varphi(t+t_n, A_0) = \varphi(t, \varphi(t_n, A_0))\to\varphi(t, B) \quad (当\ n\to+\infty),$$

可知当 $B\in\Omega(A_0)$时必有 $\gamma(B)\in\Omega(A_0)$,即 $\Omega(A_0)$由整条轨线组成. 任取 $A\in\Omega(A_0)$,则 A 不是奇点,过点 A 做一截线 l(例如 l 与(2.1)过 A 的轨线正交).

若 $A\in\gamma^+(A_0)$,则 $\gamma^+(A)\subset\gamma^+(A_0)$,从而 $\Omega(A)=\Omega(A_0)$,于是 $A\in\Omega(A)$,于是存在 $t_n\to+\infty$使 $A_n\equiv\varphi(t_n, A)\to A$(当 $n\to+\infty$). 因为 l 为截线,因此 A_n 必在 l 上单调趋于 A,但由于 $A=\varphi(0, A)$,故必有 $A_n=A$,即 $\gamma^+(A_0)$必是闭轨.

若 $A\notin\gamma^+(A_0)$,则由 $A\in\Omega(A_0)$知 $\gamma(A)\subset\Omega(A_0)$,于是 $\Omega(A)$非空,取 $A^*\in\Omega(A)$,则存在 $t'_m\to+\infty$使 $A^*_m\equiv\varphi(t'_m, A)\to A^*$. 不妨设所有点 $A^*_m(m\geqslant1)$位于过点 A^* 的截线 l^* 上. 由轨线的不相交性知,或者 $A^*_m=A^*_1=A^*$,此时 $\gamma(A)$为闭轨;或者 A^*_2 严格介于 A^*_1 与 A^*_3 之间,且 A^*_2 不可能成为 $\gamma^+(A_0)$的聚点,即 $A^*_2\notin\Omega(A_0)$,此与 $\gamma(A)\subset\Omega(A_0)$矛盾. 证毕.

由指标定理知,上述定理中的区域 G 不能是单连通的. 在许多实际应用中我们可构造具两个边界的环域 G,使其内不含方程的奇点,而且从 G 的边界上任一点出发的正半轨线恒位于 G 中,则由定理 2.6 知,G 中必有闭轨,这一结论常称为环域定理. 若 G 的边界上含有的轨线的内、外切点,则此时 G 内可能有闭轨也可

能无闭轨，有关这方面的讨论叶彦谦在其专著[138]中有详细的讨论.又一般地可证任一有界正半轨的正极限集或是闭轨或是奇闭轨或是奇点.对有界负半轨的负极限集有同样结论.

作为定理2.6对较一般方程(2.1)的应用，我们有

定理2.7 设(2.1)满足

(i) 存在常数 $a_1<0<a_2$ 及 C^1 函数 $F(x, y)$，满足 $\lim\limits_{|x|+|y|\to\infty} F(x, y)=+\infty$ 且当 $x\notin[a_1, a_2]$，$|y|<\infty$ 时，$PF_x+PF_y\leqslant 0$；

(ii) 存在 $N>0$ 及 $|y|\geqslant N$ 上的连续函数 $R(y)>0$ 使

$$\int_N^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{R}=+\infty, \int_{-N}^{-\infty}\frac{\mathrm{d}y}{R}=-\infty,$$

$$yP(x, y)>0, \frac{Q}{P}\leqslant R(y), x\in[a_1, a_2], |y|\geqslant N;$$

(iii) 存在 $(-\infty, a_1]$ 上的连续函数 $p(x)$ 及有限集 $E\subset(-\infty, a_1]$，使 p 对 $x\notin E$ 可微，且 $y_1=p(a_1)\leqslant N$，当 $y>y_1$ 时 $P(a_1, y)>0$，又对一切 $x\leqslant a_1$，$x\notin E$ 有

$$Q(x, p(x))\leqslant p'(x)P(x, p(x));$$

(iv) 方程(2.1)只有有限个奇点，均位于区域 $a_1<x<a_2$，$|y|<\infty$ 中，且每个奇点或是完全不稳定的或是具正发散量的鞍点，则(2.1)必有非平凡的闭轨.

证明 设 L_1 表示曲线 $y=p(x)$，$x\leqslant a_1$，由条件(iii)有

$$(p'(x), -1)\cdot(P(x, p(x))), Q(x, p(x))\geqslant 0,$$

$$x\leqslant a_1, x\notin E.$$

由于(2.1)在 $x\leqslant a_1$ 中无奇点，由上述不等式知(2.1)从 L_1 上任一点出发的正半轨必进入 L_1 的下方.设 $A_1(a_1, y_1)$ 为 L_1 的端点，又取点 $A_2(a_1, y_2)$，$y_2>N$，由于当 $y>y_1$ 时 $P(a_1, y)>0$，(2.1)在线段 $L_2=\overline{A_1A_2}$ 上任一点出发的正半轨必进入其右方.设

$$L_3:\ \int_{y_2}^{y}\frac{\mathrm{d}u}{R(u)}=x-a_1,\ a_1\leqslant x\leqslant a_2,$$

由条件(ii)和比较定理,L_3 必与直线 $x=a_2$ 交于某点 $A_3(a_2, y_3)$,且当 $y_2\to+\infty$时有 $y_3\to+\infty$,并且(2.1)从 L_3 上任一点出发的正半轨进入其下方.又设

$$L_4:\ F(x, y)=F(A_3),\ x\geqslant a_2,$$

由条件(i),除 A_3 外,L_4 必另有端点 $A_4(a_2, y_4)$,且当 $y_3\to+\infty$ 时,有 $y_4\to-\infty$,而且(2.1)从 L_4 上任一点出发的正半轨都进入其左方.再设

$$L_5:\ \int_{y_4}^{y}\frac{\mathrm{d}u}{R(u)}=x-a_2,\ a_1\leqslant x\leqslant a_2,$$

$$L_6:\ F(x, y)=F(A_5),\ x\leqslant a_1,$$

其中 $A_5(a_1, y_5)$表示 L_5 的左端点,则同上可证,(2.1)从 $L_5\cup L_6$ 上任一点出发的正半轨必进入其上方.于是注意到当 $y_2\to+\infty$时,有$y_5\to-\infty$,且 L_1 总是固定的,曲线 L_6 必交 L_1 于某点 A_6(只要 y_2 适当大),于是我们做出了单闭曲线 $L=\overbrace{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_1}$,使得(2.1)从 L 上任一点出发的正半轨必恒在L 之内部.见图 2.1.

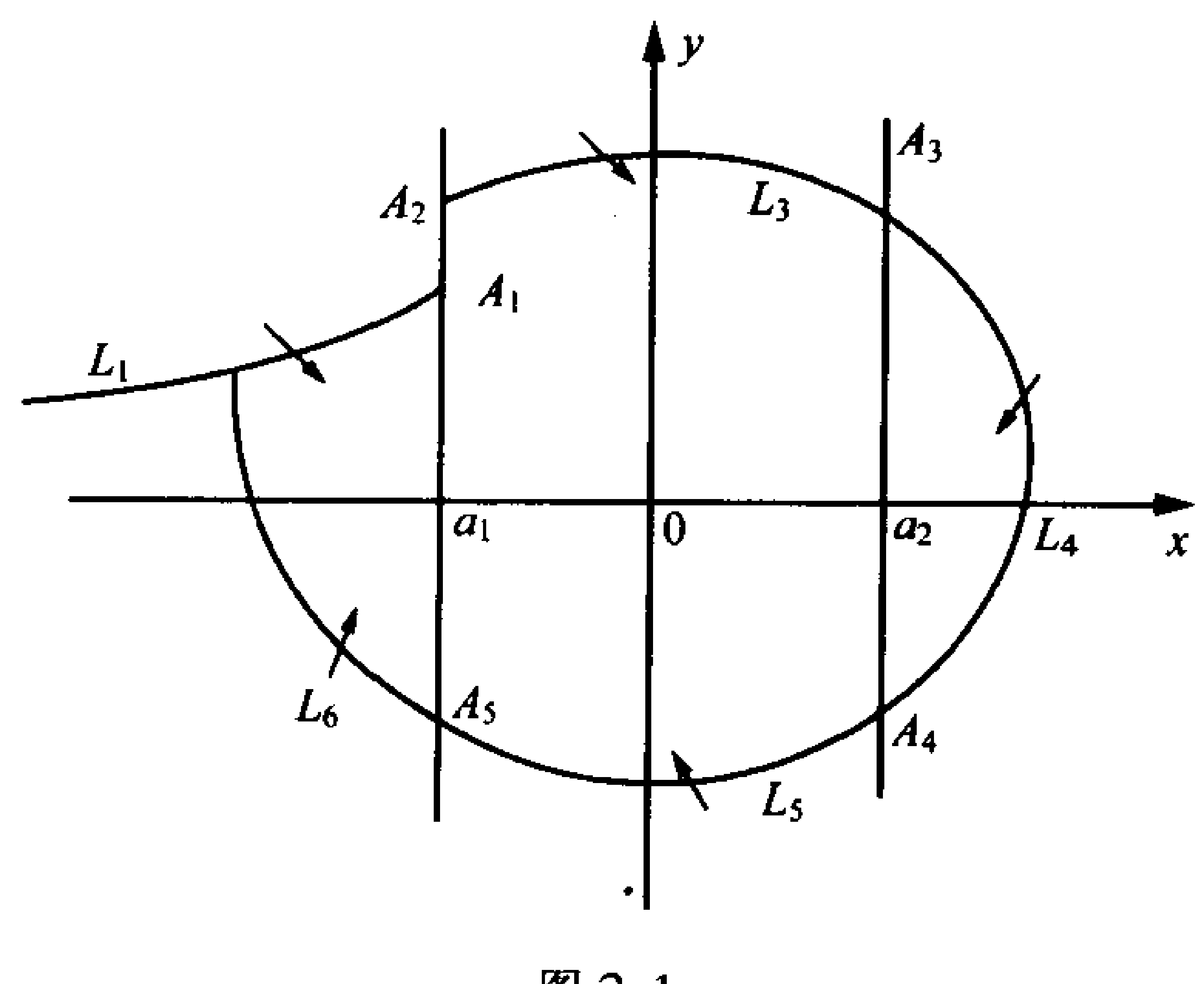


图 2.1

于是由条件(iv)必有点 $A_0\in L$ 使 $\gamma^+(A_0)$有界且不直接趋于(2.1)的奇点,即 $\Omega(A_0)$必含有常点.往证 $\Omega(A_0)$必是闭轨.事实上,作为正极限集,$\Omega(A_0)$必为外侧稳定的,若它是奇闭轨,则其上的奇点只可能是鞍点,由于(2.1)在每个鞍点处的发散量为正,由引理 3.4 可证 $\Omega(A_0)$应为外侧不稳定的,矛盾.证毕.

同理可证

定理 2.8 设定理 2.7 的条件(i),(ii)与(iv)成立,又设存在 $[a_2, +\infty)$上的连续函数 $p(x)$及有限集 $E\subset[a_2, +\infty)$使 p 对 $x\geqslant a_2$, $x\notin E$ 可微且 $y_2\equiv p(a_2)\geqslant -N$,对 $y<y_2$ 有 $P(a_2, y)<0$,对 $x\geqslant a_2$, $x\notin E$ 有 $Q(x, p(x))\geqslant p'(x)P(x, p(x))$,则(2.1)必有非平凡闭轨.

2.3 Dulac 函数法与多个极限环

由定理 2.6 知在一个不含(2.1)的奇点但含一条正半轨的平面环域中必有(2.1)的闭轨线.这一结果给出环域中存在闭轨的一个充分条件.一个自然的问题是如何把这一结果推广到一多连通域呢? 这不是一个简单的问题.叶彦谦通过深入研究极限环的存在性与内外切点的关系提出了一个猜想,并给出了(2.1)在一个 n 连通区域中存在 $n-1$ 个闭轨的条件,后来这一猜想由张祥所证明.下面介绍这一工作(此处证略,详见[144]).

定理 2.9 设 G 为一个 n - 连通闭域(即 G 有一条外边界 L_1 及 $n-1$ 条内边界),$n\geqslant 3$.如果下列条件满足

(1) 方程(2.1)在 G 的内边界上任一点出发的正半轨都位于 G 中且 G 中不含(2.1)奇点;

(2) 方程(2.1)的轨线在外边界 L_1 上有 m_1 个内切点,m_2 个外切点且 $m_1=m_2+2(n-2)$;

(3) 方程(2.1)过 L_1 上任一内切点的负半轨不恒位于 G 中;

则方程(2.1)在 G 中必有 $n-1$ 个闭轨线.

例如,若 $n=3$, $m_1=2$, $m_2=1$,则方程(2.1)在 G 中的相图如图 2.2 所示.

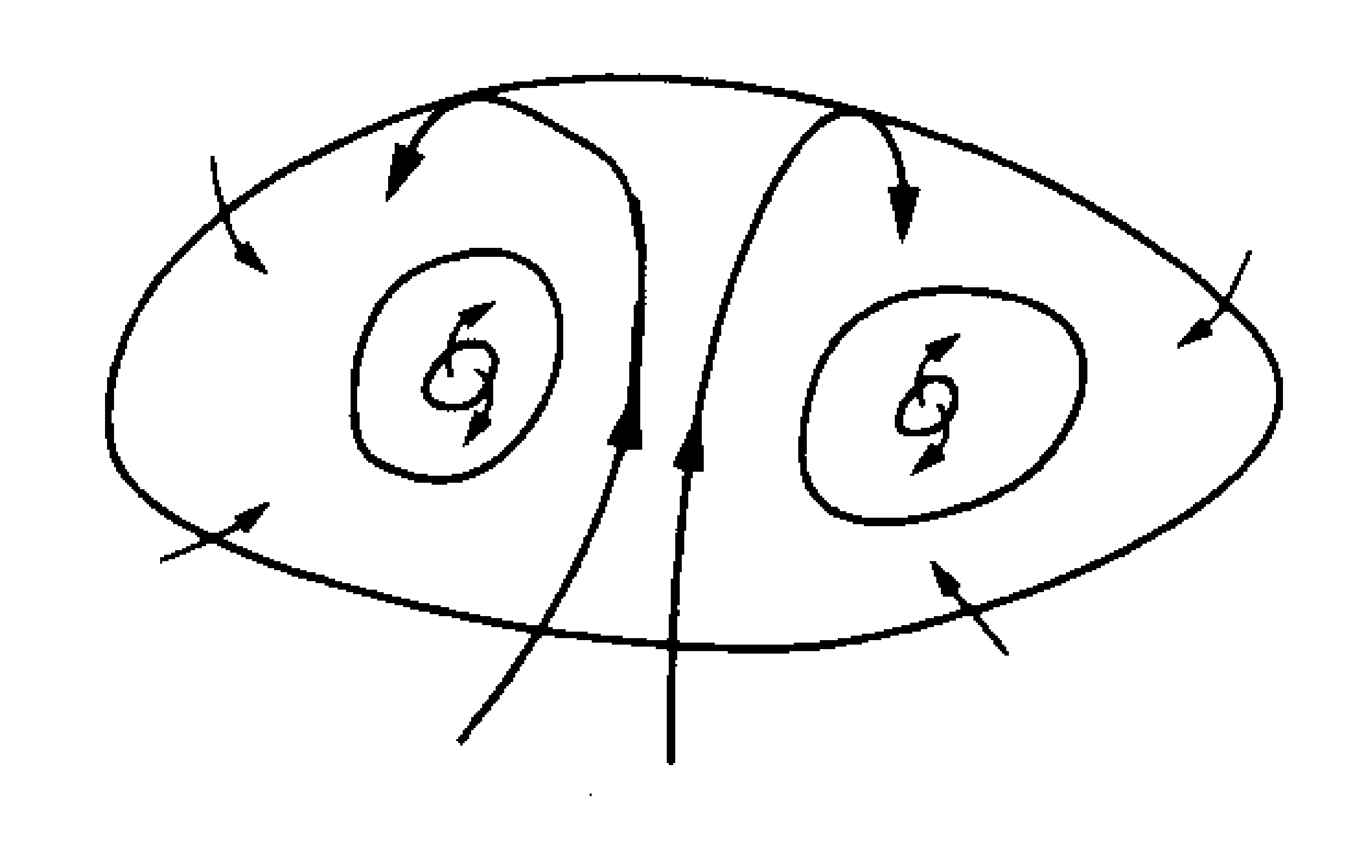


图 2.2

前面我们用 Dulac 函数法给出了(2.1)在一单连通区域内不存在极限环的准则,实际上这一方法可推广到多连通域而获得(2.1)存在惟一或惟二极限环的条件,即有下列定理.

定理 2.10 设 G 为平面 n - 连通区域,如果存在 G 上的 C^1 函数 $B(x, y)$ 使

$$\operatorname{div}(BP, BQ) \equiv (BP)_x + (BQ)_y$$

在 G 中常号且在 G 的任何非空开子集中不恒为零,则(2.1)在 G 中至多有 $n-1$ 个极限环.

证明 首先仿定理 2.3 ,利用 Green 公式可证(2.1)在 G 中的任何极限环必包围至少一个边界圆,而由任何两个或两个以上极限环为边界的复连通域中必有 G 的边界圆,由此易知,(2.1)在 G 中至多有 $n-1$ 个极限环.

上述定理只给出了(2.1)在一 n - 连通域 G 上至多有 $n-1$ 个极限环的条件,下列定理给出(2.1)在一单连通区域上至多有 $n-1$ 个极限环的条件.

定理 2.11 设(2.1)满足下列条件:

(i) 存在 C^1 函数 $H(x, y)$ 及常数 $h_1 < h_2$,使得区域 $D_2 = \{(x, y) | H(x, y) < h_2\}$ 包含一单连通开集 D_{20}, 而区域 $D_1 = \{(x, y) | H(x, y) \leqslant h_1\}$ 为 D_{20} 的子集且 D_1 有 $n-1$ 条边界曲线, $n \geqslant 1$;

(ii) 存在常数 $b \in R$ 与 $h_0 \in (h_1, h_2)$,使得函数

$$F(x,y)=[H(x,y)-h_0](P_x+Q_y)+b(PH_x+QH_y)$$

在区域

$$D=\{(x,y)\in D_{20}\mid h_1<H<h_2\}=D_{20}-D_1$$

中常号且在 D 的任何非空开子集中不恒为零,则(2.1)在 D 中至多有 $n-1$ 个极限环.如果再设函数 PH_x+QH_y 在 D_1 中常号且沿(1.1)在 D_1 中的闭轨不恒为零,则(2.1)在 D_{20} 中至多有 $n-1$ 个极限环.

证明 令

$$B(x,y)=(H(x,y)-h_0)^b,\ (x,y)\in D,$$

则

$$\operatorname{div}(BP,BQ)=F(x,y)[H(x,y)-h_0]^{b-1},\ (x,y)\in D,\tag{2.5}$$

于是由条件(ii)与定理 2.1 知在 D 中至多有 $n-1$ 个极限环,因此定理的前半部分获证.为证后半部分,由所设条件易知区域 D_1 为负向不变集且(2.1)不存在与 D_1 相交的闭轨,从而定理得证,证毕.

注 2.1 由定理 2.11 的证明知,如果沿 D 的任何非平凡闭曲线都有 $F\neq0$,则(2.1)在 D 中的任何极限环都是双曲的,且具有相同的稳定性.

以上所介绍定理中,定理 2.2,2.3,2.6 与 2.10 为熟知的经典结果,定理 2.1 属于叶彦谦,定理 2.9 属于叶彦谦和张祥,其余五个定理均取自[60],下面给出若干应用例子.

例 2.1 考虑下列系统

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-(x^2-a^2)(y^2+1)y-x(1-bx),\tag{2.6}$$

可证,若 $0\leqslant b\leqslant\frac{3}{4}$ 则存在 $a^*\in(0,2)$,使(2.6)存在极限环当且

仅当 $0<a<a^*$.

事实上,首先注意到当 $a\leqslant 0(>0)$ 时原点为稳定(不稳定)奇点. 又注意到(2.6)关于 a 形成旋转向量场,于是当 $a>0$ 小时(2.6)有极限环 $L(a)$,随着 a 的增加而单调扩大. 其次,由旋转向量场理论,只需证明当 $a=2$ 时 $L(a)$ 已经不存在了. 为此,取

$$(x_0,\ y_0)=(-1,\ 0),\ S(x)=a-x^2,\ R(y)=1+y^2,$$

$$F(x,\ y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{b}{3}x^3,$$

则由 $0\leqslant b\leqslant\frac{3}{4}$ 知

$$F(x_0,\ y_0)\leqslant F(\sqrt{2},\ 0),\ M=\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{x_0^3}{3}-2x_0,$$

$$PF_x+QF_y=(2-x^2)(1+y^2)y^2\geqslant 0(\text{当 } F\leqslant F(x_0,\ y_0)\text{ 时}),$$

由此及定理 2.4 即得证明.

与上类似,对 $a=2$,取 $(x_0,\ y_0)=(0,\ 1)$,$p(x)=1$,$F(x,\ y)=x^2+y^2$,利用定理 2.4 可证

例 2.2 方程

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-y(a-x^2-x^3-y^2)-x$$

存在极限环当且仅当 $0<a<a^*$,其中 $a^*\in(0,\ 2)$.

例 2.3 考虑

$$\dot{x}=3(e^y-1)-x^3+3x,\ \dot{y}=-\frac{2xe^y}{1+x^2},\qquad(2.7)$$

可证(2.7)存在极限环.

事实上,取 $a_2=-a_1=\sqrt{3}$,$p(x)=x+4(x\leqslant-\sqrt{3})$及

$$F(x,\ y)=\ln(1+x^2)+3(y+e^{-y}-1),$$

$$R(y)=e^y/(3|e^y-1|-2)(|y|\geqslant 3),$$

则

$$PF_x + QF_y = 2x^2(3 - x^2)/(1 + x^2) \geqslant 0, \ |x| \leqslant \sqrt{3},$$

$$\frac{-2x}{1 + x^2} e^{p(x)} \leqslant e^{p(x)}, \ x \leqslant -\sqrt{3},$$

$$2e^{p(x)} - 3 > -3 > x^3 - 3x, \ x \leqslant -3,$$

$$2e^{p(x)} - 3 > 2e - 3 > 0 \geqslant x^3 - 3x, \ -3 \leqslant x \leqslant -\sqrt{3},$$

由此易得

$$Q(x, \ p(x)) \leqslant p'(x) P(x, \ p(x)), \ x \leqslant -\sqrt{3},$$

于是由定理 2.7 即得结论.

例 2.4 方程

$$\dot{x} = y, \ \dot{y} = -(x^2 - a)(2 + x)y - x(1 - x^2) \qquad (2.8)$$

有极限环当且仅当 $0<a<a^*$,其中 $a^* \in (0, \ 1)$,且极限环是惟一、双曲且稳定的.

事实上,首先由

$$\operatorname{div}(2.8)|_{a=1} = (1 - x^2)(2 + x) > 0, \ |x| < 1,$$

可知当 $a=1$ 时,(2.8)不存在极限环(因为其极限环必位于带域 $|x|<1$ 内).再由旋转向量场理论知存在 $a^* \in (0, \ 1)$,使(2.8)有极限环当且仅当 $0<a<a^*$.

其次,设 $H(x, \ y) = y^2/2 + x^2/2 - x^4/4$,并取

$$h_0 = h_1 = H(\sqrt{a}, \ 0), \ h_2 = +\infty, \ b = -\frac{1}{2},$$

$$D_{20} = \{(x, \ y) \mid |x| < 1\},$$

由定理 2.11 易知结论成立.

例 2.5 考虑三次系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + ax(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} &= x + by(x^2 + y^2 - 1), \end{aligned} \qquad (2.9)$$

其中 a, b 为常数且 $|a|+|b|\neq 0$. 易知(2.9)恒有闭轨 $L: x^2+y^2=1$. 可证

(i) 若 $a+b=0$, $a\neq 0$, 则 L 为(2.9)的非孤立闭轨;

(ii) 若 $a+b\neq 0$,则 L 为(2.9)的惟一的极限环且当 $a+b<0(>0)$时稳定(不稳定).

首先设 $a+b=0$, $a\neq 0$,则在 L 两侧(2.9)等价于 Hamilton 系统

$$\dot{x}=-\frac{y}{x^2+y^2-1}-bx,\ \dot{y}=\frac{y}{x^2+y^2-1}+by,\tag{2.10}$$

其 Hamilton 函数为

$$H(x,y)=\frac{1}{2}\ln|x^2+y^2-1|+bxy,\tag{2.11}$$

且易知当 $b^2>1(<1)$时原点为(2.10)的鞍点(中心),当 $b^2=1$ 时,由(2.11)知

$$H(x,y)=-\frac{1}{2}\left[(x-by)^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2(1+O(x^2+y^2))\right],$$

因此知原点为中心. 注意到(2.10)在变换$(y,t,b)\to(-y,-t,-b)$下不变,我们不妨设 $b>0$. 易知当 $b>1(0<b\leqslant 1)$时除了原点外(2.10)另有四个(二个)奇点 $\pm(x_0,x_0)$, $\pm(x_1,x_1)(\pm(x_1,-x_1))$,其中 $x_0=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{b}\right)}$, $x_1=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{b}\right)}$.

令

$$J(x,y)=\begin{bmatrix}3ax^2+ay^2-a & -1+2axy\\ 1+2bxy & 3by^2+bx^2-b\end{bmatrix}.$$

当 $a=-b$ 时成立

$$\det J(\pm x_0, \pm x_0) = 4(b-1) > 0 \ (对\ b > 1),$$

$$\det J(\pm x_1, \mp x_1) = -4(b+1) < 0 \ (对\ b > 0),$$

由此知$\pm(x_0, x_0)$为中心奇点，$\pm(x_1, -x_1)$为鞍点，于是当$a = -b \neq 0$时(2.9)的相图如图2.3所示.

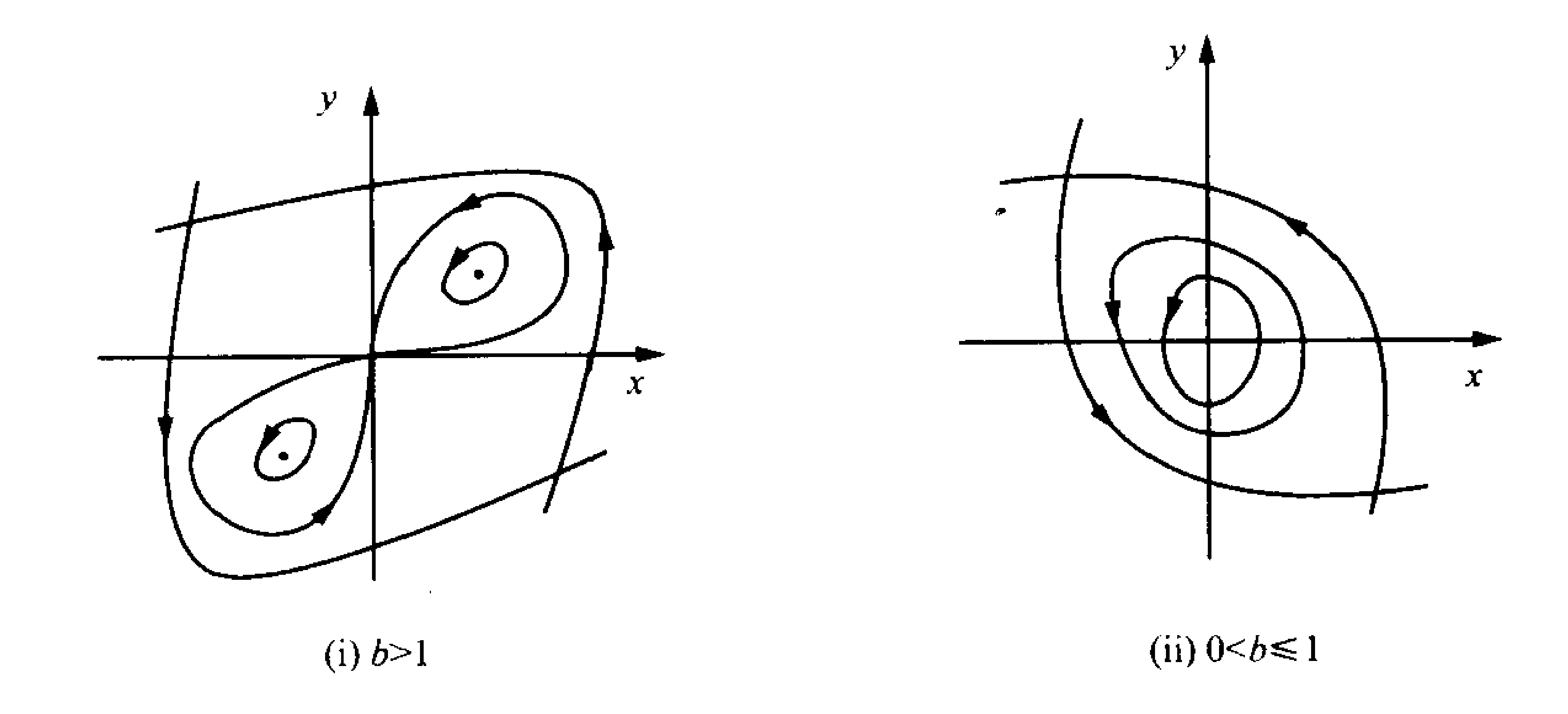


图 2.3

现设$a+b\neq 0$，在定理2.11中取$H = x^2 + y^2$，$h_0 = 1$，$b = -1$，则

$$\operatorname{div}\left(\frac{P}{H-1}, \frac{Q}{H-1}\right) = \frac{F(x, y)}{(H-1)^2},$$

$$F(x, y) = (a+b)(x^2 + y^2 - 1)^2. \qquad (2.12)$$

及

$$PH_x + QH_y = 2(x^2 + y^2 - 1)(ax^2 + by^2).$$

首先取$h_1 = 0$，$h_2 = 1$及$D_{20} = D_2$，则由定理2.11知(2.9)在L内没有闭轨.再取$h_1 = 1$，$h_2 = +\infty$及$D_{20} = D_2$，由(2.12)及定理2.11的注知如果(2.9)有极限环$L' \neq L$，则L'必包围L且当$a+b<0(>0)$时稳定(不稳定)，为证L'不存在，只需证L外部的任何奇点都有负指标.为此，可设$ab<0$.当$-1 \leqslant ab < 0(ab < -1)$

时(2.9)有三个(五个)奇点,当在 L 外只有两个奇点 $\pm(x_1, y_1)$,其中

$$y_1^2 = \frac{1+K}{1+K^2b^2},$$
$$x_1 = -Kby_1,\ x_1 > 0,\ K = \sqrt{\frac{-1}{ab}}. \tag{2.13}$$

不难知道 $\det J(\pm x_1, \pm y_1) = J_1 + J_2$,其中

$$J_1 = ab[(3K^2b^2+1)y_1^2 - 1][(3+K^2b^2)y_1^2 - 1],$$
$$J_2 = (1-2b^2Ky_1^2)(1+2abKy_1^2).$$

由(2.13),

$$J_1 = \frac{ab}{(a-b)^2}[(a-3b)K-2b][(3a-b)K+2a]$$
$$= \frac{1}{(a-b)^2}[-3a^2-3b^2+10ab-4a^2b^2+2ab(a^2+b^2-6ab)K],$$
$$J_2 = \frac{1}{(a-b)^2}(a+b-2ab^2K)(2a^2bK-a-b)$$
$$= \frac{1}{(a-b)^2}[4a^2b^2-(a+b)^2+2ab(a+b)^2K],$$

于是

$$J_1 + J_2 = \frac{1}{(a-b)^2}[-4(a-b)^2+4ab(a-b^2)K]$$
$$= 4(abK-1) = -4(1+K)/K < 0,$$

由此即得结论.

§3 Liénard 系统的 Hopf 分支

所谓 Liénard 方程一般是指下述二阶方程:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0,$$

该方程等价于二维系统

$$\dot{x} = y - F(x),\ \dot{y} = -g(x),$$

其中 $F(x) = \int_0^x f\mathrm{d}x$.本节我们将考虑下列形式上更一般的方程

$$\dot{x} = p(y) - F(x, a),\ \dot{y} = -g(x), \tag{3.1}$$

其中 F, g 与 p 均为 C^∞ 函数,$a \in R^n, n \geq 1$, 且满足

$$p(0) = g(0) = F(0, a) = 0,\ F_x(0, a_0) = 0,\ a_0 \in R^n,$$

$$p'(0) = p_0 > 0,\ g'(0) = g_0 > 0. \tag{3.2}$$

于是当 $|a - a_0|$ 充分小时,原点为(3.1)的焦点或中心.以下,我们给出确定(3.1)在原点的焦点阶数与环性数的两种方法.

3.1 幂级数方法

令

$$G(x) = \int_0^x g(u)\mathrm{d}u,\ P(y) = \int_0^y p(u)\mathrm{d}u,$$

并对(3.1)引入 C^∞ 变换

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{sgn}x\sqrt{G(x)} = x\sqrt{g_0/2} + O(x^2), \\ v &= \mathrm{sgn}y\sqrt{P(y)} = y\sqrt{p_0/2} + O(y^2), \end{aligned} \tag{3.3}$$

则可得新系统

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{2u}g(X(u))[p(Y(u)) - F(X(u), a)], \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{2v}p(Y(v))g(X(u)), \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 $x = X(u)$, $y = Y(v)$ 为(3.3)的逆变换.由(3.3)知

$$X(u)=\sqrt{2/g_0}\,u+O(u^2),\ u^2\equiv G(X(u)),$$
$$Y(v)=\sqrt{2/p_0}\,v+O(v^2),\ v^2\equiv P(Y(v)),\tag{3.5}$$

再对(3.4)引入时间变换

$$\mathrm{d}\tau=\frac{g(X(u))p(Y(v))}{2uv}\mathrm{d}t,$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}=v-K(v)F^*(u,a),\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}=-u,\tag{3.6}$$

其中

$$K(v)=\frac{v}{p(Y(v))}=\frac{1}{\sqrt{2p_0}}+O(v)\in C^\infty,$$
$$F^*(u,a)=F(X(u),a)=O(u)\in C^\infty,\tag{3.7}$$

现设$(u(\tau,r_0,a),v(\tau,r_0,a))$为(3.6)满足$u(0,r_0,a)=0$，$v(0,r_0,a)=r_0$的解，由(3.2)知存在惟一的时间$\tau_0(r_0,a)=2\pi+O(|r_0|+|a-a_0|)\in C^\infty$使$u(\tau_0,r_0,a)=0$. 定义

$$\mathrm{d}(r_0,a)=v(\tau_0(r_0,a),r_0,a)-r_0.$$

上述函数即为(3.6)或(3.1)的后继函数，且(3.1)在原点附近有一个闭轨当且仅当该函数在$r_0=0$附近有两个根(一正一负). 令

$$F_e(u,a)=\frac{1}{2}[F^*(u,a)+F^*(-u,a)],$$

$$F_0(u,a)=\frac{1}{2}[F^*(u,a)-F^*(-u,a)],$$

则F_e为偶函数，F_0为奇函数，且

$$F^*(u,a)=F_e(u,a)+F_0(u,a).\tag{3.8}$$

注意到下述系统

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = v - K(v)F_e(u, a), \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = -u \qquad (3.9)$$

在原点有一中心.若用 $\mathrm{d}_e(r_0, a)$表示(3.9)的后继函数,则

$$\mathrm{d}_e(r_0, a) \equiv 0, \ |r_0| \ll 1. \qquad (3.10)$$

我们先来建立函数 F_0 与 F, G 之间的关系.

引理 3.1 设(3.2)成立,又设有形式展式

$$F(\alpha(x), a) - F(x, a) = \sum_{i \geqslant 1} B_i(a) x^{i+2m}, \qquad (3.11)$$

其中 $m \geqslant 0$, $\alpha(x) = -x + O(x^2)$满足 $G(\alpha(x)) \equiv G(x)$,则形式上成立

$$F_0(u, a) = \sum_{i \geqslant 0} A_{2i+1}(a) u^{2i+2m+1}, \qquad (3.12)$$

其中

$$A_{2k+1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{g_0}\right)^{m+k+\frac{1}{2}} B_{2k+1} + L_k(B_1, B_3, \cdots, B_{2k-1}), \ k \geqslant 0, \qquad (3.13)$$

且 $L_0 = 0$, L_k 为$B_1, B_3, \cdots, B_{2k-1}$的线性齐次式($k \geqslant 1$).

证明 由(3.5)知

$$G(X(-u)) \equiv G(X(u)) = u^2, \ X(\mathrm{sgn}x\sqrt{G(x)}) \equiv x,$$

于是

$$X(-\mathrm{sgn}x\sqrt{G(x)}) \equiv \alpha(x),$$

因此由 F_0 的定义知

$$F_0(\mathrm{sgn}x\sqrt{G(x)}, a) \equiv \frac{1}{2}[F(x, a) - F(\alpha(x), a)],$$

从而由(3.11)知

$$F_0(\operatorname{sgn}x\sqrt{G(x)},\ a)\equiv-\frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 1}B_i(a)x^{i+2m},$$

又注意到(3.5)式可推得

$$\begin{aligned}F_0(u,\ a)&=-\frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 1}B_i x^{i+2m}\\&=-\frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 1}B_i\left(\frac{2}{g_0}\right)^{m+\frac{i}{2}}u^{i+2m}(1+O(u)),\end{aligned}\tag{3.14}$$

因此,如果(3.12)形式上成立,则将之与(3.14)比较可得

$$A_1=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{g_0}\right)^{m+\frac{1}{2}}B_1,\ \sum_{j=1}^{2k-1}B_jN_{2k,j}+B_{2k}=0,$$

$$A_{2k+1}=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{g_0}\right)^{m+k+\frac{1}{2}}B_{2k+1}+\sum_{j=1}^{2k}B_jN_{2k+1,j},\ k\geqslant 1,$$

其中 $N_{ij}(2\leqslant i,\ 1\leqslant j\leqslant i-1)$为常数.由这些等式可知存在线性齐次式 L_k^* 使

$$B_{2k}=L_k^*(B_1,B_3,\cdots,B_{2k-1}),\ k\geqslant 1,\tag{3.15}$$

即得(3.13).证毕.

引理 3.2 设(3.2)成立,且(3.11)形式上成立,则当$|a-a_0|$充分小时形式上成立

$$d(r_0,\ a)=\sum_{i\geqslant 1}d_i(a)r_0^{2m+i},\tag{3.16}$$

其中

$$\begin{aligned}&d_1=B_1N_0^*(B_1),\ d_{2j}=O(|B_1,B_3,\cdots,B_{2j-1}|),\\&d_{2j+1}=B_{2j+1}N_j^*(B_1)+O(|B_1,B_3,\cdots,B_{2j-1}|),\ j\geqslant 1,\end{aligned}\tag{3.17}$$

而 $N_j^* \in C^\infty$ 且 $N_j^*(0)>0$, $j\geqslant 0$.

证明 分别对(3.6)与(3.9)引入极坐标 $u=r\cos\theta$, $v=r\sin\theta$,则可得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\cos\theta K(r\sin\theta)F^*(r\cos\theta,\ a)}{1-\sin\theta K(r\sin\theta)F^*(r\cos\theta,\ a)/r}$$
$$\equiv R^*(\theta,\ r,\ a),\tag{3.18}$$

与

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\cos\theta K(r\sin\theta)F_e(r\cos\theta,\ a)}{1-\sin\theta K(r\sin\theta)F_e(r\cos\theta,\ a)/r}$$
$$\equiv R(\theta,\ r,\ a).\tag{3.19}$$

设 $r(\theta,\ r_0,\ a)$表示(3.18)满足 $r\left(\frac{\pi}{2},\ r_0,\ a\right)=r_0$ 的解,而 $r_e(\theta,\ r_0,\ a)$表示(3.19)满足

$$r_e\left(-\frac{\pi}{2},\ r_0,\ a\right)=r\left(-\frac{\pi}{2},\ r_0,\ a\right)\tag{3.20}$$

之解,则显然有

$$d(r_0,\ a)=r\left(-\frac{3\pi}{2},\ r_0,\ a\right)-r\left(\frac{\pi}{2},\ r_0,\ a\right),\tag{3.21}$$

及

$$r_e\left(\frac{\pi}{2},r_0,\ a\right)=r_e\left(-\frac{3\pi}{2},\ r_0,\ a\right),\ |r_0|\ll 1.\tag{3.22}$$

令

$$C(\theta,\ A_1^*)=\frac{K(0)A_1^*\cos^2\theta}{1-K(0)A_1^*\sin\theta\cos\theta},\ A_1^*=\begin{cases}A_1,\ m=0,\\0,\ m\geqslant 1,\end{cases}$$

则 $R^*=C(\theta,\ A_1^*)r+O(r^2)$, $R=O(r^2)$,从而由常数变易公式可得

$$r(\theta, r_0, a) = r_0 \exp\int_{\pi/2}^{\theta} C(u, A_1^*)\mathrm{d}u + O(r_0^2),$$

$$r_e(\theta, r_0, a) = r_0 + O(r_0^2), \tag{3.23}$$

由此及中值公式又有

$$R(\theta, r(\theta, r_0, a), a) - R(\theta, r_e(\theta, r_0, a), a)$$

$$= [r(\theta, r_0, a) - r_e(\theta, r_0, a)]O(r_0), \tag{3.24}$$

进一步由(3.18)、(3.19)与(3.8)知

$$R^*(\theta, r, a) - R(\theta, r, a) = \frac{\cos\theta KF_0(r\cos\theta, a)}{(1 - \sin\theta KF^*/r)(1 - \sin\theta KF_e/r)},$$

故由(3.12)与(3.23)有

$$R^*(\theta, r(\theta, r_0, a), a) - R(\theta, r(\theta, r_0, a), a)$$

$$= \sum_{i\geqslant 0} A_{2i+1} S_i(\theta, A_1^*) r_0^{2i+2m+2}(1 + O(r_0)), \tag{3.25}$$

其中

$$S_i(\theta, A_1^*) = \frac{K(0)\cos^{2i+2m+2}\theta}{1 - K(0)A_1^* \sin\theta\cos\theta}$$

$$\cdot \exp\left((2i + m + 1)\int_{\pi/2}^{\theta} C(u, A_1^*)\mathrm{d}u\right),$$

由(3.18)、(3.19)与(3.24)又得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(r - r_e) = (r - r_e)O(r_0) + R^*(\theta, r, a) - R(\theta, r, a),$$

从而利用(3.20)与(3.25)及常数变易公式有

$$r\left(\frac{\pi}{2}, r_0, a\right) - r_e\left(\frac{\pi}{2}, r_0, a\right)$$

$$= \sum_{i\geqslant 0} A_{2i+1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} S_i(\theta,\ A_1^*)\mathrm{d}\theta r_0^{2i+2m+1}(1+O(r_0)),$$

$$r\left(-\frac{3\pi}{2},\ r_0,\ a\right)-r_e\left(-\frac{3\pi}{2},\ r_0,\ a\right)$$

$$= \sum_{i\geqslant 0} A_{2i+1}\int_{-\pi/2}^{-3\pi/2} S_i(\theta,\ A_1^*)\mathrm{d}\theta r_0^{2i+2m+1}(1+O(r_0)),$$

于是由(3.20)～(3.22)可得

$$d(r_0,\ a) = -\sum_{i\geqslant 0} A_{2i+1}N_i(A_1^*)r_0^{2i+2m+1}(1+O(r_0)), \tag{3.26}$$

其中

$$N_i(A_1^*) = \int_{-3\pi/2}^{\pi/2} S_i(\theta,\ A_1^*)\mathrm{d}\theta,\ i\geqslant 0.$$

将(3.26)写成形式幂级数并与(3.16)相比较可得

$$d_1 = -A_1N_0(A_1^*),\ d_{2j} = O(|A_1, A_3, \cdots, A_{2j-1}|),$$

$$d_{2j+1} = -A_{2j+1}N_j(A_1^*)+O(|A_1, A_3, \cdots, A_{2j-1}|), j\geqslant 1, \tag{3.27}$$

将(3.13)代入(3.27)即得(3.17). 证毕.

由引理 3.2 即得下列定理.

定理 3.1 设(3.2)成立,如果存在 $k\geqslant 1$ 使(3.11)中的系数 B_i 满足

$$B_j(a_0) = 0,\ j = 1,\ \cdots, 2k,\ B_{2k+1}(a_0)\neq 0, \tag{3.28}$$

则对 $m=0$, 当 $a=a_0$ 时原点为(3.1)的 k 阶细焦点, 且当 $B_{2k+1}(a_0)<0(>0)$时为稳定(不稳定)的. 特别地,当 $|a-a_0|$ 充分小时(3.1)在原点的邻域内至多有 k 个极限环.

若当 $a=a_0$ 时(3.1)以原点为中心,则可用下列定理判定原点的环性数.

定理 3.2　设(3.2)成立,如果存在 $k\geqslant 1$ 使有

(i) $B_{2j+1}(a_0)=0,\ j=0,\cdots,k$, 且

$$\operatorname{rank}\left.\frac{\partial(B_1,B_3,\cdots,B_{2k+1})}{\partial(a_1,a_2,\cdots,a_n)}\right|_{a=a_0}=k+1,\ n\geqslant k+1,$$

(ii) 当 $B_{2j+1}=0,\ j=0,\cdots,k$ 时, $F(\alpha(x),\ a)\equiv F(x,\ a)$,

则当 $|a-a_0|$ 充分小时(3.1)在原点的 Hopf 环性数为 k.

证明　不失一般性可设

$$\det=\left.\frac{\partial(B_1,B_3,\cdots,B_{2k+1})}{\partial(a_1,a_2,\cdots,a_n)}\right|_{a=a_0}\neq 0.$$

由隐函数定理知方程组

$$b_{j+1}=B_{2j+1}(a),\ j=0,\cdots,k$$

有惟一解组

$$a_j=a_j^*(b_1,\cdots,b_{k+1},\ a_{k+2},\cdots,a_n),\ j=1,\cdots,k+1.$$

由条件(ii)知当 $b_j=0,\ j=0,\cdots,k+1$ 时 $F(\alpha(x),\ a)\equiv F(x,\ a)$,从而由第四章引理 1.3 知此时有 $d(r_0,\ a)=0$,于是 d 可以写成:

$$d(r_0,\ a)=r_0^{2m+1}\sum_{j=1}^{k+1}b_jr_0^{2j-2}P_j(r_0,\ b_1,\cdots,b_{k+1},\ a_{k+2},\ \cdots,a_n)$$

$$\equiv r_0^{2m+1}d^*(r_0,\ b_1,\cdots,b_{k+1},\ a_{k+2},\cdots,a_n),$$

其中 $P_j\in C^\infty$, 且(对 $|a-a_0|\ll 1$)

$$P_j(0,\ b_1,\cdots,b_{k+1},\ a_{k+2},\cdots,a_n)=N_{j-1}^*(b_1)>0.$$

利用 d^* 的上述表达式,与第四章定理 1.4 完全类似可证 d^* 关于 r_0 至多有 $2k$ 个根,且其中至多有 k 个正根.又可适当选取 a 使

d^* 恰有 k 个正根. 于是定理证毕.

若设

$$F(\alpha(x), a) - F(x, a)$$
$$= (\alpha(x) - x)\sum_{i\geqslant 0} C_{i+1}(a)x^{i+2m}, \qquad (3.29)$$

则注意到 $\alpha(x) = -x + O(x^2)$,将(3.11)与(3.29)进行比较可得

$$B_1 = -2C_1, \cdots, B_j = -2C_j + O(|C_1, \cdots, C_{j-1}|),\ j \geqslant 2,$$

于是由(3.15)可知

$$C_{2j} = O(|C_1, C_3, \cdots, C_{2j-1}|),\ j \geqslant 1,$$

$$B_{2j+1} = -2C_{2j+1} + O(|C_1, C_3, \cdots, C_{2j-1}|),\ j \geqslant 1.$$

于是与第四章定理 1.5 类似可证

定理 3.3 设(3.2)成立,又设 F 关于 a 为线性的,且存在 $k\geqslant 1$ 使

(i) $n\geqslant k+1$,且

$$\operatorname{rank} \left.\frac{\partial(B_1, B_3, \cdots, B_{2k+1})}{\partial(a_1, a_2, \cdots, a_n)}\right|_{a=a_0} = k+1, \qquad (3.30)$$

$$\left(\text{或 } \operatorname{rank} \left.\frac{\partial(C_1, C_3, \cdots, C_{2k+1})}{\partial(a_1, a_2, \cdots, a_n)}\right|_{a=a_0} = k+1\right);$$

(ii) 当 $B_{2j+1} = 0$(或 $C_{2j+1} = 0$), $j = 0, \cdots, k$ 时 $F(\alpha(x), a) = F(x, a)$,

则存在 $N_0 > 0$,使对任一 $N > N_0$,当 $|a| \leqslant N$ 时(3.1)在原点的 Hopf 环性数为 k.

上述定理给出了确定 Hopf 环性数的一个幂级数方法. 下面给出计算(3.29)中的系数 C_{2j+1} 的方法步骤. 设

$$F(x, a) = \sum_{i\geqslant 1} F_i x^i,\ G(x) = \sum_{i\geqslant 2} G_i x^i,\ G_2 > 0,$$

则

$$G(\alpha) - G(x) = (\alpha - x)Q(x, \alpha),$$
$$Q(x, \alpha) = \sum_{i\geqslant 2}\sum_{j=0}^{i-1} G_i \alpha^{i-1-j} x^j, \tag{3.31}$$

设

$$\alpha(x) = x(-1 + \alpha_{11}x + \alpha_{12}x^2 + \cdots),$$
$$\alpha^m(x) = x^m \sum_{i\geqslant 0} \alpha_{mi} x^i, \ \alpha_{m0} = (-1)^m, \ m \geqslant 2, \tag{3.32}$$

其中系数 α_{mi} 满足下列递推公式

$$\alpha_{mi} = -\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}(jm + j - i)\alpha_{1j}\alpha_{m,\, i-j}, \ i \geqslant 1, \tag{3.33}$$

将(3.32)代入(3.31)中的 Q 可得

$$Q(x, \alpha(x)) = \sum_{i\geqslant 2}\left(\sum_{j=2}^{i}\sum_{k=1}^{j-1} G_j \alpha_{k,\, i-j+1} + \frac{1}{2}(1 + (-1)^i)G_{i+1}\right)x^i,$$

由于 $Q(x, \alpha(x)) \equiv 0$,故有

$$\alpha_{1,\, i-1} = -\frac{1}{G_2}\sum_{j=3}^{i}\left(\sum_{k=1}^{j-1} G_j \alpha_{k,\, i-j+1} + \frac{1}{2}(1 + (-1)^i)G_{i+1}\right), \ i \geqslant 2, \tag{3.34}$$

利用(3.33)与(3.34)可以计算 $\alpha_{kj}(k, j \leqslant i-1)$及 $\alpha_{1,\, i-1}(i \geqslant 2)$. 例如,先由(3.34),然后由(3.33)再由(3.34)则有

$$\alpha_{11} = -\frac{G_3}{G_2}, \ \alpha_{21} = 2\frac{G_3}{G_2}, \ \alpha_{12} = -\left(\frac{G_3}{G_2}\right)^2.$$

若设

$$F(\alpha(x), a) - F(x, a) = (\alpha(x) - x)S(x, \alpha(x)),$$

则与 $Q(x, \alpha(x))$的表达式类似有

$$S(x, \alpha(x)) = F_1 + \sum_{i\geqslant 2}\left(\sum_{j=2}^{i}\sum_{k=1}^{j-1} F_j \alpha_{k,\, i-j+1} + \frac{1}{2}(1 + (-1)^i)F_{i+1}\right)x^i,$$

从而有

$C_1 = F_1$,

$$C_2 = 0,\ C_{i+1} = \sum_{j=2}^{i} \sum_{k=1}^{j-1} F_j \alpha_{k,\ i-j+1} + \frac{1}{2}(1+(-1)^i)F_{i+1},\ i \geqslant 2. \tag{3.35}$$

例 3.1 考虑 C^∞ 系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= h(y) - (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) K(x), \\ \dot{y} &= -x(1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + x^4 L(x)), \end{aligned} \tag{3.36}$$

其中 $h(0)=0,\ h'(0)>0,\ K(0)\neq 0$. 可证如果 $3b_3 \neq 5b_1 b_2$,则对任一 $N>0$,存在原点的邻域使(3.36)对一切 $|a_i| \leqslant N(i=1,\ 2,\ 3)$在该邻域内的 Hopf 环性数为 2 .

事实上,$G_2=\dfrac{1}{2}$,由(3.33)与(3.34)知

$$\alpha_{11} = -2G_3,\ \alpha_{m1} = (-1)^m 2mG_3,\ m \geqslant 2,\ \alpha_{12} = -4G_3^2,$$

$$\alpha_{m2} = (-1)^m 2m(m+1)G_3^2,\ m \geqslant 2,$$

$$\alpha_{13} = -2[8G_3^3 - 4G_3G_4 + G_5],$$

因此,由(3.35)得

$$C_1 = F_1,\ C_3 = -2G_3F_2 + F_3,\ C_5 = \alpha_{13}F_2 + 8G_3^2F_3,$$

$$\det \frac{\partial(C_1,\ C_3,\ C_5)}{\partial(F_1,\ F_2,\ F_3)} = 2(G_5 - 4G_3G_4).$$

注意到

$$F_1 = a_1K(0),\ F_2 = a_2K(0) + O(a_1),$$

$$F_3 = a_3K(0) + O(|a_1,\ a_2|),$$

$$G_3 = \frac{1}{3}b_1,\ G_4 = \frac{1}{4}b_2,\ G_5 = \frac{1}{3}b_3,$$

由定理 3.3 即得结论.

3.2 曲线积分方法

下面我们给出计算(3.1)的 Hopf 环性数的积分方法.引入下述函数(曲线积分):

$$M(h, a) = \oint_{L_h} F(x, a)\mathrm{d}y, \ 0 \leqslant h \ll 1,$$

其中 L_h 为由 $G(x)+\frac{1}{2}y^2=h$ 定义的单闭曲线且为顺时针定向的,由第四章定理 1.3 知 M 关于 $0\leqslant h\ll 1$ 为 C^{∞} 的,从而对任何自然数 $k\geqslant 1$,可写出

$$M(h, a) = h^m[b_1^*(a)h + b_2^*(a)h^2 + \cdots + b_{k+1}^*(a)h^{k+1} + O(h^{k+2})], \qquad (3.37)$$

其中 $m\geqslant 0$.若(3.1)为多项式系统,则 M 一般有下述形式:

$$M(h, a) = h^m\sum_{i=1}^{k+1}c_i(a)I_i(h) = h^m I_1(h)\sum_{i=1}^{k+1}c_i(a)I_i(h)/I_1(h) \equiv h^m I_1(h)N(h, c), \qquad (3.38)$$

其中 $c=(c_1(a),\cdots, c_{k+1}(a))$.

定理 3.4 设(3.21)成立且 F 关于 a 为线性的,又设存在 $k\geqslant 1$使

(i)

(a) $\operatorname{rank}\dfrac{\partial(b_1^*,\cdots,b_{k+1}^*)}{\partial(a_1,\cdots,a_n)}=k+1,\ n\geqslant k+1,$

(b) 当 $b_j^*=0,\ j=1,\cdots,k+1$ 时 $F(\alpha(x), a)\equiv F(x, a)$,

或

(ii)

(a) M 具有(3.38)的形式且

$$\operatorname{rank}\frac{\partial(c_1,\cdots,c_{k+1})}{\partial(a_1,\cdots,a_n)}=k+1,\ n\geqslant k+1,$$

(b) $I_i(0)=0$, $1\leqslant i\leqslant k+1$, $I'_1(0)\neq0$,且对每个 $c\neq0$,函数 $N(h,c)$以 $h=0$ 为重数至多为 k 的根,

(c) 当 $c_j=0$, $j=1,\cdots,k+1$ 时,$F(\alpha(x),a)\equiv F(x,a)$,则存在 $N_0>0$ 使对每个 $N>N_0$,(3.1)对一切$|a|\leqslant N$ 在原点有环性数k.

证明　先设(i)成立.令 $y_{i0}=(-1)^{i-1}\sqrt{2h}$, $i=1,2$, 且 $x_2\leqslant0\leqslant x_1$满足 $G(x_i(y,h))+\frac{1}{2}y^2\equiv h>0$,则 M 可写为

$$M(h,a)=\int_{y_{20}}^{y_{10}}[F(x_2(y,h),a)-F(x_1(y,h),a)]\mathrm{d}y,\tag{3.39}$$

又设

$$y_i(x,h)=(-1)^{i-1}\sqrt{2(h-G(x))},\ i=1,2,$$

易知 $G(x_i(y_j,h))\equiv G(x)$, $i,j=1,2$, $0\leqslant x\ll1$,从而有

$$x_2(y_j,h)\equiv\alpha(x),\ x_1(y_j,h)\equiv x,\ j=1,2,\ 0\leqslant x\ll1,$$

因此作积分变换 $G(x)=h-\frac{1}{2}y^2$,则

$$\begin{aligned}&\int_{y_{20}}^{0}[F(x_2,a)-F(x_1,a)]\mathrm{d}y\\&=\int_0^{x_0(h)}[F(\alpha(x),a)-F(x,a)]\frac{-g(x)}{y_2}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^{y_{10}}[F(x_2,a)-F(x_1,a)]\mathrm{d}y\\&=\int_0^{x_0(h)}[F(\alpha(x),a)-F(x,a)]\frac{g(x)}{y_1}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中 $x_0(h)=\sqrt{2h/g_0}+O(h)$ 满足 $G(x_0(h))\equiv h$，因此由(3.39)及(3.11)得

$$M(h,a)=\int_0^{x_0(h)}[F(\alpha(x),a)-F(x,a)]\sqrt{\frac{2}{h-G}}\mathrm{d}G$$

$$=\sum_{i\geqslant 1}B_i(a)N_i(h), \tag{3.40}$$

其中(令 $G=h\sin^2 t$)

$$N_i(h)=\sqrt{2}\int_0^{x_0(h)}\frac{x^{i+2m}}{\sqrt{h-G}}\mathrm{d}G=N_{i0}h^{(i+2m+1)/2}(1+O(\sqrt{h})),$$

上式中 $N_{i0}>0$，将上式代入(3.40)，然后与(3.37)相比较可得

$$b_1^*=N_{10}B_1,\ B_2=O(B_1),\ b_2^*=N_{30}B_3+O(|B_1,B_2|),$$

$$B_4=O(|B_1,B_2,B_3|),\ \cdots,$$

$$b_{k+1}^*=N_{2k+1,0}B_{2k+1}+O(|B_1,\cdots,B_{2k}|),$$

由此又得

$$b_j^*=N_{2j-1,0}B_{2j-1}+O(|B_1,B_3,\cdots,B_{2j-3}|),\ j=1,\cdots,k+1,$$

且上式之右为 $B_1,B_3,\cdots,B_{2j-3}$ 的线性式，故有

$$\det\frac{\partial(b_1^*,\cdots,b_{k+1}^*)}{\partial(B_1,B_3,\cdots,B_{2k+1})}=N_{10}N_{30}\cdots N_{2k+1,0}>0,$$

且当 $B_{2j-1}=0,\ j=1,\cdots,k+1$ 时有 $b_j^*=0,\ j=1,\cdots,k+1$. 于是由定理 3.3 即得上述结论.

其次设(ii)成立. 设

$$I_i(h)=\sum_{j=1}^{k+1}I_{ij}h^j+O(h^{k+2}),\ 1\leqslant i\leqslant k+1.$$

由(3.38)，我们有

$$M(h,a)=h^m\left[\sum_{j=1}^{k+1}b_j^*h^j+O(h^{k+2}|c_1,\cdots,c_{k+1}|)\right],$$

其中

$$b_j^*=\sum_{j=1}^{k+1}c_iI_{ij},\ 1\leqslant j\leqslant k+1.$$

由条件(ii)(b)易知$(c_1,\cdots,c_{k+1})=0$当且仅当$(b_1^*,\cdots,b_{k+1}^*)=0$，故有$\det(I_{ij})\neq0$，因此由(ii)(a)知

$$\operatorname{rank}\frac{\partial(b_1^*,\cdots,b_{k+1}^*)}{\partial(a_1,\cdots,a_n)}=k+1,\quad n\geqslant k+1.$$

于是从上半部分的结果即得要证的结论.证毕.

由后面的第5节引理5.2知

引理3.3 设

$$G(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3,\ F(x,a)=\sum_{i=1}^{n}a_ix^i,$$

则定理3.4的条件(ii)对$m=0$，$k=\left[\frac{2n-1}{3}\right]$成立.

因此由定理3.4即知.

定理3.5 设p为一C^∞函数，且$p(0)=0$，$p'(0)>0$，则下述Liénard系统

$$\dot{x}=p(y)-\sum_{i=1}^{n}a_ix^i,\ \dot{y}=-x(1+x)$$

在原点有Hopf环性数$\left[\frac{2n-1}{3}\right]$.

本节以上所有结果均取自文献[46].

下面我们介绍一下有关多项式Liénard系统的焦点判别量的计算和小振幅极限环的个数的一些工作.设有多项式系统

$$\dot{x}=y-F(x),\ \dot{y}=-g(x),\tag{3.41}$$

其中

$$g(x)=x+\sum_{j=2}^{m}b_ix^i,\ F(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ix^i.$$

用 $H(m, n)$表示(3.41)在原点附近的小振幅极限环的最大个数(其中 a_i, b_i 为可变参数). 若 $g(x)=x$,则 $\alpha(x)=-x$,从而由定理 3.3 知 $H(1, n)=\left[\frac{n-1}{2}\right]$. Lloyd 与 Lynch([103])曾证明 $H(m, 2)=\left[\frac{m}{2}\right]$. 由定理 3.5 知 $H(2, n)=\left[\frac{2n-1}{3}\right]$,最近 Christophe 与 Lynch([16])也得到这一结果,其中也用到 Petrov([119])的工作. 此文还证明 $H(m, 3)=\left[\frac{2m+1}{3}\right]$,及 $H(3, n)=2\left[\frac{3(n+1)}{8}\right]$(其中 $2<n\leqslant 50$),$H(m, 4)=2\left[\frac{3(m+2)}{8}\right]$(其中 $1<m\leqslant 50$).

用 L_i 表示(3.41)第 i 个焦点判别量,Gasull 等([28])对 $n=3$, $m=4$ 的情况得到下列三个公式:

$$L_1=\frac{3}{4}\left(-a_3+\frac{2}{3}a_2b_2\right)\quad(\text{当 } a_1=0),$$

$$L_2=\frac{1}{12}(-a_2)(5b_2b_3-3b_4)\quad(\text{当 } L_1=0),$$

$L_3=\frac{1}{384}(-a_2)[-285b_2b_3^2+210a_2^2b_2b_3+240b_2^3b_2-200b_2^2b_4+171b_3b_4-126a_2^2b_4]$,并且当 $a_1=L_1=L_2=L_3=0$ 时原点成为中心.

Lynch([107])对 $m=3$ 的情况给出了前 10 个焦点判别量的公式如下:

$$L_0=-a_1,$$

$$L_1=-a_3+\frac{2}{3}a_2b_2,$$

$$L_2 = -a_5 + \frac{4}{3}b_2A_4,$$

$$L_3 = -a_7 + 2b_2A_6 + \frac{2}{3}b_2b_3A_4,$$

$$L_4 = -a_9 + \frac{8}{3}b_2A_8 + \left(\frac{8}{27}b_2^3 + 2b_2b_3\right)A_6,$$

$$L_5 = -a_{11} + \frac{10}{3}b_2A_{10} + \left(\frac{32}{27}b_2^3 + 4b_2b_3\right)A_8 + \frac{1}{2}b_2b_3^2A_6,$$

$$L_6 = -a_{13} + 4b_2A_{12} + \left(\frac{80}{27}b_2^3 + \frac{20}{3}b_2b_3\right)A_{10}$$

$$+ \left(\frac{16}{27}b_2^3b_3 + 2b_2b_3^2\right)A_8,$$

$$L_7 = -a_{15} + \frac{14}{3}b_2A_{14} + \left(\frac{160}{27}b_2^3 + 10b_2b_3\right)A_{12}$$

$$+ \left(\frac{80}{27}b_2^3b_3 + 5b_2b_3^2 + \frac{32}{243}b_2^5\right)A_{10} + \frac{1}{3}b_2b_3^3A_8,$$

$$L_8 = -a_{17} + \frac{16}{3}b_2A_{16} + \left(\frac{280}{27}b_2^3 + 14b_2b_3\right)A_{14}$$

$$+ \left(\frac{80}{9}b_2^3b_3 + 10b_2b_3^2 + \frac{64}{81}b_2^5\right)A_{12} + \left(\frac{5}{3}b_2b_3^3 + \frac{20}{27}b_2^3b_3^2\right)A_{10},$$

$$L_9 = -a_{19} + 6b_2A_{18} + \left(\frac{448}{27}b_2^3 + \frac{56}{3}b_2b_3\right)A_{16}$$

$$+ \left(\frac{224}{81}b_2^5 + \frac{35}{2}b_2b_3^2 + \frac{560}{27}b_2^3b_3\right)A_{14}$$

$$+ \left(\frac{32}{81}b_2^5b_3 + 5b_2b_3^3 + \frac{40}{9}b_2^3b_3^2\right)A_{12} + \frac{5}{24}b_2b_3^4A_{10},$$

$$L_{10} = -a_{21} + \frac{20}{3}b_2A_{20} + \left(\frac{224}{9}b_2^3 + 24b_2b_3\right)A_{18}$$

$$+\left(\frac{179}{243}b_2^5+\frac{1120}{27}b_2^3b_3+28b_2b_3^2\right)A_{16}$$

$$+\left(\frac{140}{9}b_2^3b_3^2+\frac{224}{81}b_2^5b_3+\frac{35}{3}b_2b_3^2+\frac{128}{2187}b_2^7\right)A_{14}$$

$$+\left(\frac{5}{4}b_2b_3^4+\frac{20}{27}b_2^3b_3^3\right)A_{12},$$

其中

$$A_4=a_4-\frac{1}{2}a_2b_3,\ A_6=a_6-\left(\frac{4}{9}b_2^2+b_3\right)A_4,$$

$$A_8=a_8-\left(\frac{4}{3}b_2^2+\frac{3}{2}b_3\right)A_6-\frac{1}{4}b_3^2A_4,$$

$$A_{10}=a_{10}-\left(\frac{8}{3}b_2^2+2b_3\right)A_8-\left(\frac{2}{3}b_2^2b_3+\frac{3}{4}b_3^2\right)A_6,$$

$$A_{12}=a_{12}-\left(\frac{40}{9}b_2^2+\frac{5}{2}b_3\right)A_{10}-\left(\frac{3}{2}b_3^2+\frac{8}{3}b_2^2b_3+\frac{16}{81}b_2^4\right)A_8$$

$$-\frac{1}{8}b_3^3A_6,$$

$$A_{14}=a_{14}-\left(\frac{20}{3}b_2^2+3b_3\right)A_{12}-\left(\frac{20}{3}b_2^2b_3+\frac{5}{2}b_3^2+\frac{80}{81}b_2^4\right)A_{10}$$

$$-\left(\frac{1}{2}b_3^3+\frac{2}{3}b_2^2b_3^2\right)A_8,$$

$$A_{16}=a_{16}-\left(\frac{28}{3}b_2^2+\frac{7}{2}b_3\right)A_{14}-\left(\frac{80}{27}b_2^4+\frac{15}{4}b_3^2+\frac{40}{3}b_2^2b_3\right)A_{12}$$

$$-\left(\frac{5}{4}b_3^3+\frac{10}{3}b_2^2b_3^2+\frac{40}{81}b_2^4b_3\right)A_{10}-\frac{1}{16}b_3^4A_8,$$

$$A_{18}=a_{18}-\left(\frac{112}{9}b_2^2+4b_3\right)A_{16}-\left(\frac{560}{81}b_2^4+\frac{21}{4}b_3^2+\frac{70}{3}b_2^2b_3\right)A_{14}$$

$$-\left(\frac{5}{2}b_3^3+10b_2^2b_3^2+\frac{64}{729}b_2^6+\frac{80}{27}b_2^4b_3\right)A_{12}$$

$$-\left(\frac{5}{16}b_3^4+\frac{5}{9}b_2^2b_3^2\right)A_{10},$$

$$A_{20}=a_{20}-\left(16b_2^2+\frac{9}{2}b_3\right)A_{18}-\left(\frac{112}{3}b_2^2b_3+7b_3^2+\frac{1120}{81}b_2^4\right)A_{16}$$

$$-\left(\frac{448}{729}b_2^6+\frac{35}{8}b_3^3+\frac{280}{27}b_2^4b_3+\frac{70}{3}b_2^2b_3^2\right)A_{14}$$

$$-\left(\frac{10}{3}b_2^2b_3^3+\frac{15}{16}b_3^4+\frac{20}{27}b_2^4b_3^2\right)A_{12}-\frac{1}{32}b_3^5A_{10}.$$

§4 Liénard 系统的 Poincaré 分支

考虑含小参数的 Liénard 系统

$$\dot{x}=p(y)-\varepsilon F(x,a),\ \dot{y}=-g(x),\tag{4.1}$$

其中 $\varepsilon\in R$, $a\in D\subset R^n$, D 为紧集, $n\geqslant 1$, F, g 与 p 均为 C^r 函数, $r\geqslant 1$. 首先讨论包围一个奇点的极限环的 Poincaré 分支.

4.1 包围一个奇点的极限环

本小节始终假设

$$\begin{aligned}&F(0,a)=0,\ yp(y)>0(y\neq 0),\ p'(y)\geqslant 0,\\&xg(x)>0,\ x\in(x_{20},x_{10}),\ x\neq 0,\end{aligned}\tag{4.2}$$

其中 $-\infty\leqslant x_{20}<0<x_{10}\leqslant+\infty$. 设 G 与 P 同前, 令 $Z^*=\min\{G(x_{i0}),\ i=1,2\}$,

$$U=\{(x,y)\,|\,x_{20}<x<x_{10},\ |y|<\infty,\ (x,y)\neq(0,0)\}.$$

易见当 $\varepsilon=0$ 时, (4.1)在开集 U 内有闭轨族

$$L_h:\ G(x)+P(y)=h,\ 0<h<Z^*,\tag{4.3}$$

又易知(4.1)的一阶 Melnikov 函数为

$$M(h,\ a)=\oint_{L_h} F\mathrm{d}y.$$

由(4.2),函数 $Z=G(x)$有两个反函数 $x_2(Z)<0<x_1(Z)(0<Z<Z^*)$,记 $F_i(Z,\ a)=F(x_i(Z),\ a)$, $i=1,\ 2$.又令

$$K(Z,\ a)=F_1(Z,\ a)-F_2(Z,\ a),\ 0\leqslant Z<Z^*, \qquad (4.4)$$

用 L_h^* 表示由 $Z+P(y)=h$ 在 $0\leqslant Z\leqslant h$ 上定义的有向曲线且沿其有 $\mathrm{d}y<0$,则由(4.3)与(4.4)知

$$M(h,\ a)=\int_{L_h^*} K(Z,\ a)\mathrm{d}y,\ 0<h<Z^*. \qquad (4.5)$$

定理 4.1 设(4.2)成立,设对任一 $a\in D$ 下列条件之一成立:

(i) $K(Z,\ a)\neq 0,\ 0<Z<Z^*$,

(ii) $K'_Z(Z,\ a)$在区间$(0,\ Z^*)$上关于 Z 至多有一个根,

则(a) 对任一 $a\in D$,$M(h,\ a)$至多有一个根(重数计算在内),

(b) 对 U 的任一紧子集 V,必存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(V,\ D)>0$ 使对一切$0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$,$a\in D$方程(4.1)在 V 内至多有一个极限环.

证明 先证结论(a),为简单计,以下设 $M(h)=M(h,\ a)$, $K(Z)=K(Z,\ a)$.若条件(i)成立,则由(4.5)知对一切 $h\in(0,\ Z^*)$有 $M(h)\neq 0$.因此可设存在 $Z_1\in(0,\ Z^*)$使 $K(Z_1)=0$ 且条件(ii)同时成立.于是 $K'(Z)$必有惟一根 $Z_0\in(0,\ Z_1)$.为确定计,又设

$$(Z-Z_0)K'(Z)>0,\ Z\in(0,\ Z^*),\ Z\neq Z_0, \qquad (4.6)$$

由此有

$$K(Z)<0(=0),\ 0<Z<Z_1(Z=Z_1). \qquad (4.7)$$

若能证明当 $M(h_0)=0$ 时 $M'(h_0)<0$,则结论(a)必成立.设

$y_i(h)$与 $\bar{y}_i(i=1, 2)$满足

$$P(y_i(h)) = h, Z_1 + P(\bar{y}_i) = h_0, y_2(h) < 0 < y_1(h), \bar{y}_2 < 0 < \bar{y}_1.$$

由(4.5)及 L_h^* 的方程知

$$M(h) = \int_{y_1(h)}^{y_2(h)} K(h - P(y))\mathrm{d}y.$$

注意到 $K(0)=0$,我们有

$$M'(h) = \int_{y_1(h)}^{y_2(h)} K'(h - P(y))\mathrm{d}y = \int_{L_h^*} K'(Z)\mathrm{d}y, \quad (4.8)$$

特别地

$$M'(h_0) = \left(\int_{A_1B_1} + \int_{A_2B_2}\right)\frac{\mathrm{d}K}{-p(y)} + \int_{B_1B_2} K'(Z)\mathrm{d}y, \quad (4.9)$$

其中 $A_i=(0, y_i(h_0))$, $B_i=(Z_1, \bar{y}_i)$, $i=1, 2$, 如图 4.1 所示.

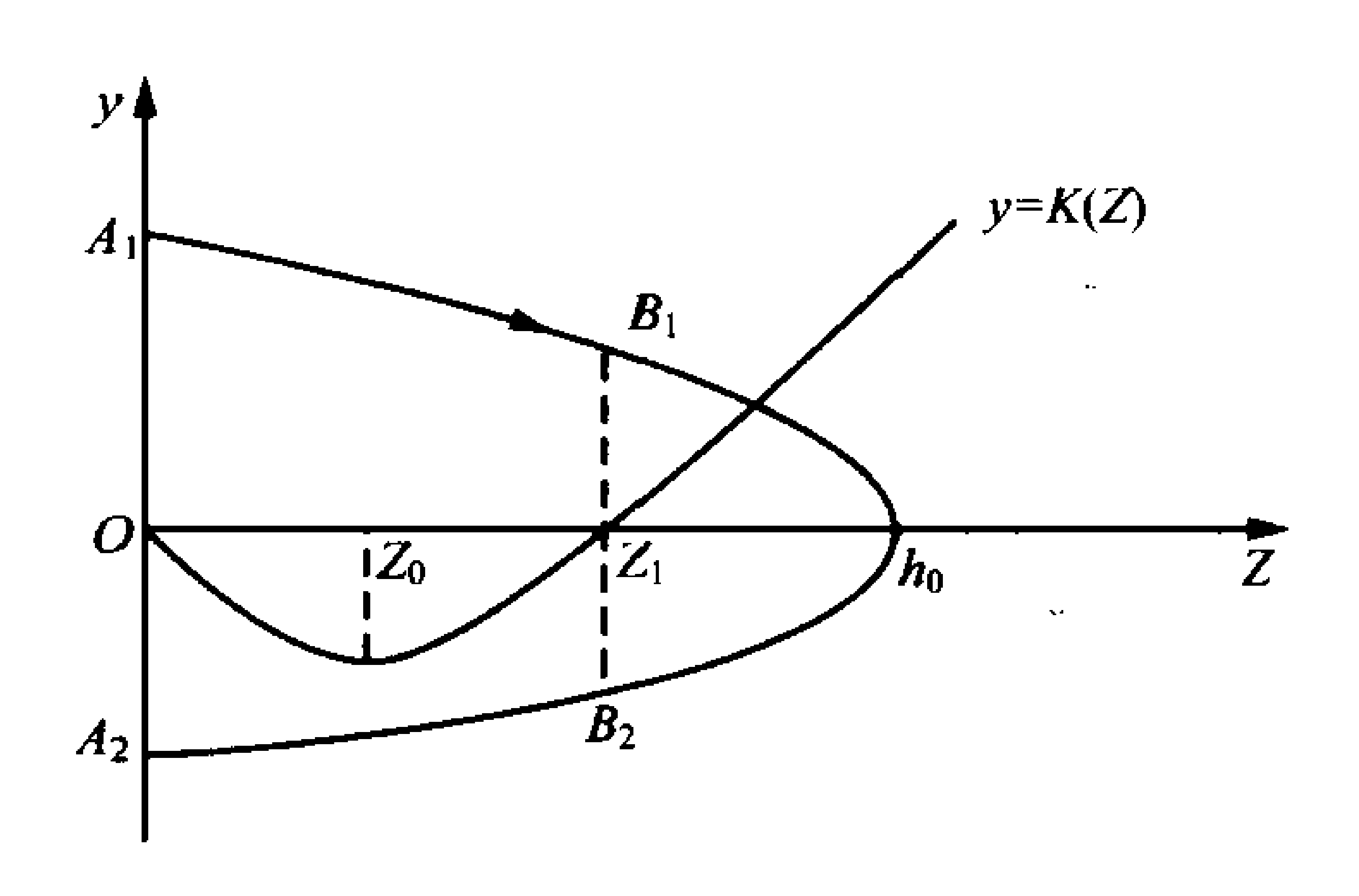


图 4.1

由(4.6)知成立

$$\int_{B_1B_2} K'(Z)\mathrm{d}y < 0.$$

又由(4.6)与(4.7)知,函数 $v=K(Z)$有两个反函数 $Z=z_i(v)\in$

$[0,\ Z_1]$,且 $z_2(v)\leqslant Z_0\leqslant z_1(v)$, $z_2(0)=0$, $z_1(0)=Z_1$. 设 $Y(Z)$满足

$$Z+P(Y(Z))=h_0,\ Y(Z)>0,\ 0\leqslant Z\leqslant Z_1,$$

又记 $Y_i(v)=Y(z_i(v))$, $i=1,\ 2$,则由(4.2)知

$$Y'(Z)=-\frac{1}{p(Y(Z))}<0,\ p(Y_2(v))\geqslant p(Y_1(v)),$$

从而有

$$\int_{A_1B_1}\frac{\mathrm{d}K}{-p(y)}=\int_{v_0}^{0}\left[\frac{1}{p(Y_2(v))}-\frac{1}{p(Y_1(v))}\right]\mathrm{d}v\leqslant 0, \tag{4.10}$$

其中 $v_0=K(Z_0)<0$. 同理可证

$$\int_{B_2A_2}\frac{\mathrm{d}K}{-p(y)}\leqslant 0.$$

于是由(4.9)即得 $M'(h_0)<0$.

为证结论(b),设它不成立,既存在点列$(\varepsilon_k,\ a_k)\in R\times D$, $\varepsilon_k\to 0$,使当$(\varepsilon,\ a)=(\varepsilon_k,\ a_k)$时(4.1)有两个极限环 $L_k^{(1)}$ 与 $L_k^{(2)}$,且存在 $0<h_1\leqslant h_2<Z^*$ 使 $L_k^{(j)}\to L_{h_j}$(当 $k\to\infty$). 由于 D 为紧集,可设 $a_k\to a_0\in D$,则由上述讨论知应有

$$M(h_j,\ a_0)=0,\ M'_h(h_j,\ a_0)<0,\ j=1,\ 2.$$

这与结论(a)矛盾. 证毕.

注 4.1 由上述定理的结论(a)的证明知,当(4.6)与(4.7)成立时对一切 $h\in[Z_1,\ Z^*)$都有 $M'(h)<0$. 特别若存在 $h_0\in(0,\ Z^*)$使 $M(h_0)=0$,则当 $h\in[h_0,\ Z^*)$时必有 $M'(h)<0$. 由此可知,若 $M(Z^*)=0$,则对一切 $h\in(0,\ Z^*)$必有 $M(h)>0$. 完全类似可证,如果把(4.6)换为

$$(Z - Z_0)K'(Z) < 0,\ 0 < Z < Z^*,\ Z \neq Z_0,$$

则当 $M(h_0) = 0(0 < h_0 < Z^*)$ 时对一切 $h \in [h_0,\ Z^*)$ 必有 $M'(h) > 0$，且若 $M(Z^*) = 0$，则对一切 $h \in (0,\ Z^*)$ 有 $M(h) < 0$.

由(4.4)易见

$$K'_Z(Z,\ a) = \frac{f(x_1(Z),\ a)}{g(x_1(Z))} - \frac{f(x_2(Z),\ a)}{g(x_2(Z))},\quad (4.11)$$

其中 $f(x,\ a) = F'_x(x,\ a)$，因此定理 4.1 的条件等价于：对任一 $a \in D$，或者方程组 $F(x,\ a) = F(y,\ a)$，$G(x) = G(y)$ 在区域 $x_{20} < y < 0 < x < x_{10}$ 上无解，或者方程组

$$\frac{f(x,\ a)}{g(x,\ a)} = \frac{f(y,\ a)}{g(y,\ a)},\ G(x) = G(y) \qquad (4.12)$$

在区域 $x_{20} < y < 0 < x < x_{10}$ 上至多有一个解. 由于

$$K''_Z(Z,\ a) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x_1(Z))\frac{1}{g(x_1(Z))} - \left(\frac{f}{g}\right)'(x_2(Z))\frac{1}{g(x_2(Z))},$$

(4.13)

因此(4.12)成立的一个充分条件是 $\left(\frac{f}{g}\right)' > 0$（或 < 0）$(x \neq 0)$.

推论 4.1 设(4.2)成立，又设存在子集 $D_0 \subset D$，使对任一 $a \in D_0$ 成立：

(i) $K(Z,\ a)$ 有根 $Z_1 \in (0,\ Z^*)$，且当 $0 < Z < Z^*$ 时 $K(Z,\ a) \leqslant 0$，当 $Z_1 < Z < Z^*$ 时 $K'_Z(Z,\ a) \geqslant 0$；

(ii) $K'(Z,\ a)$ 在 $(0,\ Z_1]$ 上至多有有限个根，

则对任一 $a \in D_0$，当 $M(h_0,\ a) = 0$ 时必有 $M'(h_0,\ a) < 0$.

证明 由(i)与(ii)，函数 $K'(Z)$ 在区间 $(0,\ Z_1]$ 上或有一个根，或者有两个根（其中一为单重的，一个为偶重的），或多于两个根. 对于前两种情况，由定理 4.1 的证明即知结论成立. 对后一种

情况，不妨设 K' 有三个单根 Z_{0i}，$i=1, 2, 3$，且 $0<Z_{01}<Z_{02}<Z_{03}<Z_1$（如图 4.2 所示）. 设 $M(h_0)=0$，设点 A_i 与 B_i 同前（图 4.1），又设 A_{ij}，$i=1, 2$，$j=1,2,3$ 如图 4.2 所示. 由定理 4.1 的证明知，只须证

$$\int_{A_1B_1}\frac{-\mathrm{d}K}{p(y)}\leqslant 0,\ \int_{B_2A_2}\frac{-\mathrm{d}K}{p(y)}\leqslant 0.$$

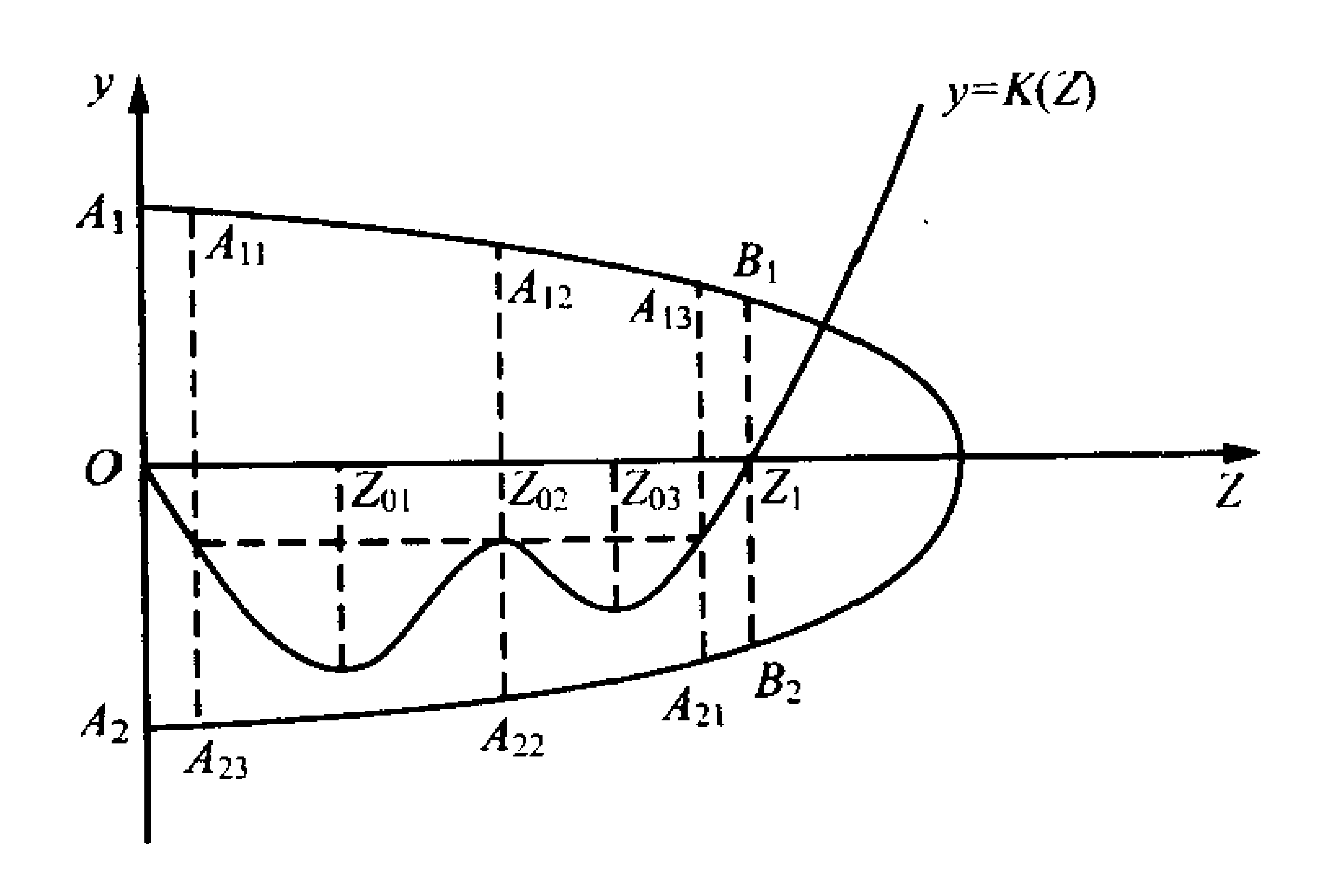


图 4.2

由于类似性，只证第一式. 事实上，作积分变换 $v=K(Z)$，与 (4.10) 类似有

$$\int_{A_{11}A_{12}}\frac{-\mathrm{d}K}{p(y)}\leqslant 0,\ \int_{A_{12}A_{13}}\frac{-\mathrm{d}K}{p(y)}\leqslant 0,\ \left(\int_{A_1A_{11}}+\int_{A_{13}B_1}\right)\frac{-\mathrm{d}K}{p(y)}\leqslant 0,$$

将上述三式相加即得结论. 证毕.

定理 4.2 设(4.2)成立且(4.1)为 C^2 系统，设

$$\left(\frac{p'(y)}{p^3(y)}\right)'\leqslant 0(y\neq 0),\qquad (4.14)$$

又设存在子集 $D_0\subset D$，使对任意 $a\in D_0$ 下列两条满足

(i) 当 $0<Z\ll 1$ 时 $K(Z, a)>0$，且 $K'_Z(Z, a)$ 在 $(0, Z^*)$ 上

恰有两个根 $Z_{01}<Z_{02}$;

(ii) 当 $Z_{02}\leqslant Z<Z^*$ 时 $K''_Z(Z, a)\geqslant 0$,

则对每个 $a\in D_0$,当 $M(h_0, a)=0$ 且 $0<h_0\leqslant Z_{02}$时 $M'_h(h_0, a)>0$,又对一切 $h\in[Z_{02}, Z^*)$有 $M''_h(h, a)<0$.

证明 设 $h_0\in(0, Z_{02}]$为 $M(h)$的根,有(4.5),$K(Z)$必有根 $Z_1\in(0, Z^*)$.不妨设对 $Z\in(0, Z_1)$有 $K(Z)\neq 0$.则由(i)与(ii)知 $Z_{01}<Z_1<Z_{02}$,对 $0<Z<Z_1$ 有 $K(Z)>0$ 且对 $Z_1\leqslant Z<Z_{02}$有$(Z-Z_{01})K'(Z)<0$,对 $Z_{02}<Z<Z^*$ 有 $K'(Z)>0$.如图4.3所示.于是由注4.1知 $M'(h_0)>0$.

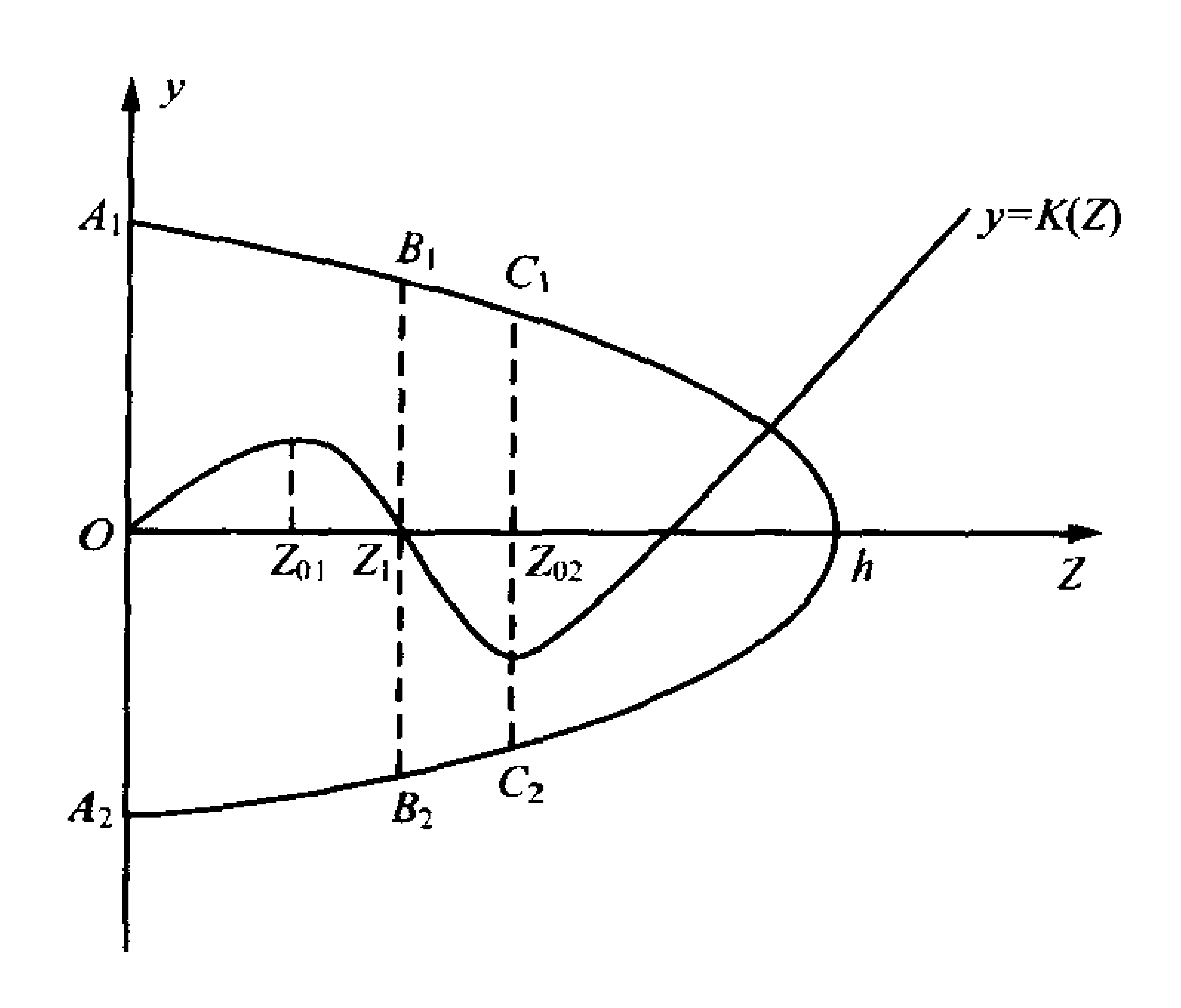


图 4.3

下证当 $h\in[Z_{02}, Z^*)$时,$M''(h)<0$.函数 $u=P(y)$在 $u>0$ 有两个反函数 $y_2(u)<0<y_1(u)$,记

$$A_i=(0, y_i(h)),\ B_i=(Z_1, y_i(h-Z_1)),$$

$$C_i=(Z_{02}, y_i(h-Z_{02})),\ i=1, 2,$$

则由(4.8),与(4.9)类似有

$$M'(h)=\left(\int_{A_1C_1}+\int_{C_2A_2}\right)\frac{-\,\mathrm{d}K}{p(y)}+\int_{C_1C_2}K'\mathrm{d}y$$

$$\equiv J_1(h)+J_2(h). \tag{4.15}$$

易见

$$J_1(h)=\int_0^{Z_{02}}\left[\frac{1}{p(y_2(h-Z))}-\frac{1}{p(y_1(h-Z))}\right]K'\mathrm{d}Z,$$

因此,注意到 $y'_i(u)=\dfrac{1}{p(y_i(u))}$,若令 $w(y)=p'(y)/p^3(y)$,则

$$J'_1(h)=\int_0^{Z_{02}}[w(y_1(y-Z))-w(y_2(h-Z))]K'\mathrm{d}Z, \tag{4.16}$$

由于 $w(y_1(h-Z))>0>w(y_2(h-Z))$,且当 $Z_1\leqslant Z<Z_{02}$ 时 $K'(Z)<0$,故

$$J'_1(h)<\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i-1}\int_0^{Z_1}w(y_i(h-Z))K'\mathrm{d}Z\equiv\sum_{i=1}^{2}J_{1i}(h).$$

如前,设 $Z=z_i(v)$ 为 $v=K(Z)$ 的反函数,且 $z_2(v)\leqslant Z_{01}\leqslant z_1(v)$,则由于 $y'_1(u)>0>y'_2(u)$,$w(y)$ 为减函数, 可知当 $0\leqslant v\leqslant v_0\equiv K(Z_{01})$ 时,

$$w(y_1(h-z_2(v)))\leqslant w(y_1(h-z_1(v))),$$

$$w(y_2(h-z_2(v)))\geqslant w(y_2(h-z_1(v))),$$

因此

$$J_{1i}(h)=(-1)^{i-1}\int_0^{v_0}[w(y_i(h-z_2(v)))$$

$$-w(y_i(h-z_1(v)))]\mathrm{d}v\leqslant 0,\ i=1,2,$$

于是成立

$$J'_1(h) < 0,\ h \in [Z_{02},\ Z^*). \tag{4.17}$$

对(4.15)中 $J_2(h)$，我们有

$$J_2(h) = \int_{y_1(h-Z_{02})}^{y_2(h-Z_{02})} K'(h - P(y))\mathrm{d}y,$$

注意到

$$K'(h - P(y))|_{y=y_i(h-Z_{02})} = K'(Z_{02}) = 0,$$

因而

$$J'_2(h) = \int_{y_1(h-Z_{02})}^{y_2(h-Z_{02})} K''(h - P(y))\mathrm{d}y$$

$$= \int_{C_1C_2} K''(Z)\mathrm{d}y \leqslant 0, \tag{4.18}$$

于是由(4.15)、(4.17)与(4.18)即知对 $h \in [Z_{02},\ Z^*)$有 $M''(h) < 0$. 证毕.

由(4.4)、(4.11)与(4.13)易知定理 4.2 的条件(i)与(ii)等价于:

(i)′ 当 $G(x) = G(y)$且 $y < 0 < x \ll 1$ 时，$F(x,\ a) > F(y,\ a)$，且方程(4.12)在区域 $x_{20} < y < 0 < x < x_{10}$ 上恰有两个解$(x_i^*,\ y_i^*)$，$0 < x_1^* < x_2^*,\ y_2^* < y_1^* < 0$;

(ii)′ 当 $G(x) = G(y)$，$x_2^* < x < x_{10},\ x_{20} < y < y_2^*$ 时,

$$\left(\frac{f(x,\ a)}{g(x)}\right)' \frac{1}{g(x)} - \left(\frac{f(y,\ a)}{g(y)}\right)' \frac{1}{g(y)} \geqslant 0.$$

显然上述条件(ii)′成立的一个充分条件是:对一切 $x \in (x_{20},\ y_2^*) \cup (x_2^*,\ x_{10})$有$\left(\dfrac{f(x,\ a)}{g(x)}\right)' \geqslant 0$.

与定理 4.2 完全类似可证

推论 4.2 设(4.1)为 C^2 系统且(4.2)与(4.14)成立，又设

存在子集 $D_0 \subset D$ 使对任一 $a \in D_0$ 下列两条件满足：

(i) 当 $0 < Z \ll 1$ 时 $K(Z, a) < 0$ 且 $K'_Z(Z, a)$ 在 $(0, Z^*)$ 上恰有两个根 $Z_{01} < Z_{02}$；

(ii) 当 $Z_{02} \leqslant Z < Z^*$ 时 $K''_Z(Z, a) \leqslant 0$，

则对任一 $a \in D_0$，当 $M(h_0, a) = 0$ 且 $0 < h_0 \leqslant Z_{02}$ 时，$M'_h(h_0, a) < 0$，而当 $Z_{02} \leqslant h < Z^*$ 时 $M''_h(h, a) > 0$.

注 4.2 不难证明，如果 $\beta = \inf_y \left(\frac{2P(y)}{p(y)} \right) > 0$，则对 $J_2(h)$ 引入变换

$$Z = Z_{02} + (h - Z_{02})\cos^2\theta,\ (\mathrm{sgn} y)\sqrt{P(y)} = \sqrt{h - Z_{02}}\sin\theta,$$

$$|\theta| \leqslant \pi/2,$$

可使定理 4.2(或推论 4.2)中的条件(ii)减弱为：

当 $Z_{02} \leqslant Z < Z^*$ 时，$\beta K'_Z(Z, a) + 2(Z - Z_{02})K''_Z(Z, a) \geqslant 0$ (或 $\leqslant 0$).

定理 4.3 设(4.1)为 C^2 系统且(4.2)与(4.14)成立，设对每一个 $a \in D$ 下列条件之一成立.

(i) 当 $0 < Z < Z^*$ 时 $K(Z, a) > 0$；

(ii) 定理 4.2 的条件(i)与(ii)成立；

(iii) 当 $0 < Z \ll 1$ 时 $K(Z, a) < 0$ 且 K'_Z 在 $(0, Z^*)$ 上恰有一个根，

则

(1) 对任一 $a \in D$，$M(h, a)$ 在 $(0, Z^*)$ 上至多有两个根(重数计算在内)；

(2) 对 U 的任一紧子集 V，存在 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(D, V) > 0$，使对一切 $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$，$a \in D$，(4.1)在 V 中至多有两个极限环.

证明 由定理 4.1 知若条件(i)或(iii)成立，则 $M(h, a)$ 至多有一个根. 下设(ii)成立，即设定理 4.2 的条件(i)与(ii)成立. 若设 $M(h, a)$ 有两个根 $0 < h_1 \leqslant h_2$，则由(4.5)知可设当 $0 < h < h_1$

时 $M(h, a)<0$，于是 $M'_h(h_1, a)\geqslant 0, M'_h(h_2, a)\leqslant 0$. 从而由定理 4.2 知必有 $h_2>Z_{02}$，且当 $h\geqslant h_2$ 时 $M''_h(h, a)<0$，故当 $h>h_2$ 时，$M'_h(h, a)<M'_h(h_2, a)\leqslant 0, M(h, a)<M(h_2, a)=0$，即 $M(h, a)$ 不能有第三个正根. 结论(1)获证. 下用反证法证结论(2). 设存在点列 $\varepsilon_k\to 0, a_k\in D$ 使当 $(\varepsilon, a)=(\varepsilon_k, a_k)$ 时 (4.1) 有三个极限环 $L_k^{(j)}, j=1, 2, 3$，则可设当 $k\to\infty$ 时，$a_k\to a_0\in D, L_k^{(j)}\to L_{h_j}\subset V$，且 $0<h_1\leqslant h_2\leqslant h_3<Z^*$，则必有 $M(h_j, a_0)=0, j=1, 2, 3$，此与结论(1)矛盾. 证毕.

注 4.3　由注 4.1 及定理 4.3 的证明易知，若定理 4.3 的条件(i)~(iii)成立，则当 $M(Z^*, a)=0$ 时 $M(h, a)$ 在 $(0, Z^*)$ 上至多有一个根(包括重数).

定理 4.4　设(4.1)为 C^3 系统且(4.2)与(4.14)成立，又设

$$yW(y)=\frac{y}{p^5(y)}[p(y)p''(y)-3(p'(y))^2]<0,$$

$$W'(y)\geqslant 0(y\neq 0). \qquad (4.19)$$

如果存在子集 $D_0\subset D$ 使对任一 $a\in D_0$ 下列条件均成立：

(i) 当 $0<Z\ll 1$ 时 $K(Z, a)<0$ 且 K'_Z 在 $(0, Z^*)$ 上恰有三个根 $Z_{01}\leqslant Z_{02}<Z_{03}$，且 $K(Z_{02}, a)>0$；

(ii) 存在 $Z_{11}\in(Z_{02}, Z_{03})$ 使当 $Z_{02}\leqslant Z\leqslant Z_{11}$ $(Z_{11}\leqslant Z<Z^*)$ 时 $K''_Z\leqslant 0(\geqslant 0)$；

(iii) 当 $Z_{11}\leqslant Z<Z^*$ 时 $K'''_Z\geqslant 0$，

则对任一 $a\in D_0$ 成立：

(1) 当 $M(h_0, a)=0$ 且 $0<h_0\leqslant Z_{02}$ 时 $M'_h(h_0, a)<0$；

(2) 当 $Z_{02}\leqslant h\leqslant Z_{11}$ 时 $M''_h(h, a)>0$；

(3) 当 $Z_{11}\leqslant h<Z^*$ 时 $M'''_h(h, a)<0$.

证明　由假设知定理 4.1 与推论 4.2 的条件分别在区间 $(0, Z_{01})$ 与 $(0, Z_{11})$ 上成立，因此，由定理 4.1 与 4.2 的证明及推论 4.2 知结论(1)与(2)成立. 下证结论(3). 首先由(i)与(ii)知 $K(Z)$

在(Z_{01}, Z_{02})上有惟一根 Z_1，设 $h \geqslant Z_{11}$ 且设 $A_i, B_i, C_i(i=1,2)$如前，而 D_1 与 D_2 为直线 $Z=Z_{11}$ 与 L_h^* 的交点，如图 4.4 所示，则(4.15)成立，且由(4.16)、条件(i)与(ii)及(4.19)知

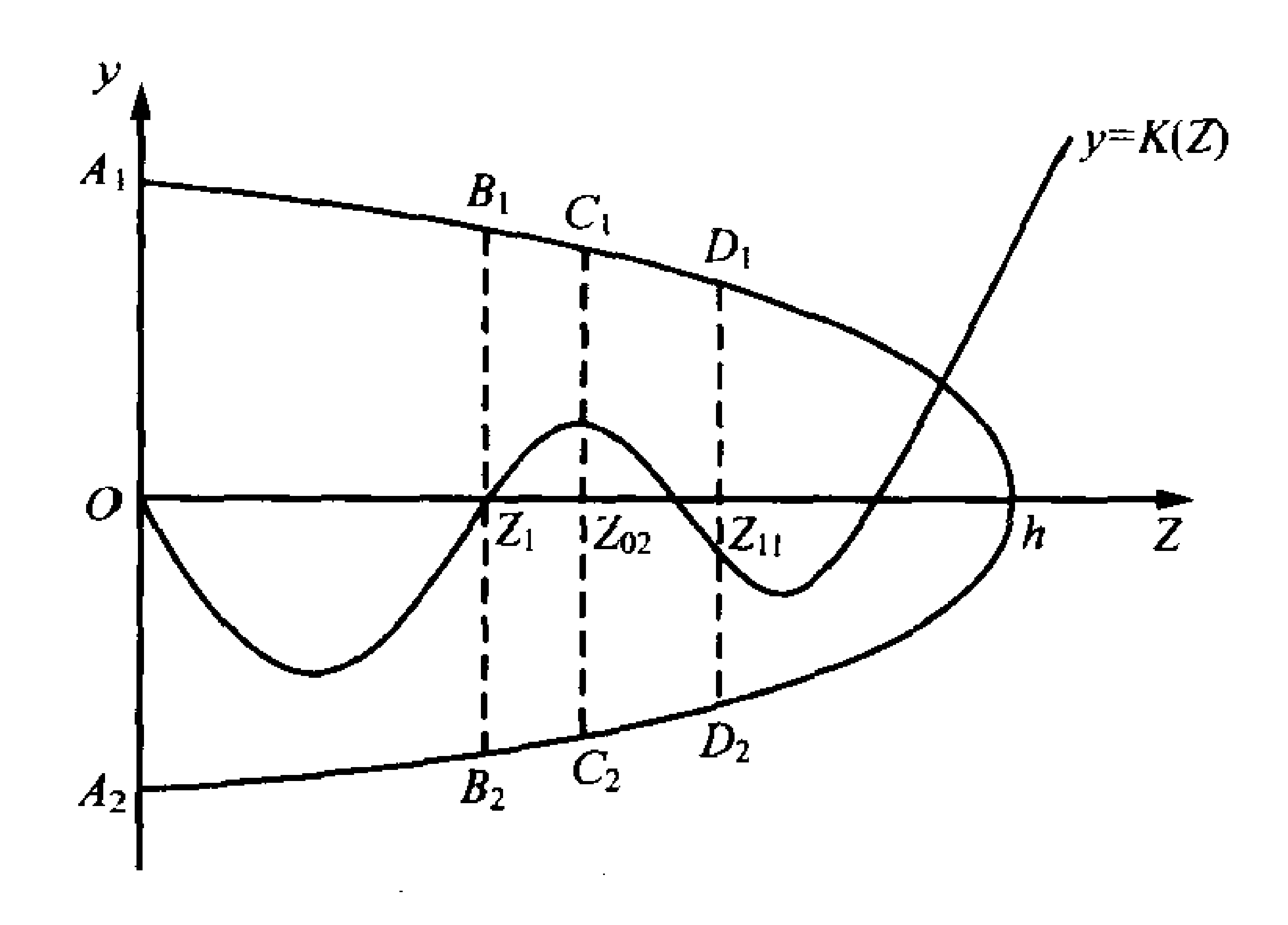


图 4.4

$$J''_1(h)=\int_0^{Z_{02}}[W(y_1(h-Z))-W(y_2(h-Z))]K'\mathrm{d}Z$$

$$<\int_0^{Z_1}[W(y_1(h-Z))-W(y_2(h-Z))]K'\mathrm{d}Z.$$

由此，与(4.17)类似可证，$J''_1(h)<0$. 注意到 $K'(Z_{02})=0$，又与(4.18)类似可证

$$J''_h(h)=\int_{C_1C_2}K''\mathrm{d}y$$

$$=\left(\int_{C_1D_1}+\int_{D_2C_2}\right)\frac{-K''}{p(y)}\mathrm{d}Z+\int_{D_1D_2}K''\mathrm{d}y$$

$$\equiv J_{21}(h)+J_{22}(h), \qquad (4.20)$$

与(4.16)相仿有

$$J'_{21}(h)=\int_{Z_{02}}^{Z_{11}}[w(y_1(h-Z))-w(y_2(h-Z))]K''\mathrm{d}Z,$$

由于在$[Z_{02}, Z_{11}]$上$K''\leqslant 0$,因此$J'_{21}(h)\leqslant 0$. 注意到$K''(Z_{11})=0$,由条件(iii),与(4.18)类似可得$J'_{22}(h)\leqslant 0$. 因而由(4.15)与(4.20)知

$$M'''_h(h, a) = J''_1(h) + J''_2(h) = J''_1(h) + J'_{21}(h) + J'_{22}(h) < 0.$$

证毕.

由以上结果可证

定理 4.5 设(4.1)为C^3系统且(4.2)、(4.14)与(4.19)成立,设对每一个$a\in D$,下列条件之一成立

(i) 当$0<Z<Z^*$时$K(Z, a)>0$;

(ii) 定理 4.2 的条件(i)与(ii)成立;

(iii) 当$0<Z\ll 1$时$K(Z, a)<0$, K'_Z在$(0, Z^*)$有一个或三个根(重数计算在内),且如果K'_Z有三个不同根$Z_{01}<Z_{02}<Z_{03}$,则或$K(Z_{02}, a)\leqslant 0$或$K(Z_{02}, a)>0$且定理 4.4 的条件(ii)与(iii)成立,则

(1) 对任一$a\in D$, $M(h, a)$在$(0, Z^*)$上至多有三个根(重数计算在内);

(2) 对U中任一紧子集V,存在$\varepsilon_0=\varepsilon_0(D, V)>0$,使对一切$0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$, $a\in D$, (4.1)在V中至多有三个极限环.

证明 由推论 4.1 与定理 4.3,只须设定理 4.4 的条件(i)~(iii)成立且证明$M(h)$至多有三个根,设$M(h)$有三个相邻正根$0<h_1\leqslant h_2\leqslant h_3$,则$M'(h_2)\geqslant 0$, $M'(h_3)\leqslant 0$,因此由定理 4.4(1)知$h_2>Z_{02}$,易知必存在$h_0\in(h_2, h_3)$,使$M''(h_0)\leqslant 0$,又由定理 4.4(2)知$h_0>Z_{11}$,从而由定理 4.4(3)知当$h>h_0$时$M'''(h)<0$,故$M''(h)<M''(h_0)\leqslant 0$,于是当$h>h_3$时$M'(h)<M'(h_3)\leqslant 0$, $M(h)<M(h_3)=0$,即$M(h)$不能有第 4 个正根. 于是结论(1)得证. 同定理 4.3 类似可证结论(2). 证毕.

以上五个定理均取自作者最近的工作[48],下面我们再把这种讨论 Poincaré 分支的方法推广到有三个奇点的方程.

4.2 包围三个奇点的极限环

在(4.1)中取 $p(y)=y$ 可得

$$\dot{x} = y - \varepsilon F(x,a), \dot{y} = - g(x), \tag{4.21}$$

如前仍设 $\varepsilon\in R, a\in D\subset R^n$, D 为紧集, F, g 为 C^r 函数, $r\geqslant 3$. 此外, 设 $Z^*\equiv G(+\infty)>0$,

$$F(0,a) = 0, g(x) = - g(- x),$$

且当 $0<x<x_0(x>x_0)$时

$$g(x) > 0(< 0). \tag{4.22}$$

于是当 $\varepsilon=0$ 时(4.21)有三个奇点(0,0)及($\pm x_0$,0), 以及包围这三个奇点的大闭轨族

$$L_h: G(x) + \frac{1}{2}y^2 = h, 0 < h < Z^*.$$

令 $L_h^+ = L_h|_{x\geqslant 0}$, $F_1(x,a) = F(x,a) - F(-x,a)$, 则(4.21)的首阶 Melnilov 函数为

$$M(h,a) = \int_{L_h^+} F_1(x,a)\mathrm{d}y. \tag{4.23}$$

易知 F_1 为 x 的奇函数. 记 $F_1(x) = F_1(x,a)$, $M(h) = M(h, a)$. 我们假设对任一 $a\in D$, 存在 $0\leqslant x_1\leqslant x_2$ 使

$$F_1(x_2) = 0, (x - x_1)F'_1(x) > 0(x > 0, x \neq x_1). \tag{4.24}$$

对任一 $h>0$, 设 L_h 的上、下端点为 $A(0,y_1(h))$和 E, L_h 与直线 $x=x_0$ 的上、下交点为 $B(x_0,y_2(h))$和 D, 与正 x 轴之交点为 $C(x_3(h),0)$, 则 y_1, y_2 和 x_3 满足

$$y_1(h) = \sqrt{2h}, y_2(h) = \sqrt{2(h - G(x_0))}, G(x_3(h)) = h.$$

令

$$M_1(h) = \int_{ABC} F_1 \mathrm{d}y, M_2(h) = \int_{CDE} F_1 \mathrm{d}y, \qquad (4.25)$$

由(4.23)知

$$M(h) = M_1(h) + M_2(h), h > 0. \qquad (4.26)$$

首先可证

引理 4.1 设(4.22)与(4.24)成立,又设 $x_0 \leqslant x_1 < x_2$. 如果

(i) 当 $0 < x < x_0 < y, G(x) = G(y)$ 时 $F_1(x) \geqslant F_2(y)$,

(ii) 当 $0 < x < x_1 < y, F_1(x) = F_2(y)$ 时 $G(y) \geqslant G(x)$,

则当 $h \leqslant (>) \max\{G(x_2), 0\}$ 时 $M(h) > 0 (M'(h) < 0)$.

证明 先证括号外的结论. 不妨设 $G(x_2) > 0$, 曲线段 AB 与 BC 可分别表示为 $x = b(y, h)(y_1(h) \leqslant y \leqslant y_2(h)$ 与 $x = c(y, h)$ $(0 \leqslant y \leqslant y_2(h))$. 易见 $h \leqslant G(x_2)$ 等价于 $x_2 \geqslant x_3(h)$. 设过点 A 的水平线与弧 BC 的交点为 A', 则由(4.25)知(参考图 4.5(i))

$$\begin{aligned} M_1(h) &= \int_{ABA'} F_1 \mathrm{d}y + \int_{A'C} F_1 \mathrm{d}y \\ &= \int_{y_1}^{y_2} [F_1(b) - F_1(c)] \mathrm{d}y + \int_{y_1}^{0} F_1(c) \mathrm{d}y \\ &\equiv M_{11}(h) + M_{12}(h), \end{aligned} \qquad (4.27)$$

由于当 $x_0 < x < x_3$ 时 $F_1(x) < 0$, 故 $M_{12}(h) > 0$. 又由于

$$G(b) = G(c) = h - \frac{1}{2}y^2, 0 \leqslant b \leqslant x_0 \leqslant c,$$

从而由条件(i)可知 $F_1(b) - F_1(c) \geqslant 0$, 故有 $M_{11}(h) \geqslant 0$, 于是由(4.27)知当 $h \leqslant G(x_2)$ 时 $M_1(h) > 0$. 同理可证, 当 $h \leqslant G(x_2)$ 时 $M_2(h) > 0$, 于是由(4.26)知当 $h \leqslant G(x_2)$ 时 $M(h) > 0$.

下设 $h > G(x_2)$ 且 $h > 0$, 则有 $x_2 < x_3(h)$, 如图 4.5(ii)所

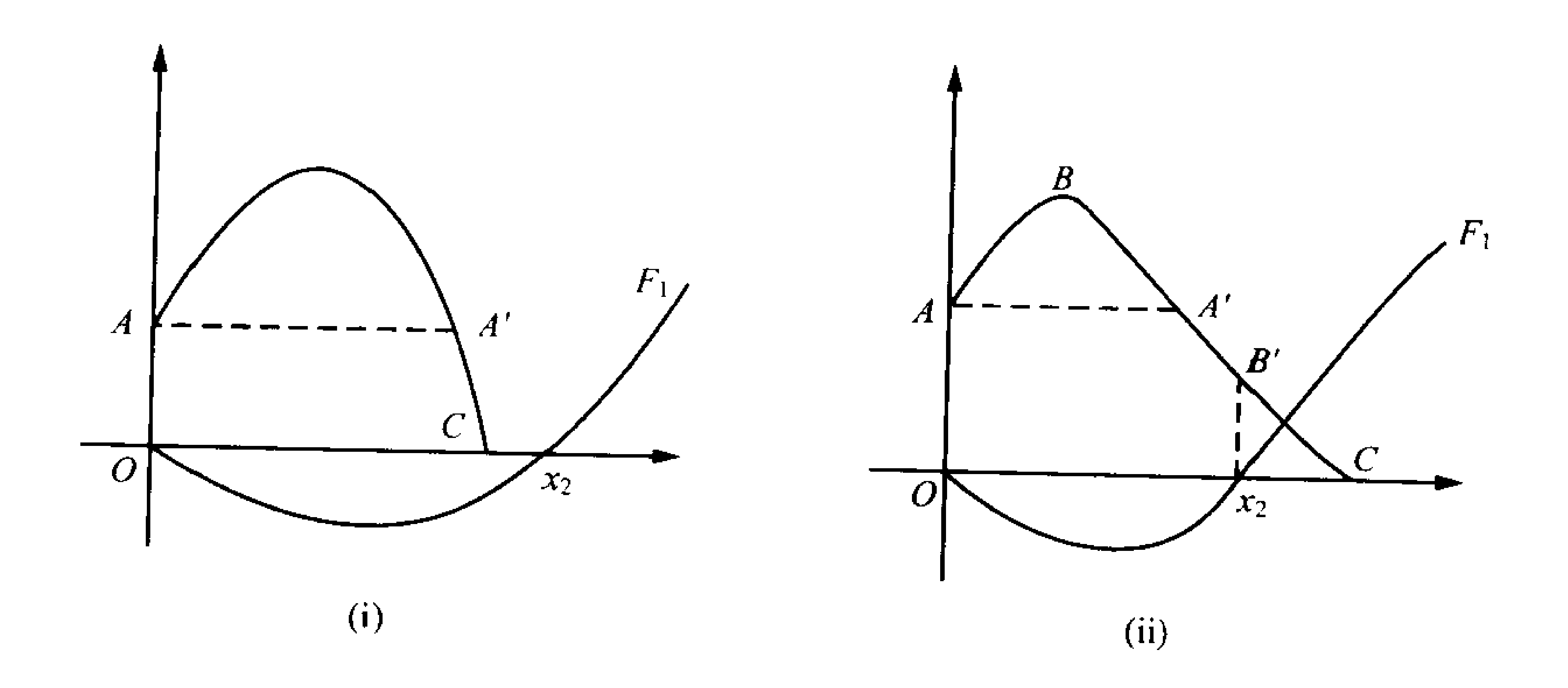


图 4.5

示. 注意到 $b(y_1,h)=0$, $c(y_1,h)\equiv x'\in(x_0,x_3)$, $b(y_2,h)=c(y_2,h)=x_0$, 及 $\frac{\partial b}{\partial h}=\frac{1}{g(b)}$, $\frac{\partial c}{\partial h}=\frac{1}{g(c)}$, 由条件(4.27)知

$$M'_{11}(h)=\int_{y_1}^{y_2}\left[\frac{F'_1(b)}{g(b)}-\frac{F'_1(c)}{g(c)}\right]dy+F_1(x')y'_1(h),$$

$$M'_{12}(h)=\int_{y_1}^{0}\frac{F'_1(c)}{g(c)}dy-F_1(x')y'_1(h),$$

于是

$$\begin{aligned}M'_1(h)&=M'_{11}(h)+M'_{12}(h)=\int_{ABA'}\frac{F'_1}{g}dy+\int_{A'C}\frac{F'_1}{g}dy\\&=\int_{ABB'}\frac{F'_1}{g}dy+\int_{B'C}\frac{F'_1}{g}dy\\&\equiv M_{13}(h)+M_{14}(h),\end{aligned}\tag{4.28}$$

其中 B' 为直线 $x=x_2$ 与弧 AC 的交点, 由(4.24)可知 $M_{14}(h)<0$. 设函数 $p(v)$ 与 $q(v)$ 满足

$$v=F_1(p(v))=F_1(q(v)),\ p(v)\leqslant x_1\leqslant q(v),$$

记 $v_0=F_1(x_1)(<0)$，可证

$$M_{13}(h)=\int_{ABA'}\frac{F'_1}{-y}\mathrm{d}x=$$
$$\int_{v_0}^{0}\left[\frac{1}{\sqrt{2(h-G(p))}}-\frac{1}{\sqrt{2(h-G(q))}}\right]\mathrm{d}v\leqslant 0. \tag{4.29}$$

事实上，因为当 $v_0<v<0$ 时 $p(v)<x_1<q(v)$ 且 $F_1(p)=F_1(q)$，从而由条件(ii)知 $G(q)\geqslant G(p)$，故(4.29)成立，于是由(4.28)知当 $h>G(x_2)$ 时 $M'_1(h)<0$. 同理可证当 $h>G(x_2)$ 时 $M'_2(h)<0$. 从而引理得证.

引理 4.2 设(4.22)与(4.24)成立，又设 $x_0\leqslant x_2$，如果

(i) 若 $x\leqslant x_0$，则当 $F_1(x)=F_1(y)$，$0<x<x_1<y$ 时有 $G(x)\geqslant G(y)$；

(ii) 函数 $F'_1(x)\sqrt{G(x)-G(x_0)}/g(x)$ 在 $x>x_0$ 上不减，则对 $h>0$ 有 $M''(h)<0$.

证明 由(4.28)知

$$\begin{aligned}M'_1(h)&=\int_{AB}\frac{F'_1}{-y}\mathrm{d}x+\int_{BC}\frac{F'_1}{-y}\mathrm{d}x\\&\equiv M_{15}(h)+M_{16}(h).\end{aligned} \tag{4.30}$$

易见

$$M_{15}(h)=\int_0^{x_0}\frac{-F'_1\mathrm{d}x}{\sqrt{2(h-G(x))}},M'_{15}(h)=\int_0^{x_0}\frac{F'_1\mathrm{d}x}{[2(h-G(x))]^{3/2}}.$$

若 $x_1\geqslant x_0$，则由(4.24)即知 $M'_{15}(h)<0$. 若 $x_1<x_0$，则由 $x_0\leqslant x_2$ 知在弧 AB 上有惟一的点 A''，使得过 A'', B 的两条竖直线与曲线 $y=F_1(x)$ 的交点在同一水平线上，此时由(4.24)知

$$M'_{15}(h)<\int_{A''B}\frac{\mathrm{d}F_1}{[2(h-G)]^{3/2}}.$$

利用条件(i),与(4.29)类似可证上式右端非正,从而也有 $M'_{15}(h)<0$.

进一步,弧 BC 可表示为

$$G(x)-h_0=(h-h_0)\cos^2\theta, y=\sqrt{2(h-h_0)}\sin\theta, x\geqslant x_0,$$

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, \tag{4.31}$$

其中 $h_0=G(x_0)$. 注意到 $g(x)\mathrm{d}x=-2(h-h_0)\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$,对(4.30)中的 M_{16} 引入积分变换(4.31)可得

$$M_{16}(h)=\sqrt{2}\int_{\pi/2}^{0}\frac{F'_1(x)\sqrt{G(x)-h_0}}{g(x)}\mathrm{d}\theta,$$

其中 x 满足(4.31)第一式. 注意到 $\frac{\partial x}{\partial h}=\frac{\cos^2\theta}{g(x)}$,利用条件(ii)可知

$$M'_{16}(h)=\sqrt{2}\int_{\pi/2}^{0}\left(\frac{F'_1\sqrt{G-h_0}}{g}\right)'_x\frac{\cos^2\theta}{g}\mathrm{d}\theta\leqslant 0 \tag{4.32}$$

于是由(4.30)知 $M''_1(h)<0$. 同理可证 $M''_2(h)<0$,即有 $M''(h)<0$. 证毕.

引理 4.3 设(4.22)与(4.24)成立,又设 $x_0\leqslant x_2$,则对一切 $h\geqslant 0$ 有 $M(h)<0$.

证明 设直线 $x=x_0$ 与弧 AB 的交点为 B_1,过 B_1 的水平线与弧 BC 的交点为 B_2,则与(4.27)类似有

$$\begin{aligned}M_1(h)&=\left(\int_{AB_1}+\int_{B_2C}\right)F_1\mathrm{d}y+\int_{B_1B_2}F_1\mathrm{d}y\\&=\int_{y_1}^{y_{B_1}}F_1\mathrm{d}y+\int_{y_{B_1}}^{0}F_1\mathrm{d}y+\int_{y_{B_1}}^{y_2}[F_1(b)-F_1(c)]\mathrm{d}y\\&<0,\end{aligned}$$

同理有 $M_2(h)<0$,故 $M(h)<0$.证毕.

引理 4.4 设(4.22)与(4.24)成立,若

(i) 当 $x_0<x_1$ 时函数 $F'_1(x)\sqrt{G(x)-G(\bar{x})}/g(x)$在 $x>\bar{x}$ 上不减,其中 $\bar{x}=\min\{x_1,x^*\}$,$G(x^*)=0$,$x^*>x_0$;

(ii) 当 $x_0\geqslant x_1>0$ 时 $F'_1(x)\sqrt{G(x)-G(\bar{x})}/|g(x)|$ 在 $x>x_1$ 上不减,则对一切 $h>0$ 有 $M''(h)<0$ 或 $M(h)<0$.

证明 先设 $x_0<x_1$,则对 $h>0$,直线 $x=\bar{x}$ 与弧 AC 有交点 $\bar{A}$,与(4.30)类似可得

$$M'_1(h)=\int_{A\bar{A}}\frac{F'_1}{-y}\mathrm{d}x+\int_{\bar{A}C}\frac{F'_1}{-y}\mathrm{d}x \equiv M_{17}(h)+M_{18}(h), \tag{4.33}$$

其中

$$M'_{17}(h)=\int_0^{\bar{x}}\frac{F'_1\mathrm{d}x}{[2(h-G(x))]^{3/2}},$$

由于在$(0,\bar{x})$上 $F'_1<0$,故 $M'_{17}(h)<0$,对 M_{18}引入与(4.31)相仿的变换(即把 h_0 改为 $G(\bar{x})$),则与(4.32)类似可得 $M'_{18}(h)\leqslant 0$,从而有 $M''_1(h)<0$.同理有 $M''_2(h)<0$,故 $M''(h)<0$.

次设 $x_0\geqslant x_1>0$,令 θ_1 满足$\frac{\pi}{2}\leqslant\theta_1<\pi$,$G(x_1)-h_0=(h-h_0)\cos^2\theta_1$,此时取(4.33)中点 $\bar{A}$ 为直线 $x=x_1$ 与弧 AC 的交点,则同前有 $M'_{17}(h)<0$.对 M_{18}引入变换(4.31),其中$0\leqslant\theta\leqslant\theta_1$,则有

$$M_{18}(h)=\sqrt{2}\int_{\theta_1}^{0}\frac{F'_1(x)}{g(x)}\sqrt{G(x)-h_0}\mathrm{d}\theta,$$

由条件(4.22)及$\frac{\partial x}{\partial h}=\frac{\cos^2\theta}{g(x)}$,利用所设条件知

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{F'_1\sqrt{G-h_0}}{g}\right)\geqslant 0 \quad \left(\theta\neq\frac{\pi}{2}\right),$$

又注意到 $F'_1(x_1)=0$，可知 $M'_{18}(h)\leqslant 0$，从而由(4.33)知 $M''_1(h)<0$. 同理 $M''_2(h)<0$，因此得证 $M''(h)<0$. 若 $x_1=0$，则由(4.22)及引理 4.3 知 $M(h)<0$. 证毕.

利用以上引理可证下述定理.

定理 4.6 设(4.22)与(4.24)成立，又设下列三组条件之一成立：

(1) (i)当 $x_0\leqslant x_1<x_2$ 时引理 4.1 的条件(i)与(ii)成立，

(ii)当 $x_1\leqslant x_0\leqslant x_2$ 时引理 4.2 的条件(i)与(ii)成立；

(2) (i)当 $x_0\leqslant x_1<x_2$ 时引理 4.2 的条件(ii)成立，

(ii)当 $x_1\leqslant x_0\leqslant x_2$ 时引理 4.2 的条件(i)与(ii)成立；

(3) 引理 4.4 的条件(i)与(ii)成立，

则

(1) 对任一 $a\in D$，函数 $M(h,a)$ 在区间 $(0,Z^*)$ 上关于 h 至多有两个根(重数计在内)，且若 $M(0,a)=0$，则 $M(h,a)$ 在 $(0,Z^*)$ 上至多有一个根；

(2) 对任给的 $0<h_1<h_2<Z^*$，存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(h_1,h_2,D)>0$，使对一切 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$，$a\in D$，(4.21)在由 L_{h_1} 与 L_{h_2} 所界的紧环域内至多有两个极限环.

证明 设 $a\in D$，一般来说 x_1 与 x_2 与 a 有关. 若条件(3)成立，则结论(1)显然. 若条件(1)或(2)成立，则由引理 4.1～4.3 也易知结论(1)成立.

为证结论(2)，设存在 $\varepsilon_k\to 0$，$a_k\to a_0\in D$，使当 $(\varepsilon,a)=(\varepsilon_k,a_k)$ 时(4.21)有三个极限环 $L_j^{(k)}\to L_{h_j}$，$j=1,2,3$，不妨设 $0<h_1\leqslant h_2\leqslant h_3<Z^*$，则必有 $M(h_j,a_0)=0$，$j=1,2,3$，此与结论(1)矛盾. 证毕.

利用引理 4.4 还可讨论当 g 非奇时方程(4.21)包围三个奇

点的极限环的惟一性.为此,设存在 $x_{20}<0<x_{10}$ 使

当 $x\in(x_{20},x_{10}),x\neq 0$ 时 $xg(x)<0$,当 $x\notin[x_{20},x_{10}]$ 时

$$xg(x)>0, \tag{4.34}$$

又设 $Z^*=\min G(\pm\infty)>0$,则(4.21)的首阶 Melnikov 函数为

$$M(h,a)=\oint_{L_h}F(x,a)\mathrm{d}y=M_+(h,a)+M_-(h,a),$$

其中

$$M_\pm(h,a)=\int_{L_h^\pm}F(x,a)\mathrm{d}y,L_h^+=L_h\mid_{x\geqslant 0},L_h^-=L_h\mid_{x\leqslant 0}.$$

记 $F(x)=F(x,a)$,可证

定理 4.7 设(4.34)成立,又设对任一个 $a\in D$,下列条件成立

(i) 存在 $x_{22}\leqslant x_{21}\leqslant 0\leqslant x_{11}\leqslant x_{12}$,使 $F(x_{12})=F(x_{22})=0$,且当 $x\in(x_{21},x_{11})$ 时 $F'(x)<0$, 当 $x\notin[x_{21},x_{11}]$ 时 $F'(x)>0$;

(ii) 当 $x_{10}<x_{11}$ 时 $\dfrac{F'(x)\sqrt{G(x)-G(\bar{x}_1)}}{g(x)}$ 在 $x>\bar{x}_1$ 上不减,当 $x_{10}\geqslant x_{11}>0$ 或 $x_{11}=0$ 且 $F'(0)=0$ 时 $\dfrac{F'(x)\sqrt{G(x)-G(x_{10})}}{|g(x)|}$ 在 $x>x_{11}$ 上不减,其中 $\bar{x}_1=\min\{x_{11},x_1^*\},G(x_1^*)=0,x_1^*>x_{10}$;

(iii) 当 $x_{20}>x_{21}$ 时 $\dfrac{F'(x)\sqrt{G(x)-G(\bar{x}_2)}}{g(x)}$ 在 $x<\bar{x}_2$ 上不减,当 $x_{20}\leqslant x_{21}<0$ 或 $x_{21}=0$ 且 $F'(0)=0$ 时 $\dfrac{F'(x)\sqrt{G(x)-G(x_{10})}}{|g(x)|}$ 在 $x<x_{21}$ 上不增,其中 $\bar{x}_2=\min\{x_{21},x_2^*\},G(x_2^*)=0,x_2^*<x_{20}$,

则

(1) 对任一 $a\in D$,函数 $M(h,a)$关于 h 在$(0,Z^*)$上至多有两个根(重数计算在内),若 $M(0,a)=0$,则 $M(h,a)$在$(0,Z^*)$上关于 h 至多有一个根;

(2) 对任给的 $0<h_1<h_2<Z^*$,存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(h_1,h_2,D)>0$,使当 $a\in D,0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 时,使(4.21)在由 L_{h_1} 与 L_{h_2} 所围的环形域上至多有两个极限环.

证明 由条件(i)与(ii)及引理 4.4 知函数 $M_+(h,a)$关于 h 的二阶导数为负(除非 $x_{11}=0,F'(0)>0$),对(4.21)做变换 $x\to -x,y\to -y$,则(4.21)成为

$$\dot{x}=y-\varepsilon F_1(x,a),\dot{y}=-g_1(x),$$

其中 $F_1(x,a)=-F(-x,a),g_1(x)=-g(-x)$,而 L_h^- 成为 $L_h^{(1)}$,易见 $L_h^{(1)}$为上述方程的轨线,且

$$M_-(h,a)=\int_{L_h^{(1)}}F_1\mathrm{d}y.$$

由条件(i)与(iii),并对 M_- 利用引理 4.4 可得 M_- 关于 h 的二阶导数为负(除非 $x_{21}=0,F'(0)>0$),从而有 $M''(h,a)<0$,除非 $x_{11}=0,F'(0)>0$ 或 $x_{21}=0,F'(0)>0$. 而由条件(i),当 $x_{11}=0$, $F'(0)>0$ 或 $x_{21}=0,F'(0)>0$ 时必有 $xF(x)>0(x\neq 0)$,此时由引理 4.3 知有 $M_\pm(h,a)<0$,从而 $M(h,a)<0$. 因此,与定理 4.6类似可证定理结论成立. 证毕.

4.3 应用举例

应用前面几个定理可以讨论几类多项式 Liénard 方程的极限环的 Poincaré 分支.

例 4.1 考虑方程

$$\dot{x}=y,\dot{y}=-x(1+x)-\varepsilon y(a+bx),\qquad(4.35)$$

其中 $b>0$ 为常数,而 $a\in R$ 为参数. 当 $\varepsilon=0$ 时(4.35)有闭轨族:

$$L_h: \frac{1}{2}y^2 + G(x) = h, 0 < h < \frac{1}{6},$$

其中 $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$，可证(4.35)的首阶 Melnikov 函数 $M(h,a)$在 $0<h<\frac{1}{6}$上至多有一个根.

事实上，令 $f(x)=a+bx, g(x)=x(1+x)$，则当 $0<a\leqslant b$ 时有

$$(f/g)' = \frac{-1}{g^2}(a + 2ax + bx^2) < 0, x > -1, x \neq 0.$$

又(4.35)等价于

$$\dot{x} = y - \varepsilon\left(ax + \frac{1}{2}bx^2\right), \dot{y} = -x(1+x),$$

对此方程来说，方程组 $F(x)=F(y), G(x)=G(y)$等价于

$$a + \frac{b}{2}(x+y) = 0, \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{3}(x^2+xy+y^2) = 0,$$

而当 $a\leqslant 0$ 或 $a>b$ 时上述方程组在 $-1<y<0<x$ 上无解，从而由定理 4.1 即得结论.

类似可知

例 4.2 方程

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -x(1+(-1)^i x^2) - \varepsilon y(a+bx^2) \quad (4.36)$$

(其中 $b>0$, $i=0,1$)的首阶 Melnikov 函数 $M(h,a)$在区间$(0,+\infty)$(若 $i=0$)或$\left(0,\frac{1}{4}\right)$(若 $i=1$)上至多有一个根 .

例 4.3 考虑

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -x(x^2-1) - \varepsilon y(a+bx^2), \quad (4.37)$$

其中 $b>0$，对此方程我们有

$$f(x) = a + bx^2, F(x) = ax + \frac{b}{3}x^3, g(x) = x(x^2 - 1).$$

方程$\frac{1}{2}y^2 + G(x) = h$ 对$-\frac{1}{4} < h < 0$ 在右(左)半平面定义了一族小闭轨 $L_h^r(L_h^l)$,对 $h > 0$ 定义了一族大闭轨 L_h. 于是我们有三个 Melnikov 函数

$$M_j(h, a) = \oint_{L_h^j} F dy, j = r, l, -\frac{1}{4} < h < 0,$$

与

$$M(h, a) = \oint_{L_h} F dy, h > 0.$$

易证对任一 $a \in R$,或方程组 $F(x) = F(y), G(x) = G(y)$在区域 $0 < |y| < 1 < |x|$ 上无解或有$(f/g)' < 0(|x| \neq 0, 1)$,从而函数 M_r 与 M_l 在区间$\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$上至多有一个根.

在(4.24)中,当 $a \leqslant 0$ 时有 $x_1 = \sqrt{-a/b}$,而当 $a > 0$ 时取 $x_1 = x_2 = 0$,由于对(4.37)有

$$\begin{aligned} & f(x)\sqrt{G(x) - G(1)}/|g(x)| \\ & = (bx^2 + a)\frac{1}{2}|x^2 - 1|/[x|x^2 - 1|] \\ & = \frac{1}{2}(bx + a/x), \end{aligned}$$

因此引理 4.4 的条件(i)与(ii)均满足,故由定理 4.6 知 $M(h, a)$ 在$(0, +\infty)$上至多有两个根.

对方程(4.35)~(4.37)不少作者都进行过讨论(见[6,9,13,14]等),所用方法主要通过建立 Picard-Fuchs 方程来估计 Melnikov 函数的根的个数. 此处所用的方法要简单得多. 此外,我们指

出，对“大系数”的方程(4.35)~(4.37)已有完整的结果，详见[65, 106].

例 4.4 进一步考虑下列五次系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y(1+Ny^2) - \varepsilon\Big[x^5 + \sum_{i=1}^{4} a_i x^i\Big], \\ \dot{y} &= -x(1+bx^2), \end{aligned} \tag{4.38}$$

其中 $N\geqslant 0, b\geqslant 0$. 我们将证明(4.38)的 Melnikov 函数 $M(h, a_1, a_3)$关于 h 在$(0,+\infty)$上至多有两个根.

首先，对 $p(y)=y(1+Ny^2)$，易知 $p'(y)>0, (p'/p^3)'<0$ $(y\neq 0)$. 对(4.38)有 $x_1(Z)=-x_2(Z)$，且

$$K(Z,a) = 2x_1[x_1^4 + a_3x_1^2 + a_1],$$

$$K'_Z = \frac{2\phi(x_1^2)}{g(x_1)}, K''_Z = \frac{2\phi_2(x_1^2)}{g^3(x_1)},$$

其中

$$\phi_1(v) = 5v^2 + 3a_3v + a_1,$$

$$\phi_2(v) = 5bv^3 + 3(5-a_3b)v^2 + 3(a_3 - a_1b)v - a_1,$$

若 $a_1\leqslant 0$，则 ϕ_1 至多有一个正根，若 $a_1>0$ 且或 $a_3^2-4a_1<0$ 或 $a_3\geqslant 0$，则对 $Z>0$ 有 $K(Z,a)>0$，因此在这些情况下定理 4.1 的条件成立. 下设 $a_1>0, a_3^2-4a_1\geqslant 0$，且 $a_3<0$，并证明定理 4.2 的条件成立.

设 $Z_{02}>0$ 满足

$$[x_1(Z_{02})]^2 = \frac{1}{10}\Big[-3a_3 + \sqrt{9a_3^2 - 20a_1}\Big] \equiv v_0.$$

要证当 $Z>Z_{02}$时 $K''_Z>0$，即 $\phi_2(v)>0(v>v_0)$，由于 v_0 满足

$$v_0^3 = -\frac{3}{5}a_3v_0^2 - \frac{1}{5}a_1v_0, \; -a_1 = 5v_0^2 + 3a_3v_0,$$

可知

$$\begin{aligned}\phi_2(v_0) &= (15-6a_3b)v_0^2+(3a_3-4a_1b)v_0-a_1\\&=2v_0[(10-3a_3b)v_0+3a_3-2a_1b]\\&=\frac{v_0}{5}\sqrt{9a_3^2-20a_1}[10-3a_3b+b\sqrt{9a_3^2-20a_1}],\end{aligned}\tag{4.39}$$

因此由 $b\geqslant 0,a_3<0$ 知 $\phi_2(v_0)>0$. 由于 $a_3-a_1b<0$,因此 $\phi_2(0)<0,\phi'_2(0)<0$,又注意到 ϕ_2 为二次或三次多项式,可知只要 $v>0,\phi_2(v)>0$ 就必有 $\phi''_2(v)>0,\phi'_2(v)>0$,因此由 $\phi_2(v_0)>0$ 知,对 $v\geqslant v_0$ 有 $\phi'_2(v)\geqslant\phi'_2(v_0)>0$,从而对 $v\geqslant v_0$ 有 $\phi_2(v)>0$,于是由定理 4.3 即知结论成立.

例 4.5 若在(4.38)中有 $b<0$,则可证其 Melnikov 函数 $M(h,a_1,a_3)$在区间$\left(0,-\frac{1}{4b}\right)$上至多有两个根.

事实上,由上面对(4.38)的讨论若 $a_1\leqslant 0$,则 M 在$\left(0,-\frac{1}{4b}\right)$上至多有一个根,若 $a_1>0$ 且 $a_3^2-4a_1<0$ 与 $a_3\geqslant 0$ 之一成立,则 M 无根. 下设 $a_1>0,a_3^2-4a_1\geqslant 0,a_3<0$. 又可设 $v_0<-\frac{1}{b}$,即

$$b>\frac{10}{3a_3-\sqrt{9a_3^2-20a_1}}\equiv b_0 \tag{4.40}$$

$\left(\text{否则在}\left(0,-\frac{1}{b}\right)\text{上 }\phi_1(v)\text{至多有一个正根,此时 }M\text{ 至多有一个根}\right)$. 于是由(4.39)与(4.40)知 $\phi_2(v_0)>0$. 又注意到 $b<0,\phi_2(0)<0$,故为证对 $v\in\left(v_0,-\frac{1}{b}\right)$有 $\phi_2(v)>0$,只须证 $\phi_2\left(-\frac{1}{b}\right)>0$(因为 ϕ_2 为首项系数为负的三次多项式). 易知

$$\phi_2\left(-\frac{1}{b}\right)=\frac{2}{b^2}[5-3a_3b+a_1b^2]\equiv\frac{2}{b^2}\phi_3(b),$$

二次多项式 ϕ_3 的较大的根为

$$b_1=\frac{1}{2a_1}\left[3a_3+\sqrt{9a_3^2-20a_1}\right],$$

由于 $b_0\geqslant b_1$,故由(4.40)知有 $\phi_2\left(-\frac{1}{b}\right)>0$,从而结论得证.

由上述两例的讨论知,方程

$$\dot{x}=e^y-1-\varepsilon\left[x^5+\sum_{i=1}^{4}a_ix^i\right],\dot{y}=-x(1+bx^2)$$

的一阶 Melnikov 函数在 $h>0$(当 $b\geqslant 0$ 时)或 $0<h<-\frac{1}{b}$(当 $b<0$时)上至多有两个根.

利用定理 4.5 可进一步证明下述七次系统

$$\dot{x}=y(1+Ny^2)-\varepsilon\left[x^7+\sum_{i=1}^{6}a_ix^i\right],\dot{y}=-x$$

(其中 $N\geqslant 0$)的首阶 Melnikov 函数在 $h>0$ 上至多有三个根(参考[48]).

§5 Liénard 系统的全局分支

以上两节分别讨论了 Liénard 系统的 Hopf 与 Poincaré 分支,本节将把这两种分支以及同宿分支等综合考虑,并由此获得全局分支中极限环的最多个数.我们只给出所述 Liénard 系统最多出现一、二或三个极限环的条件.

5.1 全局分支中极限环的个数

仍考虑方程(4.1),首先假设

$$F(0,a)=0,G(\pm\infty)=\infty,xg(x)>0(x\neq 0),$$
$$yp(y)>0(y\neq 0),p'(0)>0,g'(0)>0,p'(y)\geqslant 0. \tag{5.1}$$

条件(5.1)保证了当 $\varepsilon=0$ 时(4.1)有全局中心,且原点为初等中心,易见方程 $G(x)=G(y)$ 在 $y<0<x$ 上确定了惟一的单调减函数 $y=\alpha(x)$,且 $\alpha(0)=0$. 首先可证

引理 5.1 设(5.1)成立,又设

(i) $\lim\limits_{\substack{|y|\to\infty \\ r\to 0}} \dfrac{p'(y+r)}{p^2(y)}=0$;

(ii) 存在 $x_0=x_0(D)>0$,使当 $x\geqslant x_0$ 时 $F(x,a)-F(\alpha(x),a)>0$且

$$\inf_{a\in D,x\geqslant x_0}\int_0^x[F(x,a)-F(\alpha(x),a)]\mathrm{d}x>0,$$

则存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(D)>0$ 及有界区域 $V=V(D)\subset R^2$,使对满足 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0, a\in D$ 的一切 (ε,a),方程(4.1)的任何闭轨都位于 V 中.

证明 对方程(4.1)引入变换

$$u=\mathrm{sgn}x\sqrt{G(x)},\mathrm{d}\tau=\frac{g(x)}{2u}\mathrm{d}t,$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}=p(y)-F(X(u),a),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=-2u,$$

其中 $X(u)$ 为变换的反函数. 由于成立

$$F(X(u),a)=F_1(u,a)+F_2(u,a),$$

$$F_i(u,a)=\frac{1}{2}[F(X(u),a)+(-1)^iF(X(-u),a)],$$

且

$$F_1(u,a)=\frac{1}{2}[F(x,a)-F(\alpha(x),a)]$$

$$(\text{当 } u = \operatorname{sgn}\sqrt{G(x)} \text{ 时})$$

故利用第四章定理 2.4 即得结论.证毕.

当 F 与 G 足够光滑时可设

$$F(\alpha(x),a) - F(x,a) = \sum_{i=1}^{7} B_i x^i + o(x^7), 0 < x \ll 1, \tag{5.2}$$

可证:

定理 5.1 设(5.1)与(5.2)成立,$a \in D$.如果

(i) $|B_1| + |B_3| > 0$(或 $B_1 \equiv 0, |B_3| + |B_5| > 0$);

(ii) 当 $B_1 = 0$(或 $B_3 = 0$)时方程组 $F(x,a) = F(y,a)$, $G(x) = G(y)$在 $y<0<x$ 上无解;

(iii) 当 $B_1 \neq 0$(或 $B_3 \neq 0$)时方程组(4.12)在 $y<0<x$ 上至多有一个解,则

(1) 包括重数在内,函数 $M(h,a)$在 $h \geqslant 0$ 上至多有两个根(或三个根),而 $h^{-1}M$(或 $h^{-2}M$)在 $h \geqslant 0$ 上至多有一个根;

(2) 对给定紧集 V,存在 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(V,D) > 0$,使当 $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0, a \in D$ 时方程(4.1)在 V 中至多有一个极限环;

(3) 若进一步设引理 5.1 的条件(i)与(ii)成立,则存在 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(D) > 0$,使当 $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0, a \in D$ 时,(4.1)在整个平面上至多有一个环.

证明 以括号外的情况为例证之.由条件(ii)知当 $B_1 = 0$ 时对 $h > 0$ 有 $M(h,a) \neq 0$,此时由条件(i)、定理3.4的证明及(3.37)知 M 以 $h = 0$ 为 2 重根.当 $B_1 \neq 0$ 时由条件(ii)知 M 在 $h > 0$上至多有一个根,且 $h = 0$ 为 M 的单根,因此结论(1)成立.利用定理 3.1 并仿定理 4.1 的结论(b)可证结论(2)成立.由引理 3.1 及结论(2)即知结论(3)成立.证毕.

完全类似可证下列两个定理.

定理 5.2 设(5.1)与(5.2)成立,$a\in D$.如果

(i) $|B_1|+|B_3|+|B_5|>0$,

(ii) $M(h,a)$在 $h>0$ 上至多有两个根,

(iii) 当 $B_1=0(B_1=B_3=0)$时 M 在$h>0$ 至多有一个根(无根),则

(1) 包括重数在内,M 在$h\geqslant 0$ 上至多有三个根,而 $h^{-1}M$ 在$h\geqslant 0$上至多有两个根;

(2) 对任给紧集 $V\subset R^2$,都存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(V,D)>0$,使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0,a\in D$ 时(4.1)在 V 中至多有两个极限环.

(3)若进一步设引理 5.1 的条件(i)与(ii)成立,则存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(D)>0$,使当$0<|\varepsilon|<\varepsilon_0,a\in D$ 时(4.1)在整个平面上至多有两个环.

定理 5.3 设(5.1)与(5.2)成立,$a\in D$.如果

(i) $|B_1|+|B_3|+|B_5|+|B_7|>0$,

(ii) $M(h,a)$在 $h>0$ 上至多有三个根,

(iii) 当 $B_1=0(B_1=B_3=0$ 或 $B_1=B_3=B_5=0)$时 M 在 $h>0$上至多有两个根(一个根或无根),则

(1) M 在$h\geqslant 0$ 上至多有四个根(重数计算在内),而 $h^{-1}M$ 在$h\geqslant 0$ 上至多有三个根;

(2) 对任给紧集 $V\subset R^2$,存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(V,D)>0$,使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0,a\in D$ 时(4.1)在 V 中至多有三个极限环;

(3) 若进一步设引理 5.1 的条件(i)与(ii)成立,则存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(D)>0$,使当$0<|\varepsilon|<\varepsilon_0,a\in D$ 时(4.1)在整个平面上至多有三个极限环.

其次,设

$$\begin{aligned}&F(0,a)=p(0)=g(0)=g(x_0)=0,\\&p'(y)>0,g'(0)>0,g'(x_0)<0,\\&g(x)\neq 0(0<|x|<|x_0|),\end{aligned}\tag{5.3}$$

其中 $x_0 \neq 0$，则当 $\varepsilon = 0$ 时(4.1)有包围原点的闭轨族 L_h，$0 < h < G(x_0) \equiv h_0$，且其外边界为通过鞍点 $(x_0, 0)$ 的同宿轨 L_{h_0}，M 在 $h = h_0$ 附近有下列展式：

$$M(h,a) = c_0(a) + c_1(a)(h - h_0)\ln|h - h_0| + c_2(a)(h - h_0) + \cdots, \tag{5.4}$$

其中由第二章定理 5.7 及第四章定理 3.6 知

$$c_0(a) = M(h_0,a), c_1(a) = f(x_0,a)/\sqrt{-p'(0)g'(x_0)},$$
$$c_2(a) = -\oint_{L_{h_0}} f(x,a)\mathrm{d}t \quad (\text{当 } c_1 = 0 \text{ 时}). \tag{5.5}$$

与定理 5.1 类似可证

定理 5.4 设(5.2)~(5.4)成立，$a \in D$. 如果

(i) $|B_1| + |B_3| > 0, |c_0| + |c_1| > 0$,

(ii) 当 $B_1 = 0$ 或 $c_0 = 0$ 时 $M \neq 0 (0 < h < h_0)$,

(iii) 当 $B_1 \neq 0, c_0 \neq 0$ 时 M 在 $(0, h_0)$ 上至多有一个根，

则

(1) 对一切 $a \in D$，M 在 $[0, h_0]$ 上至多有两个根，而 $h^{-1}M$ 在 $[0, h_0)$ 上至多有一个根；

(2) 存在 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(D) > 0$ 及包含闭轨族 $\bigcup_{0 \leqslant h \leqslant h_0} L_h$ 的开集 U，使当 $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$，$a \in D$ 时(4.1)在 U 中至多有一个极限环.

定理 5.5 设(5.2)~(5.4)成立，$a \in D$. 如果

(i) $|B_1| + |B_3| + |B_5| > 0, |c_0| + |c_1| + |c_2| > 0$,

(ii) 当 $B_1 = B_2 = 0$，或 $c_0 = c_1 = 0$ 或 $B_1 = c_0 = 0$ 时 M 在 $(0, h_0)$ 上无根，

(iii) 当 $B_1 = 0$ 或 $c_0 = 0$ 时 M 在 $(0, h_0)$ 上至多有一个根，

(iv) 当 $B_1 \neq 0, c_0 \neq 0$ 时 M 在 $(0, h_0)$ 上至多有两个根，

则

(1) M 在$[0,h_0]$上至多有三个根，而 $h^{-1}M$ 在$[0,h_0]$上至多有两个根；

(2) 存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(D)>0$ 及包含 $\bigcup\limits_{0\leqslant h\leqslant h_0}L_h$ 的开集 U，使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0, a\in D$ 时(4.1)在 U 中至多有两个极限环.

注 5.1 仿上可给出 M 在$[0,h_0]$上至多有四个根的条件.

注 5.2 若 L_{h_0} 为对称的两点异宿环，而(4.1)又是中心对称系统，则定理 5.4 与 5.5 也类似成立. 对于对称的双同宿轨也有类似结论.

注 5.3 可用第四节的定理及注 4.1 与注 4.3 等来验证定理 5.2～5.5 的条件(ii)与(iii)等. 详见下面的应用举例.

5.2 几类多项式系统的环性数

本小节给出以上定理的一些应用例子，这些例子多数来源于二维系统余维 2 的分支.

首先考虑例 4.1 中已讨论过的方程(4.35)：

$$\dot{x}=y,\dot{y}=-x(1+x)-\varepsilon y(a+bx).$$

利用第一章(4.10)知 $B_1=-2a, B_3=\frac{2b}{3}+O(a)$. 又令 $v=1-\frac{2}{3}(x+1)$，可求得 $M\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{6}{5}\left(\frac{b}{7}-a\right)=c_0$. 由(5.5)又知 $c_1=a-b$. 因此由第四节对(4.35)的讨论及注 5.1 知，若视 b 为正常数，a 为参数，则定理 5.4 的条件(i)～(iii)成立，从而对任给 $N>0$，存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(b,N)>0$，使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0, |a|+|b|\leqslant N$ 时(4.35)在整个平面上至多有一个极限环. 若将 b 也视为参数，则由定理 5.4 的结论(1)易知对任意$(a,b)\neq 0$，M 在$[0,h_0]=\left[0,\frac{1}{6}\right]$上至多有两个根，再由第四章定理 3.10 知对任给的 $N>0$，存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(N)>0$，使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0, |a|+|b|\leqslant N$ 时

(4.35)在整个平面上至多有一个极限环.

用类似手法,由例 4.2 及定理 5.1 可证给定 $b>0, N>0$,存在 $\varepsilon_0>0$,使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0, |a|\leqslant N$ 时方程

$$\dot{x} = y, \dot{y} = x(1 + x^2) - \varepsilon y(a + bx^2)$$

在整个平面上至多有一个极限环.进一步考虑到原点的稳定性与正半轨的有界性(利用定理 2.6)可知当且仅当 $ab<0$ 时极限环存在.

同理,由第四章定理 3.10 及前面的注 5.2 知任给 $N>0$,存在 $\varepsilon_0>0$,使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0, |a|+|b|\leqslant N$ 时方程

$$\dot{x} = y, \dot{y} = x(1 - x^2) - \varepsilon y(a + bx^2)$$

在整个平面上至多有一个极限环.

利用例 4.3、引理 5.1 及注 5.2 不难证明对常数 $b>0, N>0$,存在 $\varepsilon_0>0$ 使方程

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -x(x^2 - 1) - \varepsilon y(a + bx^2)$$

当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0, |a|\leqslant N$ 时至多有三个极限环、至多有两个小环、至多有两个大环,若有三个环,必是一个大环包着两个小环.利用旋转向量场理论还可给出极限环随参数 a 的变化情况.

利用定理 5.2、注 4.3,及例 4.4 与 4.5 中对(4.38)的讨论易证,对每个常数 $b\geqslant 0$,及给定的 $N^*>0$,存在 $\varepsilon_0>0$,使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0, |a_i|\leqslant N^*$ 时方程(4.38)至多有两个极限环.若将 b 作为参数,则可进一步用反证法证明,给定 $N^*>1$,存在 $\varepsilon_0>0$,使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0, |a_i|\leqslant N^*, 0\leqslant b\leqslant N^*$ 时(4.38)至多有两个极限环.对 $b<0$ 的情况要获得(4.38)在全平面上极限环的惟二性,还必须讨论闭轨族的边界——异宿环产生极限环的惟二性.目前这一问题尚难以解决.

5.3 一类 n 次 Liénard 方程的环性数

本小节考虑 n 次 Liénard 系统

$$\dot{x} = y - \varepsilon \sum_{i=1}^{n} a_i x^i, \dot{y} = -x(1+x). \tag{5.6}$$

我们证明

定理 5.6 任给 $L>0$，存在 $\varepsilon_0>0$ 使对一切 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$，$|a_i|\leqslant L(1\leqslant i\leqslant n)$方程(5.6)(在全平面)至多有$\left[\frac{2n-1}{3}\right]$个极限环，且可以有$\left[\frac{2n-1}{3}\right]$个极限环，即(5.6)的环性数为$\left[\frac{2n-1}{3}\right]$.

证明 先做尺度变换

$$x \to -\frac{1}{2}x, y \to -\frac{1}{2\sqrt{2}}y, t \to \frac{2t}{\sqrt{2}},$$

然后将点$(-1,0)$移至原点，由(5.6)可得

$$\dot{x} = y - \varepsilon \sum_{i=0}^{n} b_i x^i, \dot{y} = x^2 - 1. \tag{5.7}$$

记

$$G(x) = x - \frac{1}{3}x^3, F(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i.$$

易知

$$G^j(x) = x^j\left(1 - \frac{1}{3}x^2\right)^j = \sum_{i=0}^{j} g_{ji} x^{j+2i}, \tag{5.8}$$

其中 $g_{j0}=1, g_{jj}=(-1)^j/3^j, j\geqslant 0$.

先设 $n=3m-1$. 设 $c_j(0\leqslant j\leqslant m-1)$为待定常数，由(5.8)可知

$$F(x) - \sum_{i=0}^{m-1} c_i G^i(x) = \sum_{i=1, i\neq 0(\mathrm{mod}\ 3)}^{n} A_i x^i + \sum_{j=0}^{m-1} A_{3j} x^{3j}, \tag{5.9}$$

其中

$$A_i = b_i - B_i(c_0, \cdots, c_{m-1}), 1 \leqslant i \leqslant n, i \neq 0 (\mathrm{mod} 3),$$

$$A_{3j} = b_{3j} - c_j g_{jj} - c_{j+2} g_{j+2,j-1} - \cdots - c_{3j} g_{3j,0}, 0 \leqslant j \leqslant m-1, \tag{5.10}$$

而每个 $B_i(1 \leqslant i \leqslant n, i \neq 0 (\mathrm{mod}\ 3))$为 $c_0, \cdots, c_{m-1}$的线性函数，且当 $i \geqslant m$ 时 $c_i = 0$. 特别有

$$A_0 = b_0 - c_0,$$

$$A_3 = b_3 - c_1 g_{11} - c_3 g_{30},$$

$$A_6 = b_6 - c_2 g_{22} - c_4 g_{41} - c_6 g_{60},$$

…………

$$A_{3(m-3)} = b_{3(m-3)} - c_{m-3} g_{m-3,m-3} - c_{m-1} g_{m-1,m-4},$$

$$A_{3(m-2)} = b_{3(m-2)} - c_{m-2} g_{m-2,m-2},$$

$$A_{3(m-1)} = b_{3(m-1)} - c_{m-1} g_{m-1,m-1},$$

由于 $g_{jj} \neq 0 (0 \leqslant j \leqslant m-1)$，我们可依次惟一地选取 $c_{m-1}, c_{m-2}, \cdots, c_0$，使

$$A_{3(m-1)} = 0, A_{3(m-2)} = 0, \cdots, A_3 = 0, A_0 = 0.$$

于是对已取定的 $c_{m-1}, \cdots, c_0$，(5.9)成为

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i G^i(x) + \sum_{i=1, i \neq 0 (\mathrm{mod} 3)}^{n} A_i x^i. \tag{5.11}$$

同理，对 $n = 3m$ 及 $n = 3m+1$，我们可类似确定 $c_0, \cdots, c_m$ 使

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i G^i(x) + \sum_{i=1, i \neq 0 (\mathrm{mod} 3)}^{n-1} A_i x^i (\text{对 } n = 3m) \tag{5.12}$$

及

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i G^i(x) + \sum_{i=1, i \neq 0 (\mathrm{mod} 3)}^{n} A_i x^i (\text{对 } n = 3m+1), \tag{5.13}$$

其中系数 A_i 仍满足(5.10).

设 $H(x,y)=\frac{1}{2}y^2+G(x)$,并记 L_h 为由方程 $H(x,y)=h$ 定义的闭曲线($|h|<2/3$).方程(5.7)的首阶 Melnikov 函数为

$$M(h)=\oint_{L_h}F(x)\mathrm{d}y.$$

令

$$I_k(h)=\oint_{L_h}x^k y\mathrm{d}x, 0\leqslant k\leqslant n-1,$$

则注意到

$$\oint_{L_h}G^j(x)\mathrm{d}y=\oint_{L_h}(h-y^2/2)^j\mathrm{d}y=0, j\geqslant 0,$$

由(5.11)~(5.13)及分部积分公式，可得

$$\begin{aligned}M(h)&=\sum_{i=1,i\neq 0(\mathrm{mod}3)}^{n}A_i\oint_{L_h}x^i\mathrm{d}y\\&=\sum_{i=1,i\neq 0(\mathrm{mod}3)}^{n}(-iA_i)I_{i-1}(h)\\&=\sum_{k=0,k\neq 2(\mathrm{mod}3)}^{n-1}(-k-1)A_{k+1}I_k(h)\\&\equiv I_0(h)N(h)\qquad(\text{对 } n=3m\pm 1),\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}M(h)&=\sum_{k=0,k\neq 2(\mathrm{mod}3)}^{n-2}(-k-1)A_{k+1}I_k(h)\\&\equiv I_0(h)N(h)\qquad(\text{对 } n=3m).\end{aligned}$$

易知,上述 $N(h)$ 可统一写成下式

$$N(h) = \sum_{k=0}^{p} A_{k+1}^{*} J_k(h), p = \left[\frac{2n-1}{3}\right],$$

其中

$$J_k(h) = I_{[3k/2]}(h), A_{k+1}^{*} = (-[3k/2]-1)A_{[3k/2]+1}, 0 \leqslant k \leqslant p.$$

由[79]中的命题 3.10 及推论 3.2 知下列引理成立：

引理 5.2 若 $A_1^*, A_2^*, \cdots, A_{p+1}^*$ 不全为零，则 $N(h)$ 在闭区间 $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$ 上至多有 p 个根（重数计算在内）.

另一方面，若 $A_{k+1}^* = 0, k = 0, \cdots, p$，则由(5.11)～(5.13)知 F 为 G 的多项式，从而由第四章引理 4. 3 知此时(5.7)有中心奇点.

又易见

$$当 -\frac{2}{3} < h \leqslant \frac{2}{3} 时, I_0(h) = \oint_{L_h} y\mathrm{d}x > 0,$$

$$当 -\frac{2}{3} \leqslant h < \frac{2}{3} 时, I'_0(h) = \oint_{L_h} \frac{1}{y}\mathrm{d}x = T(h) > 0,$$

此处 $T(h)$ 为 L_h 的周期，于是由第四章定理 3.10 及本章定理3.5 即得证明. 证毕.

习　　题

1. 考虑广义 Liénard 方程

$$\dot{x} = h(y) - F(x), \dot{y} = -g(x),$$

其 F, g, h 均为 C^1 函数，且 $xg(x) > 0 (x \neq 0), G(\pm\infty) = \infty, G(x) = \int_0^x g(u)\mathrm{d}u$，如果下列条件满足

(i) 存在 $M>0, b>0$ 使当 $|y| \gg 1$ 时 $h(y) = M|y|^b \mathrm{sgn} y + o(|y|^b)$；

(ii) 存在 $N>0, 0<b_0<\frac{b}{b+1}, 0<a<(b+1)\left(\frac{b+1}{b}\right)^{\frac{b}{b+1}}$，使

当 $x \geqslant N$ 时，$F(x) \geqslant (b+1)\left(\frac{b+1}{b}\right)^{\frac{b}{b+1}} M^{\frac{1}{b+1}} [G(x)]^{\frac{b}{b+1}} - [G(x)]^{b_0}$,

当 $x \leqslant -N$ 时，$F(x) < aM^{\frac{1}{b+1}}[G(x)]^{\frac{b}{b+1}}$,

则所述方程的一切解为正向有界的(韩茂安, 见 [32, 65]).

2. 仍考虑上题中的方程，且设 $xg(x)>0(x \neq 0)$，又设方程组 $F(x)=F(y)$, $G(x)=G(y)$在 $y<0<x$ 中无解，则所述方程必没有闭轨(Cherkas).

3. 仍考虑题 1 中的方程，且设 $xg(x)>0(x \neq 0)$, $f(x)=F'(x)$存在，如果 $\lim\limits_{x \to 0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \infty$或当 $0<|x| \ll 1$ 时 $xf(x)$定号，则当方程组 $F(x)=F(y)$, $f(x)/g(x)=f(y)/g(y)$在 $y<0<x$ 中无解时所述方程不存在闭轨(韩茂安, 见[65]).

4. 仍考虑题 1 中的方程，设

   (i) $f(0)<0$, $xg(x)>0(x \neq 0)$;

   (ii) $f(x)/g(x)$对 $x \neq 0$ 不减;

   (iii) $h(0)=0$ 且 $h(y)$严格增加，

   则所述方程至多有一个极限环(见[145]).

5. 考虑方程

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -g(x) - f(x)y,$$

其中 f, g 为连续函数. 设存在 $x'_1 \leqslant 0 \leqslant x_1$ 及 $x_2>0$ 使当 $x \in [x'_1, x_1]$时 $xg(x)>0$, $f(x_2)=1$，且对一切 x 有 $f(x)[G(x)-G(x_2)] \geqslant 0, \neq 0$，则所述方程至多有一个包围所有奇点的极限环(韩茂安，见 [65]).

6. 考虑题 1 中的方程，设 F, g, h 为解析函数，且 $h(0)=F(0)=g(0)=0$, $g'(0)>0$, $h'(0)>0$，则原点为该方程的中心奇点当且仅当存在连续函数 $C(u)$, $u \geqslant 0$，使 $F(x)=C(G(x))$对 $|x| \ll 1$ 成立.

7. 考虑解析系统

$$\dot{x} = y - (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)K(x), \dot{y} = -g(x),$$

其中 $K(0) \neq 0$, $g(0)=0$, $g'(0)>0$，证明任给 $N>0$，存在原点邻域 V，使对一切 $|a_i| \leqslant N (i=1,2,3)$，该方程在 V 中环性数为 1 或 2.

8. 考虑三次系统

$$\dot{x} = y(1 + y^2) - \varepsilon(a_1 + a_2 x)x^2, \dot{y} = - x(1 + bx + x^2),$$

其中 $b^2 < 4$. 试证对任意平面紧集 V,存在 $\varepsilon_0 > 0, N > 0$ 使当 $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $|a_1| + |a_2| \leqslant N$ 时该方程在 V 中的环性数为 1.

9. 考虑方程

$$\dot{x} = p(y) - \sum_{i=1}^{n} a_i x^n, \dot{y} = - g(x),$$

其中 p, g 为 C^∞ 函数, $g(-x) = -g(x)$ 且 $p(0) = g(0) = 0, p'(0) > 0$, $g'(0) > 0$, 证明原点的环性数为 $\left[\frac{n-1}{2}\right]$.

10. 证明方程

$$\dot{x} = y(1 + Ny^2) - \varepsilon\left[x^7 + \sum_{i=1}^{6} a_i x^i\right], \dot{y} = - x$$

(其中 $N \geqslant 0$)的首阶 Melnikov 函数在 $h > 0$ 上至多有三个根([48]).

11. 设 $g(x)$为任一 C^∞ 函数且 $g(0) = 0, g'(0) > 0$, 又设 $F(x, a)$为 x 的 $2n + 1$ 次多项式且 $F(-x, a) = -F(x, a)$. 证明方程

$$\dot{x} = y - F(x, a), \dot{y} = - g(x)$$

的在原点的 Hopf 环性数为 n.

参 考 文 献

[1] Albrecht F. Polynomial Lienard equations and Hilbert's 16th problem. International Meeting on ODEs and Their Applications. Firenze(Italy). Sept. 20~24, 1993, 35~47, Finito di Stampare nel mese di Settembre. 1995

[2] Andronov AA and Leontovich EA. Gordon II and Maier AG. Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane. Keter Press. Jerusalem. 1991

[3] Arnold VI. Ordinary Differential Equations. MIT Press. Cambridge, Massachusetts. 1973

[4] Arnold VI. Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag. New York. 1983

[5] Blows TR and Rousseau C. Bifurcation at infinity in polynomial vector fields. J Diff Eqns, 104(2)(1993):215~242

[6] Bogdanov RI. Versal deformations of singularity of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalues. Proc Petrovki Sem 2(1976):37~65

[7] Cai S and Guo G. Saddle values and limit cycles generated by separatrix of quadratic systems. Proceedings of Asian Math Conference'90. World Scientific, 1992. 25~31

[8] 蔡燧林，钱祥征. 常微分方程定性理论引论.北京：高等教育出版社，1994

[9] Carr J. Applications of Center Manifold Theory. Springer-Verlag. New York. 1981

[10] Carr J, Chow SN and Hale JK. Abelian integrals and bifurcation theory. J Diff Eqns, 59(1985): 413~436

[11] Chicone C and Jacobs M. Bifurcations of limit cycles from quadratic isochrones, J Diff Eqns, 91(1991):268~326

[12] Chicon C and Latushkin Y. Center manifolds for infinite dimentional nonautonomous diferential equations. J Diff Eqns, 141(1997):356~399

[13] Chow SN and Hale JK. Methods of Bifurcation Theory. Springer-Verlag. New York, 1982

[14] Chow SN, Li C and Wang D. Normal Forms and Bifurcations of Planar Vector Fields. Cambridge University Press. Cambridge. 1994

[15] Chow SN and Lu K. Invariant manifolds and foliations for quasiperiodic systems. J Diff Eqns, 117(1995): 1~27

[16] Christopher C and Lynch S. Small-amplitude limit cycle bifurcations for Lienard systems with quadratic or cubic damping or restoring forces. Nonlinearity, 12(1999):

1099~1112
[17] Coddington EA and Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw Hill. New York. 1955
[18] Cronin J. Differential Equations: Introduction and Qualitative Theory. Marcel Dekker. 1980
[19] Demidovich BP. Lectures on the Mathematical Theory of Stability. Nauka. Moscow. 1967
[20] Dumortier F and Li C. On the uniqueness of limit cycles surrounding one or more singularitis for Lienard equations. Nonlinearity, 9(1996): 1489~1500
[21] Dumortier F and Li C. Quadratic Lienard equations with quadratic damping. J Diff Eqns, 139(1997):41~59
[22] Dumortier F, Li C and Zhang Z. Unfolding of a quadratic integrable system with two centers and two unbounded heteroclinic loops. J Diff Eqns, 1(1997):146~193
[23] Dumortier F, Roussarie R and Rousseau C. Elementary graphics of cyclicity 1 and 2. Nonlinearity, 7(1994): 1001~1043
[24] Dumortier F and Rousseau C. Cubic Lienard equations with linear damping. Nonlinearity, 3(1990): 1015~1039
[25] Farkas M. Periodic Motions. Springer-Verlag. New York. 1994
[26] 冯贝叶. 临界情况下异宿环的稳定性. 中国科学(A), 7(1991): 673~684
[27] 冯贝叶, 钱敏. 鞍点分界线圈的稳定性及其分支出极限环的条件. 数学学报, 28(1)(1985):53~70
[28] Gasull A and Guillamon A. An explicit expression of the first Liapunov and period constants with applications. J Math Anal Appl, 211(1997):190~212
[29] Guckenheimer J and Holmes P. Nonlinear Oscillations. Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields. Springer-Verlag. New York. 1983
[30] Hale JK. Topics in dynamical bifurcation theory. NSF- CBMS lecture. 17(1989). Amer Math Soc. Providence. RI
[31] Hale JK and Kocak H. Dynamics and Bifurcaions Springer-Verlag. New York. 1991
[32] 韩茂安. 关于方程 $\dot{x}=\varphi(y)-F(x),\dot{y}=-y(x)$ 的周期解、无界解及振荡解、南京大学学报数学半年刊, 1(1984):89~101
[33] 韩茂安. R^n 上向量场的一个几何性质. 数学季刊,1(1989): 24~31
[34] 韩茂安. 高维退化 Hopf 分支及其应用. 中国科技协会首届青年学术年会论文集, 理科分册. 中国科技出版社. 1992
[35] 韩茂安. 同宿异宿奇闭轨分支出极限环的个数. 中国科学(A), 2(1993):113~122
[36] Han M. Bifurcation of limit cycles and the stability of the equator. Dynamical Sys-

tems. China. Sep, 1990-June, 1991. World Scientific. 1993
[37] 韩茂安.周期扰动系统不变环面和亚调和解的分支. 中国科学(A),11(1994):1152~1160
[38] 韩茂安. 三维系统周期轨道的分支.应用数学学报, 4(1995):528~537
[39] 韩茂安.平面周期扰动系统不变环面的分支理论.中国科学(A), 1(1996):34~43
[40] 韩茂安. 平面同宿轨的环性数与二次可积系统.中国科学(A), 10(1997):891~902
[41] Han M. Bifurcations of limit cycles and the cusp of order n. Acta Math Sinica(NS), 1(1997):64~75
[42] Han M. Periodic perturbations of planar systems with a semistable limit cycle. Chin Sci Bull, 42(2)(1997):265~269
[43] Han M. Center manifolds of quasiperiodic differential equations. Progress in Natural Science, 8(5)(1998):548~553
[44] 韩茂安.高维系统周期解的共振分支.应用数学学报,1(1998):1~8
[45] 韩茂安.一类异宿环分支问题中极限环的唯一性.高校应用数学学报,4(1999):422~426
[46] Han M. Liapunov constants and Hopf cyclicity of Lienard systems. Ann of Diff Eqns, 15(2)(1999):113~126
[47] Han M. Global behavior of limit cycles in rotated vector fields. J Diff Eqns, 151 (1999):20~35
[48] Han M. Existence of at most 1, 2 or 3 zeros of a Melnikov function and limit cycles. J Diff Eqns,170(2001),325~343
[49] Han M. On the Hopf cyclicity of plane systems. J Math Anal Appl, 245(2000):404~422
[50] Han M. On the Hopf cyclicity of Lienard systems. Letter of Appl Math (to appear)
[51] Han M. On the maximal number of limit cycles in global bifurcations. CDSNS No. 319. Georgia Institute of Technology. 1998
[52] 韩茂安, 陈健.双同宿分支中极限环的个数.中国科学(A), 5(2000):401~414
[53] Han M and Jiang K. On the global bifurcation of limit cycles on the plane. Comm. On Appl Nonl Anal, 3(1995):97~113
[54] Han M and Jiang K. Existence and uniqueness of the periodic orbits of a class of cylinder equations. J Math Anal Appl, 200(1996):106~120
[55] Han M and Jiang K. The uniqueness of limit cycles bifurcating from a heteroclinic loop. Proceeding of Dynamical Systems and Applications. Vol. 2, 223~230. Dynamic Publishers. 1996

[56] 韩茂安，Jiang K. 一般自治系统周期解的局部分支. 数学年刊，17A(2)(1996). 179～188

[57] Han M, Jiang K and Green D Jr. Bifurcations of periodic orbits, subharmonic solu tions and invariant tori of high dimentional systems. Nonlinear Analysis, 36(1999): 319～329

[58] 韩茂安，李良应. 同宿异宿环分支出极限环的唯一性. 数学年刊，5(1995):645～651

[59] 韩茂安，罗定军，朱德明. 奇闭轨分支出极限环的唯一性(Ⅱ，Ⅲ). 数学学报，4,5 (1992):523～530, 653～664

[60] Han M and Qian T. On the limit cycles of planr autonomous systems. Chin. Ann. Math. ,22B:3(2001),297～306

[61] 韩茂安，王政. Melnikov 函数在中心处的可微性问题. 系统科学与数学，3(1997):269～274

[62] Han M and Ye Y. On the coefficients in the expansion of Melnikov functions. Ann Diff Eqns, 14(2)(1998): 156～162

[63] 韩茂安，叶彦谦，朱德明. 同宿环的环性数与退化三次哈密顿函数. 中国科学(A), 4(1999):298～310

[64] Han M and Zhang Z. Cyclicity 1 and 2 conditions for a 2 - polycycle of integrable systems on the plane. J Diff Eqns, 155(1999):245～261

[65] 韩茂安，朱德明. 微分方程分支理论. 北京：煤炭工业出版社，1994

[66] Hassard BD, Kazarinoff ND and Wan YH. Theory and Applications of the Hopf Bifurcation. Cambridge University Press. Cambridge. 1980

[67] Hartman P. On local homeomorphisms of Euclidean spaces. Bol Soc Mat Mexicana, 5(1960): 220～241

[68] Hartman P. Ordinary Differential Equations. John Wiley and Sons. New York. 1964

[69] He Y and Li C. On the number of limit cycles arising from perturbations of homoclinic loops of quadratic integrable systems. Diff Eqns Dynamical Systems, 5(1997): 303～316

[70] Horozov E and Iliev ID. On saddle loop bifurcations of limit cycles in perturbations of quadratic Hamiltonian systems. J Diff Eqns, 113(1994): 1521～1537

[71] Horozov E and Iliev ID. Linear estimate for the number of zeros of Abelian integrals with cubic Hamiltonians. Nonlinearity, 11(6)(1998):1521～1537

[72] 黄立宏. 柱面上一类动力系统非零伦闭轨的存在性与唯一性. 湖南大学学报，4(1993):21～27

[73] Iliev ID. Higher order Melnikov functions for degenerate cubic Hamiltinians. Advances in Diff Eqns, 4(1996): 689

[74] Iliev ID and Perko LM. Higher order bifurcations of limit cycles. J Diff Eqns, 154 (1999): 339~363

[75] Ilyashenko Yu and Yakovenko Yu. Finitely smooth normal forms of local families of a diffeomorphism and vector fields. Russian Math Surveys, 46(1991): 1~43

[76] Jebrane JM and Zoladek H. Abelian integrals in nonsymmetric perturbations of symmetric Hamiltonian vector fields. Adv. In Appl Math, 15(1)(1994):1~12

[77] Jiang Q and Han M. Melnikov functions and perturbations of a planar Hamiltonian system. Chin Ann Math, 20B(2)(1999): 233~246

[78] Joyal P. Generalized Hopf bifurcation and its dual: Generalized homoclinic bifurcation. SIAM J Appl Math, 48(1988): 481~496

[79] Joyal P. The cusp of order *n*. J Diff Eqns, 88(1)(1990): 1~14

[80] Joyal P and Rousseau C. Saddle quantities and applications. J Diff Eqns, 78(1989): 374~399

[81] Kotova A and Stanzo V. On few-parameter generic families of vector fields on the two-dimensional sphere. Amer Math Soc Trans, 165(1995): 155~201

[82] Kuznetsov Y. Elements of Applied Bifurcation Theory. Springer-Verlag. New York. 1995

[83] Leontovich FA. On the creation of limit cycles from a separatrix. Dokl Akad Nauk SSSR, 78(1851): 641~644

[84] Li B and Zhang Z. A note of a GS Petrov's result about the weakened 16th Hilbert problem. J Math Anl Appl, 190(1995). 489~516

[85] Li B and Zhang Z. The bifurcation phenomenon of a class of planar codimension 3 polycycle with two saddles resonating. Science in China(A), 12(1997):1259~1271

[86] Li C. Two problems of planar quadratic systems. Science in China(A), 26(1983): 471~481

[87] Li C. Nonexistence of limit cycles around a weak focus of order three for any quadratic system. Chin Ann Math, 7B(2)(1986): 174~190

[88] Li C, Llibre J and Zhang Z. Weak focus, limit cycles and bifurcations for bounded quadratic systems. J Diff Eqns, 115(1995): 193~223

[89] Li C and Rousseau C. A system with three limit cycles appearing in a Hopf bifurcation and dying in a homoclinic bifurcation, the cusp of order 4. J Diff Eqns, 79(1989): 132~167

[90] Li C and Rousseau C. Codimension 2 symmetric homoclinic bifurcation. Canadian J Math, 42(1990): 191~212

[91] Li C and Zhang Z. A criterion for determining the monotonicity of the ratio of two Abelian integrals. J Diff Eqns, 127(1996): 407~424

[92] Li J. Distribution of limit cycles of planar cubic systems. Science in China(A), 28(1)(1985): 35～46
[93] 李继彬. 浑沌与 MELNIKOV 方法. 重庆:重庆大学出版社. 1989
[94] Li J and Chen X. Poincare bifurcation in the quadratic planar differential system. Chin Scie Bull, 32(10)(1987): 655～660
[95] 李继彬,冯贝叶. 稳定性 分支与混沌. 昆明:云南科技出版社, 1995
[96] 李继彬,李存富. 平面三次哈密顿系统与(E_3)的极限环分布. 数学学报, 28(5)(1985). 509～521
[97] Li J and Li Y. Global bifurcationa in a perturbed cubic system with Z_2-symmetry. Acta Math Appl Sinica, 8(2)(1992). 131～143
[98] Li J and Liu Z. On the connection between two parts of Hilbert's 16th problem and equivariant bifurcation problem. Ann Diff Eqns, 14(1998): 224～235
[99] 李继彬,赵晓华,刘正荣. 广义 Hamilton 系统的理论与应用. 北京: 科学出版社, 1994
[100] Li W. The bifurcation of "eight" figure of separatrix of a saddle with zero value in the plane. Research Report, No. 46. Peking University. 1995
[101] Liu Y and Li J. Theory of values of singular point in complex autonomous differential systems. Science in China(A), 33(1)(1990):10～23
[102] 刘一戎,李继彬. 论复自治微分系统的奇点量. 数学年刊, 11A(6)(1996):717～724
[103] Lloyd NG and Lynch S. Small amplitude limit cycles of certain Lienard systems. Proc. Royal Society of London (A), 418(1988): 199～208
[104] 罗定军,韩茂安,朱德明. 奇闭轨分支出极限环的唯一性(I). 数学学报, 3(1992): 407～417
[105] 罗定军,滕利帮. 微分动力系统原理. 北京:高等教育出版社, 1990
[106] Luo D, Wang X, Zhu D and Han M. Bifurcation Theory and Methods of Dynamical Systems. World Scientific. 1997
[107] Lynch S. Generalized cubic Lienard equations. Applied Math Letters, 12(1999): 1～6
[108] 马知恩,汪儿年. 鞍点分界线环的稳定性及产生极限环的条件. 数学年刊, 4A(1)(1983):105～110
[109] Mardesic P, Rousseau C and Toni B. Linearization of isochronous centers. J Diff Eqns, 121(1995): 67～108
[110] Medved M. Fundamentals of Dynamical Systems and Bifurcation Theory. Adam Hilger. 1992

[111] Melnikov VK. On the stability of the center for time periodic perturbations. Trans Moscow Math Soc, 12(1963): 1～57

[112] Morsalani M and Mourtada A. Degenerate and nontrival hyperbolic 2 - polycycles: two independent Ecalle - Roussarie compensators and Khovanskii's theory. Nonlinearity, 7(1994): 1593～1604

[113] Mourtada A. Degenerate and nontrivial hyperbolic polycycles with two vertices. J Dff Eqns, 113(1994): 68～83

[114] Palis J and de melo W. Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction. Springer-Verlag. New York. 1982

[115] Perko L. Rotated vector fields and the global behavior of limit cycles for a class of quadratic systems in the plane. J Diff Eqns, 18(1975): 63～86

[116] Perko L. Global families of limit cycles of planar analytic systems. Trans Amer Math Soc, 322(1990):627～656

[117] Perko L. Differential Equations and Dynamical Systems. Springer-Verlag. New York. 1991

[118] Perko L. Rotated vector fields. J Diff Eqns, 103(1993): 127～145

[119] Petrov G. The Chebyshev property of elliptic ingrals. Funct Anal Appl, 22(1988): 72～73

[120] Reyn J. Generating of limit cycles from separatrix polygons in the phase plane. Lecture Notes in Math, 810(1980): 264～289

[121] Robinson C. Dynamical Systems. CRC Press, Inc. 1995

[122] Roussarie R. On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields. Bol Soc Bras Mat, 17(1986): 67～101

[123] 沈伯骞.二次系统的三次曲线极限环和分界线环的存在性问题.数学年刊,12A(3)(1991):382～389

[124] 孙建华.超临界情形的鞍点分界线环分支.数学年刊,12A(5)(1991):636～643

[125] Vanderbauwhede A and van Gils SA. Center manifolds and contractions on a scale of Banach spaces. J Funct Anal, 72(1987): 209～324

[126] 王辉丰,余澍祥.常微分方程定性理论.广州:广东高等教育出版社,1996

[127] Wang X. Some properties of cubic Lienard systems. Ann Diff Eqns, 14(2)(1998): 320～324

[128] Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer-Verlag. New York. 1990

[129] Wiggins S and Holmes P. Periodic orbits in slowly varying oscillators. SIAM J Math Anal, 18(1987): 542～611

[130] 肖冬梅.一类余维三鞍点型平面向量场的分支.中国科学(A),23(3)(1993):252

~262
[131] 叶彦谦.极限环论(第二版).上海:上海科学技术出版社,1984
[132] Ye Y. Rotated vector field decomposition method and its applications. Lecture Notes in Math. Vol. 1445. 1990
[133] Ye Y. On the relative position of limit cycles of a real quadratic differential system. Chin. Ann Math, 11B(1990): 74~83
[134] Ye Y. Bifurcation theory of quadratic differential systems. Chin Ann Math, 14B (1993): 427~434
[135] Ye Y. Anti-saddle of a polynomial differential system. Chin Ann Math, 16B (1995): 453~458
[136] Ye Y. On Hilbert's 16th problem in the case $n=2$. Ann Diff Eqns, 12(1)(1996): 110~116
[137] 叶彦谦.曲面动力系统.北京:科学出版社,1991
[138] 叶彦谦.多项式系统定性理论.上海:上海科学技术出版社,1995
[139] Zegeling A and Kooij R. Uniqueness of limit cycles in polynomial systems with algebraic invariants. Bull Austral Math Soc, 49(1994):7~20
[140] 张筑生.微分动力系统原理.北京:科学出版社,1981
[141] 张锦炎.常微分方程几何理论与分支问题(第二版).北京:北京大学出版社,1987
[142] 张锦炎,钱敏.微分动力系统导引.北京:北京大学出版社,1991
[143] 张平光. 二次系统二阶细焦点外围极限环的唯一性. 数学学报, 42(2)(1999): 289~304
[144] Zhang X. Existence of limit cycles in a multiply connected region. Chin Ann of Math, 20B(2)(1999). 169~172
[145] 张芷芬,丁同仁,黄文灶,董镇喜.微分方程定性理论.北京:科学出版社,1985
[146] 张芷芬,李承治,郑志明,李伟固.向量场的分岔理论基础.北京:高等教育出版社,1997
[147] 赵丽琴.平面上含两鞍结点与一鞍点的余维三多角环的三参数开折.数学学报,41(2)(1998):439~448
[148] 赵丽琴.平面上含鞍结点与中心型鞍点的余维三环的三参数开折.系统科学与数学,19(2)(1999):142~149
[149] Zhao Y and Zhang Z. An estimate of the number of zeros of Abelian integraks for cubic vector fields with cuspidal loop. Ann Diff Eqns, 14(1998): 434~445
[150] Zhu D. Saddle values and integrability conditions of quadratic differential systems. Chin Ann Math, 8B(4)(1987): 466~478
[151] Zhu D. A general property of quadratic differential systems. Chin Ann Math, 10B

(1989): 26～32

[152] Zhu D. Bifurcation of limit loops. Chin Ann Math, 14B(1993): 117～128

[153] Zhu D. Homoclinic bifurcation with codimension 3. Chin Ann Math, 15B(1994): 205～216

[154] Zhu D. Orbits heteroclinic to invariant manifolds. Acta Math Sinica(NS), 12(4) (1996): 372～378

[155] 朱德明. Melnikov 型向量函数和奇异轨道的主法向,中国科学(A),24(1994), 346～352

[156] 朱德明. Melnikov 向量函数和异宿流形,中国科学(A),24(1994),467～473

[157] 朱德明. 伴随鞍结点分支的非通有异宿轨道的存在性,中国科学(A),911～916

[158] 朱德明. 连接非双曲奇点的通有异宿轨道的保存问题,科学通报,39(1994), 1731～1733

[159] 朱德明,韩茂安. 光滑动力系统,上海:华东师范大学出版社,1993

[160] 朱德明,韩茂安. 周期流形的不变环面和次调和分支,数学学报,4(1998),749～756

[161] Zhu D and Xia Z, Bifurcations of heteroclinic loops, Science in China(A), 8(1998), 837～848

[162] Zoladek H, On the versality of a familly of symmetric vector fields in the plane, Math USSR-Sb, 48(1984), 463～492

[163] Zoladek H, Bifurcations of certain family of planar vector fields tangent to axes, J Diff Eqns, 67(1987), 1～55

[164] Zoladek H, Quadratic systems with center and their perturbations, J Diff Eqns, 109 (1994), 223～273

[165] Zoladek H, The classification of reversible cubic systems with center, Topol. Meth. Nonlinear Anal, 4(1)(1994), 79～136

[166] Zoladek H, Eleven small limit cycles in a cubic vector fields, Nonlinearity, 8(1995), 843～860

[167] Zoladek H, The cyclicity of triangles and segments in quadratic systems, J Diff Eqns, 122(1995), 137～159